ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 189–195
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 189–195

УДК 519.17

МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ, ЯКІ МІСТЯТЬ НЕ БІЛЬШЕ ОДНІЄЇ ОСНОВНОЇ ВЕРШИНИ

Маргарита ДУДЕНКО

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
вул. Григорія Сковороди, 2, 04655, Київ
e-mail: rita.dudenko@gmail.com

Мінімальна підмножина $M \subset V$ така, що для будь-якої пари вершин x, y графа G існує така вершина t з підмножини M, що виконується умова $d_G(t,x) \neq d_G(t,y)$, називається *метричним базисом.* Потужність цієї підмножини M називається *метричною розмірністю.* Як відомо, повне дослідження метричної розмірності графів є NP-повною проблемою. Ми вводимо конструкцію часткового обплетення уніциклічних графів, за допомогою якої охарактеризовано уніциклічні графи метричної розмірності 2, які мають не більше однієї основної вершини.

Ключові слова: метричний базис, метрична розмірність, уніциклічні графи.

1. Вступ. Поняття метричної розмірності ввели незалежно в 1975 р. Слатер в праці [1] та 1976 р. Харарі та Мелтером у [2]. Метрична розмірність та метричні генератори набули численних застосувань, серед яких фармацефтична хімія [3], робототехніка [4], пошук у мережах [5]. Властивості метричної розмірності вивчались також для графів з високим степенем симетрії (див. [6, 7]). У 1979 р. в праці [8] Гері та Джонсон довели, що повне дослідження метричної розмірності є NP-повною проблемою.

Протягом останніх десятиліть дослідженню метричної розмірності графів присвячено багато статей (див. [9, 10, 11]).

Один з напрямків досліджень — характеризація графів, які мають фіксовану метричну розмірність. У [3] 2000 р. доведено, що граф G має метричну розмірність 1 тоді і тільки тоді, коли він є ланцюгом, метрична розмірність дорівнює $n-1$ лише для повного графа та $n-2$ тоді і тільки тоді, коли граф — повний дводольний $K_{s,t}$.

У цій праці ми продовжимо дослідження, які розпочали раніше в [12] і [13], а саме, схарактеризуємо певні родини графів, що мають метричну розмірність 2. Зокрема, у праці [13] ми розглядали уніциклічні графи метричної розмірності 2, які мають дві основні вершини. Схарактеризуємо родини уніциклічних графів, які

2010 Mathematics Subject Classification: 05C12
© Дуденко М., 2017

мають метричну розмірність 2 та не містять вершин степеня строго більшого, ніж 3, без основних вершин або лише з однією основною вершиною. Розглядатимемо прості, неорієнтовні уніциклічні графи.

2. Необхідні теоретичні відомості.

Нехай $G = (V, E)$ – простий, скінченний, неорієнтовний граф з множиною вершин V, $|V| < \infty$ і множиною ребер E. За графом G однозначно визначається метричний простір (V, d_G), визначений на множині вершин V; метрика d_G між двома довільними вершинами v_1 і v_2 дорівнює 0, якщо $v_1 = v_2$ і довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини v_1 і v_2, якщо $v_1 \neq v_2$.

Означення 1. Для трійки вершин x, t, y з G говоритимемо, що вершина t *розділяє* вершини x і y, якщо $x = y$ або виконується така нерівність:

$$d_G(t, x) \neq d_G(t, y).$$

В більшості випадків під час дослідження метричної розмірності припускатимемо, що $x \neq y$.

Означення 2. Підмножина $M \subset V$ називається *метричним генератором* графа G, якщо для будь-якої пари вершин з V існує принаймні одна вершина $t \in M$, що їх розділяє. Метричний генератор графа G з мінімальною потужністю називається *метричним базисом*. Кількість вершин у метричному базисі називається *метричною розмірністю* графа G і позначається $\dim(G)$.

Нагадаємо, що степенем вершини $deg_G(v)$ називається кількість ребер, що їй інцидентні. *Листок* – вершина графа, яка має степінь 1. *Внутрішніми* називаються вершини, які мають степінь не менший, ніж 3. Внутрішня вершина *v близька до листка l*, якщо немає інших внутрішніх вершин, ближчих до цього листка, тобто немає інших внутрішніх вершин у найкоротшому шляху, що з'єднує v і l. Внутрішню вершину графа G називатимемо 2-*листковою*, якщо вона є близькою рівно до 2 листків та 1-*листковою*, якщо задана вершина є близькою лише до одного листка.

Означення 3. Простий граф називається *уніциклічним*, якщо він містить лише один цикл.

Нехай $G = (V, E)$ – уніциклічний граф та $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ його підграф, що є простим циклом.

Означення 4. Говоритимемо, що вершина $u \in V \setminus \hat{V}$ графа G *проектується* в вершину $w \in \hat{V}$, якщо для довільної вершини $q \in \hat{V}$ виконується нерівність

$$d_G(u, w) < d_G(u, q).$$

Вершини степеня 3 циклу, в які проектуються вершини степеня 3, що лежать поза циклом, називатимемо *основними*.

Теорема 1 ([12]). *Нехай $G = (V, E)$ – уніциклічний граф і $\dim(G) = 2$. Тоді існує не більше двох основних вершин, у кожну з яких може проектуватись лише одна 2-листкова вершина.*

Означення 5 ([13]). Уніциклічний граф G називається *парним*, якщо існує таке натуральне k, для якого $|\hat{V}| = 2k$, і *непарним*, якщо $|\hat{V}| = 2k + 1$.

Означення 6. Говоритимемо, що вершини u, v з циклу графа G є *майже симетричними*, якщо виконується одна з рівностей:

(1) $d_G(u, v) = k - 1$, якщо G — парний;
(2) $d_G(u, v) = k$, якщо G — непарний.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ – два прості графи. Зафіксуємо вершини v_1 і v_2 графів G_1 і G_2, відповідно. На множині вершин $V_1 \cup V_2$ введемо відношення еквівалентності: $u \sim w$ тоді і тільки тоді, якщо $u = v_1$ і $w = v_2$ або навпаки, $u = v_2$ і $w = v_1$. Граф $G = V_1 \cup V_2 / \sim\,, E_1 \cup E_2$ називатимемо *склеюванням* графів G_1 і G_2 по вершинах v_1 і v_2 (див. рис. 1).

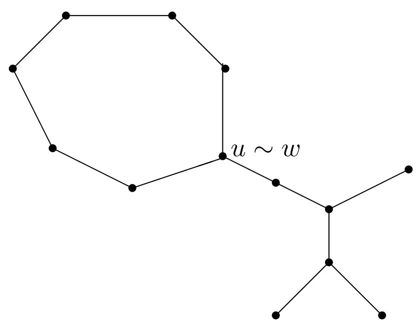

Рис. 1. Склеювання простого циклу та дерева

3. Основні результати.

У [13] введено конструкцію обплетення базисного графа, що містить дві основні вершини. Нагадаємо її.

Означення 7 ([13])**.** Нехай G_1 — базисний граф. Позначимо через u і v основні вершини графа G_1. Уніциклічний граф G називається *обплетенням* графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$ так, що кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга, а також для будь-якої 1-листкової вершини w та суміжної з нею вершини a виконується умова

$$d_G(u, v) + d_G(v, w) + 1 \neq d_G(u, a).$$

Це означення можна узагальнити для простіших конструкцій, зокрема обплетення циклу та уніциклічного графа, що містить лише одну основну вершину.

Означення 8. Уніциклічний граф G називається *частковим обплетенням* графа G_1, що є уніциклічним графом (або простим циклом), ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$, причому кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга.

Лема 1. *Нехай G – уніциклічний граф, що є частковим обплетенням простого циклу C_n ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. Тоді* $\dim(G) = 2$.

Доведення. Якщо уніциклічний граф G утворений частковим обплетенням простого циклу ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, то в G існуватиме принаймні одна 1-листкова вершина u. До базису візьмемо листок p, що проектується в u. Листок p та 1-листкова вершина u з'єднані ланцюгом, тому всі вершини, які розділяє p, будуть розділятись також вершиною u. Метрична розмірність простого циклу дорівнює 2 (див. [4]), тому в циклі обов'язково існуватиме хоча б одна пара вершин, яка не розділяється u, а відповідно, і p. Визначимо метричний базис графа G як множину вершин $\{u, v\}$, де v — вершина, що є майже симетричною в циклі з u. Вершини, які не розділятимуться вершиною u, будуть розділятись v. Оскільки з самого початку базису належав листок p, що проектується в u, то матимемо базис $\{p, v\}$. Якщо вершина v є 1-листковою, то існуватиме принаймні одна пара вершин t, w, яка не буде розділятись v та p. Тоді в базисі 1-листкову вершину v замінюємо листком l, що в неї проектується (див. рис. 2). Отже, $\dim(G) = 2$. □

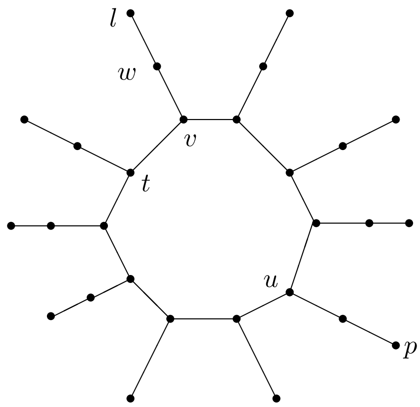

Рис. 2. Часткове обплетення циклу ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$

Нагадаємо, що *шляхом* в графі G називається послідовність вершин і ребер

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$$

така, що кожне ребро e_i інцидентне вершинам v_i та $v_i + 1$, $1 \leq i \leq n - 1$.

Для довільних двох вершин u, v з циклу графа G існує два шляхи в циклі, що з'єднують ці вершини. Позначимо їх P_1 і P_2, а їхні довжини — $d_G(P_1)(u, v)$ і $d_G(P_2)(u, v)$, відповідно.

Теорема 2. *Нехай G_1 — уніциклічний граф, який має лише одну основну вершину, а решта вершин циклу мають степінь 2. Припустимо, що уніциклічний граф G є частковим обплетенням уніциклічного графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. Тоді* $\dim(G) = 2$.

Доведення. З теореми 1 випливає, що метрична розмірність G_1 дорівнює 2. Доведемо, що метрична розмірність графа G теж дорівнює 2. Оскільки G містить одну основну вершину v, то для того, щоб розділити листки 2-листкової вершини w, що проектуються в v, до базису візьмемо один листок (для визначеності l). Вершини l і v з'єднані простим ланцюгом, тому всі вершини, що розділяє l, будуть розділятись v. Метрична розмірність G_1 дорівнює 2, тому в уніциклічному графі G існуватиме принаймні одна пара вершин p, q така, що $d_G(l,p) = d_G(l,q)$. Візьмемо в циклі вершину u, яка є майже симетричною з v, і додамо її до базису. За означенням майже симетричних вершин матимемо $d_G(P_1)(u,v) = d_G(P_2)(u,v) - 1$ або $d_G(P_1)(u,v) = d_G(P_2)(u,v) - 2$, причому за означенням метрики використовуємо найкоротшу відстань між вершинами графа. Це означає, що вершини, які не розділяє v, а відповідно і l, буде розділяти u. Оскільки G є частковим обплетенням уніциклічного графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, то вершина u може бути 1-листковою (див. рис. 3). У такому випадку існуватиме хоча б одна пара вершин (суміжних з u), що не розділяється вибраним базисом, тому замість вершини u в базис візьмемо листок k, що в неї проектується. Отже, $\dim(G) = 2$. □

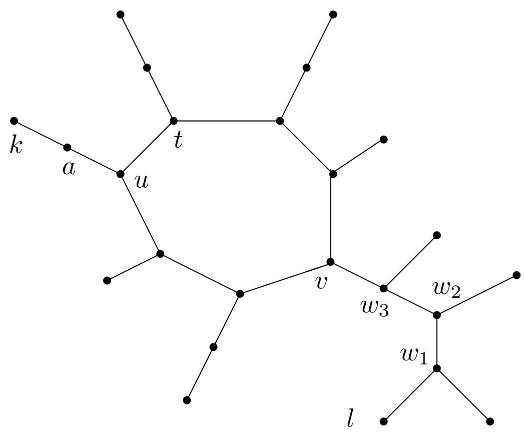

Рис. 3. Часткове обплетення уніциклічного графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$

Означення 9. Уніциклічний граф G, який містить лише одну основну вершину, а решта вершин циклу мають степінь 2, називатимемо *мінорним* графом.

Теорема 3. *Нехай G – уніциклічний граф, який містить не більше однієї основної вершини. Граф G має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли він є частковим обплетенням простого циклу C_n або частковим обплетенням мінорного графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$.*

Доведення. Нехай маємо уніциклічний граф G, який є частковим обплетенням мінорного графа G_1 або циклу C_n ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. За теоремою 2 та лемою 1 $\dim(G) = 2$.

Доведемо в інший бік. Нехай G – уніциклічний граф, який містить не більше однієї основної вершини і $\dim(G) = 2$. Якщо для всіх вершин v графа G, що лежать поза циклом $degv < 3$, то G є або циклом або частковим оплетенням циклу ланцюгами.

Якщо поза циклом існують вершини $w_1, \ldots, w_r$, для яких $\deg w_r = 3$, то з умови існування в графі G єдиної основної вершини випливає, що всі вершини $w_1, \ldots, w_r$ проектуються в єдину основну вершину v графа G (див. рис. 3). Отже, уніциклічний граф G є частковим оплетенням мінорного графа. □

Список використаної літератури

1. P. J. Slater, *Leaves of trees*, Congr. Numerantium **14** (1975), 549–559.
2. F. Harary and R. A. Melter, *On the metric dimension of a graph*, Ars Comb. **2** (1976), no. 2, 191–195.
3. G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math. **105** (2000), no. 1–3, 99–113.
4. S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, *Landmarks in graphs*, Discrete Appl. Math. **70** (1996), no. 3, 217—229.
5. Z. Beerliova, F. Eberhard, and T. Erlebach, *Network discovery and verification*, IEEE J. Sel. Areas Commun. **24** (2006), no. 12, 2168–2181.
6. R. F. Bailey and P. J. Cameron, *Base cize, metric dimension and other invariants of groups and graphs*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), no. 2, 209–242.
7. M. Fehr, S. Gosselin, and O. R. Oellermann, *The metric dimension of Ceyley disgraphs*, Discrete Math. **306** (2006), no. 1, 31–41.
8. M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, New York, 1979.
9. A. Juan, J. A. Rodriguez-Valazquez, and C. G. Gomez, *Computing the local metric dimension of a graph from the local metric dimension of primary subgraphs*, Int. J. Comput. Math. **92** (2015), no. 4, 686–693.
10. M. I. Ostrovskii and D. Rosenthal, *Metric dimension of minor excluded graphs and minor exclusion in groups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 4, 541–554.
11. M. Jannesari and B. Omoomi, *The metric dimension of lexicographic product of graphs*, Discrete Math. **312** (2012), no. 22, 3349–3356.
12. М. А. Дуденко, *Уніциклічні графи метричної розмірності 2*, Наукові записки НаУКМА **165** (2015), 7–10.
13. M. Dudenko and B. Oliynyk, *On unicyclic graphs of metric dimension 2*, Algebra Discrete Math. **23** (2017), no. 2 , 216–222.

Стаття: надійшла до редколегії 16.09.2017
доопрацьована 07.11.2017
прийнята до друку 13.11.2017

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83

METRIC DIMENSION OF UNICYCLIC GRAPHS WITH AT MOST ONE MAIN VERTEX

Marharyta DUDENKO

National University of Kyiv-Mohyla Academy
2, Scovoroda Str., 04655, Kyiv, Ukraine
e-mail: rita.dudenko@gmail.com

A minimum subset $M \subset V$ is called metric basis if and only if for any pair of different vertices x, y from G there exists vertex $t \in M$ such that $d_G(t,x) \neq d_G(t,y)$. A cardinality of M is called metric dimension of graph G. It is well known that the problem of finding the metric dimension of a graph is NP-Hard. In the paper we present the construction of a partial knitting unicyclic graph. Using this construction all unicyclic graphs with no more than one main vertex and metric dimension 2 are characterized.

Key words: metric basis, metric dimension, unicyclic graph.