ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 196–201
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 196–201

УДК 519.21

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З МІГРАЦІЄЮ ТА НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Христина ЯКИМИШИН

Львівський національний університет ім. Івана Франка
вул. Університецька, 1, 79000, Львів
e-mails: I_ Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_ Hrystyna@ukr.net

Досліджуємо гіллястий процес з міграцією та неперервним часом. Знайдено диференціальне рівняння для математичного сподівання цього процесу.

Ключові слова: гіллястий процес, неперервний час, міграція, математичне сподівання.

1. Опис гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом. Розглядаємо гіллястий процес $\mu(t)$ з одним типом частинок, з міграцією та неперервним часом; $\mu(t)$ – кількість частинок у момент часу t. Вважаємо, що

$$\mu(0) = 1. \tag{1}$$

Процес $\mu(t)$ можна подати як поєднання двох процесів – класичного гіллястого процесу з неперервним часом $\xi(t)$ [1] і процес міграції $\zeta(t)$. Якщо в момент часу t в системі існує випадкова кількість $\mu(t)$ частинок, то вони розмножуються незалежно одна від одної та незалежно від свого походження за тим самим законом. Закон розмноження частинок у середині цієї системи визначається процесом $\xi(t)$. Крім того, в систему ще можуть іммігрувати частинки та відбуватися еміграція. Імміграція й еміграція визначаються процесом $\zeta(t)$, де $\zeta(t)$ – позначає кількість частинок у момент часу t, які емігрують із системи або іммігрують в неї.

Випадкові процеси $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ вважаємо однорідними марківськими процесами. $\zeta(t)$ - узагальнений Пуассонівський процес

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{N_t} \zeta_j. \tag{2}$$

Нехай у момент часу t в системі існує $\mu(t)$ частинок. Позначимо через $\xi_i(\Delta t)$ ($i = 1, \ldots, \mu(t)$) кількість нащадків i-ї частинки за час Δt, тобто в момент часу $t + \Delta t$ і,

2010 Mathematics Subject Classification: 60J80

враховуючи однорідність $\xi(t)$, припускаємо, що

$$(3)\qquad P\{\xi_i(\Delta t)=k|\xi_i(0)=1\}=\delta_{1k}+p_k\Delta t+o(\Delta t),\qquad k=0,1,\ldots,$$

$$p_1<0,\ p_k\geqslant 0\ (k=0,2,3,\ldots),\qquad \sum_{k=0}^{\infty}p_k=0.$$

Процес $\xi(t+\Delta t)$ визначається як сукупність нащадків кожної частинки процесу $\mu(t)$, а саме

$$(4)\qquad \xi(t+\Delta t)=\sum_{i=1}^{\mu(t)}\xi_i(\Delta t).$$

Визначимо процес $\zeta(t)$. Зазначимо, що $\zeta(0)=0$. Асимптотику процесу при $\Delta t\to 0$ визначимо так:

$$(5)\qquad P\{\zeta_0(\Delta t)=k|\zeta(0)=0\}=\delta_{0k}+q_k\Delta t+o(\Delta t),\qquad k=-m,\ldots,-1,0,1,\ldots,$$

причому

$$q_0\leqslant 0,\quad q_k\geqslant 0\quad (k=-m,\ldots,-1,1,2,\ldots),\qquad \sum_{k=-m}^{\infty}q_k=0.$$

Кількість частинок у момент часу $t+\Delta t$ дорівнює

$$(6)\qquad \mu(t+\Delta t)=\max\left\{\sum_{i=1}^{\mu(t)}\xi_i(\Delta t)+\zeta_t(\Delta t);\ 0\right\},$$

де $\zeta_t(\Delta t)$ – кількість частинок, які емігрували з системи або іммігрували в систему протягом часу $(t,t+\Delta t]$.

Введемо твірні функції.

Твірну функцію процесу $\mu(t)$ позначимо $F_\mu(t,s)$, процесу $\xi(t)$ – $F_\xi(t,s)$ і

$$(7)\qquad F_\mu(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\mu(t)=n\}s^n,\qquad F_\xi(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\xi(t)=n\}s^n,$$

$$|s|\leqslant 1,\ s\in\mathbb{C}.$$

Твірну функцію щільностей перехідних ймовірностей для процесу $\xi(t)$ позначимо через $f_\xi(s)$, яка визначається так:

$$(8)\qquad f_\xi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k,\qquad s\in C,|s|\leqslant 1.$$

Замість класичної твірної функції для процесу $\zeta(t)$ будемо розглядати функцію

$$(9)\qquad \widehat{F}_\zeta(t,s)=\sum_{n=-m}^{\infty}P\{\zeta(t)=n\}s^n,\qquad 0<|s|\leqslant 1,$$

яку ми назвемо узагальненою твірною функцією. Також введемо узагальнену твірну функцію щільностей перехідних ймовірностей для процесу $\zeta(t)$

$$(10)\qquad \widehat{f}_\zeta(s)=\sum_{l=-m}^{\infty}q_l s^l,\qquad 0<|s|\leqslant 1.$$

Далі введемо позначення

(11) $$A(t)=M\mu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{\mu(t)=k\},$$

(12) $$\frac{\partial f_\xi(s)}{\partial s}_{s=1}=a_\xi,\qquad \frac{\partial \widehat{f_\zeta}(s)}{\partial s}_{s=1}=a_\zeta.$$

А також введемо операцію для послідовності $\{b_n\}_{n=-m}^{\infty}$

(13) $$\big\langle B(s)\big\rangle_0=\sum_{k=-m}^{0}b_k+\sum_{1}^{\infty}b_k s^k,\qquad s\in C,\qquad |s|\leqslant b^*>0.$$

2. Диференціальні рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом.

Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє такі рівняння: звичайне диференціальне рівняння та лінійне рівняння частинних похідних.

Теорема 1 ([2]). *Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння*
$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t}=f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)+\big\langle F_\mu(t,s)\widehat{f_\zeta}(s)\big\rangle_0,$$
з початковою умовою $\mu(0)=1$.

Теорема 2 ([3]). *Твірна функція процесу $\mu(t)$ задовольняє диференціальне рівняння в частинних похідних*
$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t}=f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}+\big\langle F_\mu(t,s)\widehat{f_\zeta}(s)\big\rangle_0,$$
з початковою умовою $\mu(0)=1$.

3. Диференціальні рівняння для математичного сподівання гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом.

Теорема 3. *Якщо p_0 не дорівнює нулю, то в умовах* (1)–(13) *$A(t)=M\mu(t)$ задовольняє диференціальне рівняння*

(14) $$\frac{\partial A(t)}{\partial t}=A(t)a_\xi+a_\zeta+\varphi\big(F_\mu(t,0)\big),$$

де $\varphi(x)$ залежить від p_j, q_k, $k=-m,\dots,-1$, $A(0)=1$.

А $F_\mu(t,0)$ визначається з диференціального рівняння

(15) $$\frac{\partial F_\mu(t,0)}{\partial t}=f_\xi\big(F_\mu(t,0)\big)+\psi\big(F_\mu(t,0)\big),$$

де $\psi(x)$ залежить від p_j, q_k, $F_\mu(0,0)=0$.

Доведення. Відомо [2, 3], що для нашої моделі гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом виконуються наступні диференціальні рівняння:

(16) $$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t}=f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)+\big\langle \widehat{f_\zeta}(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0,\qquad F_\mu(0,s)=s,$$

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0, \qquad F_\mu(0,s)=s. \tag{17}$$

Рівняння (16) продиференціюємо по s, змінимо порядок диференціювання в лівій частині та підставимо $s=1$. У підсумку отримуємо

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = A(t)a_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial s}\big\langle \partial\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\right)_{|s=1}.$$

Розглянемо другий доданок правої частини

$$\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s) = \big(q_{-m}s^{-m}+\ldots+q_0+\ldots\big)\big(P\{\mu(t)=0\}+P\{\mu(t)=1\}s+\ldots\big) =$$
$$= s^{-m}q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + s^{-m+1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+s^{-m+2}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+$$
$$+s^{-1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-2\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+s^{0}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-1\}+\ldots+q_{0}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+s^{1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots$$

Очевидно, що

$$\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0 = q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + \big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+$$
$$+(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-2\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\})+$$
$$+s^{0}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-1\}+\ldots+q_{0}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+s^{1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots$$

Далі беремо похідну по s від $\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)$ та $\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0$.

$$\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)' = -ms^{-m-1}q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + (-m)s^{-m}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\}+$$
$$+q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big) + (-m+2)s^{-m+1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\}+$$
$$+q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots+(-1)s^0\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\}+$$
$$+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m-2\}+\ldots+q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)+$$
$$+0\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+q_{1}P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots$$

$$\big(\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\big)' = q_{-m}P\{\mu(t)=m+1\} + \big(q_{-m+1}P\{\mu(t)=m\}+\ldots+$$
$$+q_1P\{\mu(t)=0\}\big) + s^1\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m+2\}+q_{-m+1}P\{\mu(t)=m+1\}+$$
$$+\ldots+q_2P\{\mu(t)=0\}\big)+\ldots$$

Виразимо $\big(\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\big)'$ через $\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)'$. У підсумку отримаємо

$$\big(\big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0\big)'_{s=1} = \big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)'_{s=1} - P\{\mu(t)=0\}\sum_{k=-m}^{-1} kq_k -$$
$$-P\{\mu(t)=1\}\big((-m+1)q_{-m}+\ldots+(-1)q_{-2}\big)-\ldots-(-P\{\mu(t)=m-1\}q_{-m}).$$

Легко бачити, що

$$\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)'_{s=1} = \big(\big(\widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big)' + \big(\widehat{f}_\zeta(s)\big)'F_\mu(t,s)\big)_{s=1} = a_\zeta.$$

Повертаємось до рівнянь (16), (17). Позаяк ліві частини рівні й однакові початкові умови, то можемо прирівняти праві частини

$$f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big) + \big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0 = f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \big\langle \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s)\big\rangle_0.$$

Звідси випливає, що

$$f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big) = f_\xi(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}. \tag{18}$$

Підставимо $s=0$. У підсумку отримуємо, що

$$P\{\mu(t)=1\} = \frac{1}{h_0}f_\xi\big(P\{\mu(t)=0\}\big).$$

Ще раз диференціюємо по s рівність (18)

$$\frac{\partial f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big)}{\partial s}\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} = \frac{\partial f_\xi(s)}{\partial s}\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + f_\xi(s)\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2} \tag{19}$$

і підставляємо $s=0$. Отримуємо

$$P\{\mu(t)=2\} = \frac{1}{2p_0}P\{\mu(t)=1\}\big(p_1 - f'_\mu(P\{\mu(t)=0\})\big).$$

Отож, ми можемо виразити $P\{\mu(t)=2\}$ через $P\{\mu(t)=0\}$.

Аналогічно, можемо виразити $P\{\mu(t)=2\}$ через $P\{\mu(t)=0\}$. Перше рівняння твердження теореми виведено.

Переходимо до виведення другого диференціального рівняння. Очевидно, що (16) можна подати у вигляді.

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f_\xi\big(F_\mu(t,s)\big) + \widehat{f}_\zeta(s)F_\mu(t,s) - X(t,s),$$

де

$$\begin{gathered}
X(t,s) = q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + \big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\} + q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big) + \\
+\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\} + q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\} + q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big) + \ldots + \\
+\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\} + \ldots + q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big) - \big(s^{-m}q_{-m}P\{\mu(t)=0\} + \\
+s^{-m+1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=1\} + q_{-m+1}P\{\mu(t)=0\}\big) + s^{-m+2}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=2\} + \\
+q_{-m+1}P\{\mu(t)=1\} + q_{-m+2}P\{\mu(t)=0\}\big) + \ldots + s^{-1}\big(q_{-m}P\{\mu(t)=m-1\} + \\
+ \ldots + q_{-1}P\{\mu(t)=0\}\big)\big).
\end{gathered}$$

Як ми уже показали, що $P\{\mu(t)=2\}$ можна виразити через $P\{\mu(t)=0\}$. Тому можемо вважати, що

$$X(t,s) = \psi\big(P\{\mu(t)=0\}\big).$$

Підставляючи у (16) $s=0$, отримуємо рівняння для $F(t,0)$.

Теорема доведена. □

Список використаної літератури

1. Б. А. *Севастьянов Ветвящиеся процессы*, Наука, Москва, 1971.
2. І. Базилевич, Х. Якимишин, *Диференціальні рівняння для гіллястих процесів з неперервним часом та міграцією*, Вісник Львів. ун-ту. Серія Мех-мат. **82** (2016), 20–26.
3. І. Б. Базилевич, С. А. Алієв, Х. М. Якимишин, *Диференціальне рівняння для гіллястих процесів з міграцією та неперервним часом*, XXV Int. Conf. "Problem of decision making under uncertainties", May 11-15, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts, Kyiv, 2015. P. 62–63.

A DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE MATHEMATICAL EXPECTATION OF THE BRANCHING PROCESSES WITH MIGRATION AND CONTINUOUS TIME

Iryna BAZYLEVYCH, Khrystyna YAKYMYSHYN

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: I_ Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_ Hrystyna@ukr.net

In the paper the author study the branching processes with migration and continuous time. A differential equation of the mathematical expectation of a given process is constructed.

Key words: branching processes, continuous time, migration, mathematical expectation.

Стаття: надійшла до редколегії 15.06.2017
прийнята до друку 13.11.2017