ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 47–52
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 47–52

УДК 512.552.12

ЕФЕКТИВНІ ДУО КІЛЬЦЯ

Андрій БІЛОУС

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів
e-mail: a.bilous1610@gmail.com

Доведено, що ефективне дуо кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників. Доведено, що дуо область Безу, скінченний гомоморфний образ якої є кільцем з властивістю заміни, є ефективним справа кільцем. Також доведено, що акуратні кільця є ефективними кільцями.

Ключові слова: дуо кільце, ефективне кільце, кільце елементарних дільників, кільце з властивістю заміни.

1. Вступ. Хелмер [5] першим почав розглядати адекватні області, щоб отримати абстрактну характиризацію кільця цілих функцій. Адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона вивчав Капланський [6]. Гіллман і Хенріксен довели, що регулярне в сенсі фон Неймана кільце є адекватним [7]. Перший приклад неадекватної області Безу, яка є областю елементарних дільників, побудував Хенріксен [8]. Забавський і Кузніцька [9] ввели для розгляду новий клас так званих роздільних кілець, який містить адекватні кільця. Гаталевич [10] першим почав вивчати некомутативні адекватні кільця та їхні узагальнення. Він довів, що узагальнено адекватна справа дуо область Безу є областю елементарних дільників.

Усі кільця, які розглядаємо, є дуо кільцями з одиницею відміною від нуля.

Означення 1. Кільце R називається *дуо кільцем*, якщо кожен однобічний ідеал кільця R є двобічним.

Прикладами дуо кілець є комутативні кільця, тіла, прямі суми тіл, абелево регулярні кільця.

Означення 2. Кільце називається *кільцем Безу*, якщо кожний його правий і лівий скінченно породжений ідеал є головним.

Означення 3. Елемент a дуо кільця R називається *адекватним справа* до елемента $b \in R$, якщо існують такі елементи $r, s \in R$, що a$= rs, rR + bR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A21, 16U80

Означення 4 ([2])**.** Дуо кільце R називається *адекватним справа*, якщо воно є кільцем Безу і кожен ненульовий його елемент є адекватним справа.

Прикладом адекватного справа кільця є абелево регулярне кільце.

Означення 5. Кільце R називається *кільцем елементарних дільників*, якщо довільну матрицю A над кільцем R, домноживши на відповідні оборотні матриці P і Q, можна звести до канонічного діагонального вигляду $D = PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$, причому $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ при $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Означення 6. Якщо довільна 1×2 (2×1) матриця над кільцем R володіє діагональною редукцією, тоді кільце R називають, відповідно, *лівим* (*правим*) *кільцем Ерміта.* Ліве і праве кільце Ерміта називають *кільцем Ерміта.*

Очевидно, що кільце елементарних дільників є кільцем Ерміта, яке є кільцем Безу.

Означення 7 ([4])**.** Кільце R називається *кільцем з властивістю заміни*, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1-e) \in (1-a)R$.

Означення 8. Дуо кільце Безу R називається *ефективним справа*, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ і $aR + bR \neq R$, існує такий елемент $p \in R$, що елемент c є адекватним справа до елемента ap і $pR + bR + cR = R$.

Прикладом ефективних справа кілець є адекватні справа кільця. Приклад Хенріксона [1] стверджує про те, що комутативна область Безу

$$M = \{z_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \mid z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

є єфективним кільцем, яке не є адекватним кільцем. Цей приклад можна узагальнити на дуо випадок, розглянувши дуо область Безу

$$S = \{z_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \mid z_0 \in R, a_i \in P\},$$

де $R ==$ дуо область, P — тіло дробів дуо області R.

Означення 9. Елемент $a \in R$ називається *чистим*, якщо $a = u + e$, для деякого ідемпотента $e = e^2 \in R$ і оборотного елемента $u \in U(R)$.

Твердження 1. *Нехай R — дуо область Безу і $a \in R, a \neq 0$. Тоді елемент a є адекватним справа до елемента b тоді і тільки тоді, коли елемент a є адекватним справа до елемента $b + at$ для довільного елемента $t \in R$.*

Доведення. Нехай елемент a є адекватним справа до елемента b в дуо кільці Безу R. Звідси випливає, що існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR + bR = R$ і для довільного елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Виберемо довільний елемент $t \in R$ і розглянемо ідеал $rR + (b + at)R$. Оскільки R є дуо кільцем Безу, то отримаємо $rR + (b + at)R = hR$ для деякого елемента $h \in R$. Згідно з $aR \subset rR \subset hR$ і $(b + at)R \subset hR$ випливає, що $bR \subset hR$. Що є можливим тоді і тільки тоді, коли h є одиницею. Тому, що $rR + bR = R$. Оскільки $s'R + bR \neq R$ для деякого елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$, то отримаємо, що $s'R + (b + at)R \neq R$ для деякого елемента $t \in R$. Отож, отримаємо, що елемент a є адекватним справа до елемента $b + at$ для деякого елемента $t \in R$. Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Припустимо, що елемент a є адекватним справа до елемента $b+at$. Це означає, що існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR+(b+at)R = R$, і для деякого елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + (b + at)R \neq R$. Якщо $rR + bR = hR \neq R$, для деякого елемента $h \in R$, тоді з включення $aR \subset rR \subset hR$ і $bR \subset hR$ отримаємо $(b + at)R \subset hR$. Остання рівність неможлива, оскільки $rR \subset hR$. Припустимо, що для деякого елемента $s' \in R$, $sR \subset s'R \neq R$ і $s'R + bR = R$. Ми маємо $s'R + (b + at)R = hR \neq R$. Тоді $hR \subset bR$, що суперечить припущенню $s'R + bR = R$. Теорему доведено. □

Розглянемо суміжний клас $\overline{b} = b + aR$ у фактор-кільці $\overline{R} = R/aR$. Наступне твердження визначає відповідність між властивостями адекватного справа елемента в дуо області Безу і структури гомоморфного образа елемента $\overline{b}$ в $\overline{R} = R/aR$.

Твердження 2. *Нехай R є дуо областю Безу і елемент $a \in R$ є адекватним справа до елемента $b \in R$. Тоді елемент $\overline{b}$ є чистим елементом в кільці $\overline{R}$.*

Доведення. Розглянемо рівності $(-1)R+bR+aR = R$ з якої випливає, що $\overline{-1R}+\overline{bR} = \overline{R}$. Оскільки елемент a є адекватним справа до елемента b в дуо кільці Безу R, то існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR + bR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Перейшовши до фактор-кільця, ми отримаємо $\overline{rR} + \overline{bR} = \overline{R}$ і $\overline{s'R} + \overline{bR} \neq \overline{R}$. Нехай $\overline{t}$ є довільним необоротним в $\overline{R}$ дільником елемента $\overline{s}$. Тоді існує довільний елемент $k \in R$ такий, що $(s+ak)R \subset tR$. Доведемо, що $sR+tR \neq R$. Припустимо протилежне, що $sR+tR = R$. Оскільки $(s + ak)R \subset R$, то $s + ak = t\beta$, для деякого елемента $\beta \in R$.

Розглянемо рівність $s + ak = t\beta$. Оскільки елемент a є адекватним справа до елемента b і R є дуо кільцем, тл ми можемо записати $s+rsk = t\beta$. Звідси випливає, що $s+sr'k = t\beta \Rightarrow s(1+r'k) = t\beta$. Оскільки з $sR+tR = R$ випливає, що $(1+r'k)R \subset tR$. Отже, $tR+r'R = R$. Оскільки $tR+sR = R$ і $tR+r'R = R$, то $tR+sr'R = R$. Оскільки R є дуо кільцем, то $sr' = rs$. Отож, $tR + aR = R$ і тоді $\overline{tR} = \overline{R}$, що суперечить припущенню про необоротність елемента $\overline{t}$. Отже, ми довели, що $sR+tR = uR \neq R$. Це означає, що $\overline{uR}+\overline{bR} \neq \overline{R}$. Оскільки $\overline{u}$ є правим дільником елемента $\overline{t}$, то $\overline{tR}+\overline{bR} \neq \overline{R}$. У підсумку отримаємо, що $\overline{0} = \overline{rs}$ є адекватним справа елементом до елемента $\overline{b}$.

Зауважимо, що $\overline{rR} + \overline{sR} = \overline{R}$. Насправді, якщо $\overline{rR} + \overline{sR} = \overline{hR} \neq \overline{R}$, то з адекватності елемента $\overline{0} = \overline{rs}$ до елемента $\overline{b} \in \overline{R}$ відомо, що $\overline{hR} + \overline{bR} = \overline{R}$ (оскільки $\overline{h}$ є дільником $\overline{r}$). З іншого боку, $\overline{hR} + \overline{sR} \neq \overline{R}$ (оскільки $\overline{h}$ є необоротним дільником $\overline{s}$). Але це неможливо. Отже, $\overline{rR} + \overline{sR} = \overline{R}$ й існують такі елементи $\overline{u}, \overline{v} \in \overline{R}$, що $\overline{ru} + \overline{sv} = \overline{1}$.

Позначимо $\overline{e} = \overline{ru}$. Нам потрібно довести, що $\overline{b}-\overline{e}$ є одиницею в $\overline{R}$. Припустимо, що $(\overline{b}-\overline{e})\overline{R} = \overline{hR} \neq \overline{R}$. Розглянемо ідеал $\overline{hR}+\overline{rR} = \overline{tR}$. Якщо $\overline{t}$ є неодиницею в $\overline{R}$, то $(\overline{b} - \overline{e})\overline{R} \subset \overline{hR} \subset \overline{tR}$. Отже, $\overline{bR} \subset \overline{tR}$, що є неможливим, оскільки $\overline{rR} \subset \overline{tR}$, $\overline{bR} \subset \overline{tR}$ і $\overline{bR} + \overline{rR} = \overline{R}$. Отже, $\overline{hR} + \overline{rR} = \overline{R}$. Зараз доведемо, що $\overline{hR} + \overline{sR} = \overline{R}$. Припустимо, що $\overline{hR} + \overline{sR} = \overline{tR} \neq \overline{R}$. Оскільки $\overline{t}$ є не одиницею і є дільником $\overline{s}$, то з визначеної властивості елемента $\overline{s}$ маємо $\overline{tR} + \overline{bR} = \overline{kR} \neq \overline{R}$. З іншого боку, $(\overline{b} - \overline{e})\overline{R} = \overline{hR}$ і $\overline{eR} + \overline{sR} = \overline{R}$. Тоді отримаємо, що з $\overline{eR} + \overline{tR} = \overline{R}$ випливає включення $\overline{eR} \subset \overline{kR}$. Це включення є неможливим, оскільки $\overline{bR} \subset \overline{kR}$ і $\overline{bR}+\overline{(-1)R} = \overline{R}$. Зрештою ми знаємо, що $\overline{0} = \overline{rs}$, тоді отримаємо, що $\overline{h}$ — одиниця кільця $\overline{R}$.

Отже, ми довели, що $\overline{b}-\overline{e}=\overline{u}$ є одиницею в кільці $\overline{R}$, і отже, $\overline{b}=\overline{e}+\overline{u}$ є чистим елементом. Теорему доведено. $\square$

Теорема 1. *Ефективне справа дуо кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Достатньо довести, що для довільної трійки елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR+bR+cR=R$ існують такі елементи $p, q \in R$, що $(ap+bq)R+cqR=R$. Якщо $aR+bR=R$, то існують елементи $p, g \in R$ такі, що $(ap+bg)R+cqR=R$. Згідно з означенням ефективного кільця існує елемент $p \in R$ такий, що елемент c є адекватним справа до елемента ap і $pR+bR+cR=R$. З того, що $aR+bR+cR=R$ і $pR+bR+cR=R$ маємо $(ap)R+bR+cR=R$. Оскільки елемент c є адекватним справа до елемента ap, то $c=sq$ де $qR+apR=R$ і $s'R+apR\neq R$, для довільного елемента $s'\in R$, $sR\subset s'R\neq R$.

Доведемо, що $(ap+bq)R+cqR=R$. Припустимо протилежне. Нехай $(ap+bq)R+cqR=hR\neq R$. Оскільки $cq=sq^2$, то $qR+hR=dR\neq R$. Оскільки $qR\subset dR$ і $hR\subset dR$, то $apR\subset dR$, що неможливо, бо $qR+apR=R$. Отож, $sR\subset hR$.

За означенням елемента s отримаємо, що $hR+apR=kR\neq R$. Якщо $kR+aR=xR\neq R$, то $bqR\subset xR$. Оскільки $cR\subset xR$, $aR\subset xR$ і $aR+bR+cR=R$, то $xR+bR=R$. Отже, $qR\subset xR$, що неможливо, оскільки $qR+sR=R$. Маємо $pR\subset kR$. Тоді $bqR\subset kR$. Якщо $bR+kR=\alpha R\neq R$, то $R\subset\alpha R$, $bR\subset\alpha R$ і $pR\subset\alpha R$. Використавши факт $pR+bR+cR=R$, отримаємо протиріччя. Тоді $qR\subset kR$. Але це неможливо, оскільки $qR+sR=R$ і $sR\subset kR$. Отже, ми довели, що $(ap+bq)R+cqR=R$. Теорему доведено. $\square$

Твердження 3. *Дуо кільце R є кільцем з властивістю заміни тоді і тільки тоді, коли для пари елементів $a, b\in R$, $aR+bR=R$ існує такий ідемпотент $e\in R$, що $e\in aR$ і $1-e\in bR$.*

Доведення. Згідно з [4, твердження 1.1.1] в довільному кільці з властивістю заміни з рівності $aR+bR=R$ випливає, що існують ортогональні ідемпотенти $e\in R$ і $1-e\in R$ такі, що $e\in aR$ і $(1-e)\in(1-a)R$. Необхідність доведено.

Якщо з рівності $aR+bR=R$ випливає, що існує ідемпотент $e\in R$ такий, що $e\in aR$ і $(1-e)\in bR$. Тоді розглянемо рівність $a+(1-a)=1$. Звідси отримаємо, що $e\in aR$ і $(1-e)\in(1-a)R$. Отож, ми отримали, що R є кільцем з властивістю заміни. Твердження доведено. $\square$

Твердження 4. *Нехай R є дуо областю Безу, в якій для довільних елементів $a, b, c\in R$ таких, що $aR+bR+cR=R$ існує елемент $p\in R$ такий, що елемент c є адекватним справа до елемента ap. Нехай $c=rs$, де $rR+apR=R$ і $s^{'}R+apR\neq R$ для довільного необоротного дільника $s^{'}$ елемента s. Тоді $pR+bR+cR=R$ тоді і тільки тоді, коли $sR+bR=R$.*

Доведення. Нехай $c=rs$, $rR+apR=R$ і $s^{'}R+apR\neq R$ для довільного необоротного дільника $s^{'}$ елемента s. Якщо $aR+bR+cR=R$ і $pR+bR+cR=R$, то $apR+bR+cR=R$. Якщо $sR+bR=\sigma R\neq R$, то отримаємо $\sigma R+apR=hR\neq R$, що є неможливим, оскільки $apR+bR+cR=R$. Нехай $sR+bR=R$. Доведемо, що $apR+bR+cR=R$. Якщо $pR+bR+cR=hR\neq R$, то $pR\subset hR, cR\subset hR$ і $bR\subset hR$. Оскільки $rR+apR=$

R, то h є необоротним дільником s. З $bR \subset hR$ і $sR \subset hR$, маємо $sR + bR \subset hR \neq R$. Що є неможливим, оскільки $sR + bR = R$. Твердження доведено. □

Акуратні кільця вивчали в [3] як кільця, гомоморфний образ яких є кільцем з властивістю заміни. Доведемо, що у випадку дуо області Безу, акуратні кільця є ефективними кільцями.

Теорема 2. *Нехай R є дуо областю Безу і фактор-кільце R/cR є кільцем з властивістю заміни для довільного $c \in R/0$. Тоді R є ефективним справа кільцем.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/cR$ є кільцем з властивістю заміни для довільного $c \in R/0$. Тоді з твердження 3 і рівності $\overline{aR} + \overline{bR} = \overline{R}$ випливає, що ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$ такий, що $\overline{e} \in \overline{aR}$ і $\overline{(1-e)} \in \overline{bR}$.

Нагадаємо, що з умови $\overline{aR} + \overline{bR} = \overline{R}$ випливає aR+bR+cR=R. Оскільки $\overline{e} \in \overline{aR}$, то існує елемент $p \in R$ такий, що $e - ap = cs$, для деякого елемента $s \in R$. Подібно $1 - e - b\alpha = c\beta$ для деяких елементів $\alpha, \beta \in R$. Згідно з заміною $e = cs + ap$ в $1 - e - b\alpha = c\beta$ одержимо $ap + cw + b\alpha = 1$, де $w = s + \beta$. Що означає $pR + bR + cR = R$.

Доведемо, що елемент c є адекватним справа до елемента ap. Оскільки $\overline{e} = \overline{e^2}$, то $e(1-e) = ct$ для довільного елемента $t \in R$. Оскільки R — кільце Безу, то існує елемент $d \in R$ такий, що $eR + cR = dR$. Тоді існують елементи $u, v \in R$ такі, що $eu + cv = d$ і $e = de_0$, $= dc_0$ для довільних елементів $e_0, {}_0 \in R$ таких, що $e_0R + c_0R = R$. Тоді $e_0(1-e) = c_0t$, тому що $e_0R + c_0R = R$ і $e + c_0\gamma = 1$ для довільного елемента $\gamma \in R$. Нехай $r = c_0, s = d$. Тоді ми отримаємо розклад $c = rs$, де $rR + eR = R$ і $sR \subset eR$. Отже, ми отримали, що елемент c є адекватним справа до елемента e. Згідно з твердженням 1 і $e = ap + cs$ отримаємо, що елемент с є адекватним справа до елемента ар. Теорему доведено. □

Теорема 3. *Нехай R є дуо областю Безу, в якій для довільних елементів $a, b, c \in R$, $aR + bR + cR = R$ існує такий елемент $p \in R$, що елемент c є адекватним справа до елемента ap і $pR + bR + cR = R$. Тоді фактор кільце R/cR є кільцем з властивістю заміни для довільного $c \in R/0$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/cR$ і $\overline{aR} + \overline{bR} = \overline{R}$, де $\overline{a} = a + cR, \overline{b} = b + cR$. Тоді $aR + bR + cR = R$ і існує елемент $p \in R$ такий, що елемент c є адекватним справа до елемента ap і $pR + bR + cR = R$. Очевидно, що $ru + sv = 1$. Оскільки $\overline{ru} + \overline{rv} = \overline{1}$ і маємо $\overline{r^2u} = \overline{r}$. Позначимо $\overline{e} = \overline{sv}$. Зрозуміло, що $\overline{1} - \overline{e} = \overline{ru}$ і $\overline{sR} = \overline{eR}, (\overline{1} - \overline{e})\overline{R} = \overline{rR}$. Згідно з твердженням 4, маємо $sR + bR = R$ тоді $s\lambda + b\beta = 1$, $\lambda, \beta \in R$. Розглянемо рівність $rs\lambda + rb\beta = r$. Перейшовши до фактор-кільця, отримаємо $\overline{rs\lambda} + \overline{rb\beta} = \overline{r}$. Оскільки $\overline{rs} = \overline{0}$, то одержимо $\overline{rb\beta} = \overline{r}$ і $\overline{rR} \subset \overline{bR}$. Отже, $rR + apR = R$. Отож, ми довели таке: якщо $\overline{aR} + \overline{bR} = \overline{R}$, то існують ідемпотенти $\overline{e} \in \overline{aR}$ і $\overline{1-e} \in \overline{bR}$. Згідно з твердженням 3, R/cR є кільцем з властивістю заміни. Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. M. Henriksen *Some remarks about elementary divisor rings, II*, Michigan Math. J. **3** (1955), no. 2, 159–163.
2. M. D. Larsen, W. J. Lewis, and T. S. Shores, *Elementary divisor rings and finitely presented modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **187** (1974), 231–248.

3. W. Wm. McGovern, *Neat ring*, J. Pure Appl. Algebra **205** (2006), no. 2, 243–265.
4. W. K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 269–278.
5. O. Helmer, *The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), no. 4, 225–236.
6. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464–491.
7. L. Gillman and M. Henriksen, *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal*, Trans. Amer. Soc. **82** (1956), 366–391.
8. L. Gillman and M. Henriksen, *Some remark about elementary divisor rings*, Trans. Amer. Soc. **82** (1956), 362–365.
9. Б. М. Кузніцька, Б. В. Забавський, *Роздільні кільця*, Mat. Stud. **42** (2015), no. 2, 153–155.
10. А. І. Гаталевич, *Про адекватні і узагальнено адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників*, Mat. Stud. **9** (1998), no. 2, 115–119.
11. Б. В. Забавский, С. И. Билявская, *Адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены*, Фундамент. и прикл. матем. **17** (2012), no. 3, 61–66; **English version:** J. Math. Sci. **187** (2012), no. 2, 153–156.
12. Б. В. Забавський, *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2*, Укр. мат. журн. **55** (2003), no. 4, 550–554; **English version:** Ukr. Math. J. **55** (2003), no. 4, 665–670.
13. B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings*, Math. Studies, Monograph Ser., **XVI**, VNTL Publ., Lviv, 2012, 251p.

EFFECTIVE DUO RINGS

Andriy BILOUS

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
3-b, Naukova Str. Ukraine, 79060, L'viv
e-mail: a.bilous1610@gmail.com

It is proved that an effective Hermite duo ring is an elementary divisor ring. It is shown that a Bezout duo domain whose a finite homomorphic image, is an exchange ring is a right effective ring. Moreover, it is proved that the neat rings are effective rings.

Key words: duo ring, effective ring,elementary divisor ring, exchange ring.

Стаття: надійшла до редколегії 24.09.2017.
доопрацьована 02.01.2018.
прийнята до друку 24.04.2018.