ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 123–138
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 123–138

УДК 517.912

ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛОКАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ЇЇ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Микола СЄРОВ, Марія СЄРОВА,
Олександр ОМЕЛЯН, Юлія ПРИСТАВКА

Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка
Першотравневий проспект, 24, 36011, Полтава
e-mail: yuliaprystavka@rambler.ru

Побудовано нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. Ці перетворення використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків цієї системи.

Ключові слова: система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, симетрія, метод Лі, інваріантність, максимальна алгебра інваріантності, лінеаризація, нелокальна заміна, система рівнянь Ван-дер-Ваальса, інваріантний анзац, редукція, точні розв'язки.

1. Вступ. Одна з центральних проблем сучасного теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь — розроблення ефективних алгоритмів побудови широких класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними та їхніх систем. Один із методів знаходження точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь — метод Софуса Лі, над застосуванням та розвитком якого працювало багато сучасних математиків, зокрема, представників київської школи групового аналізу, яку очолював В. І. Фущич.

Із часом стала очевидна обмеженість можливостей класичного методу С. Лі для побудови класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики. Адже кількість розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними, які вдається побудувати за допомогою класичного алгоритму Лі, обмежена кількістю операторів ліївської симетрії.

Один з напрямів подолання цієї обмеженості класичного методу С. Лі — пошук можливості знаходження нових (неліївських) симетрій, які дають змогу будувати ширші класи розв'язків рівнянь, що досліджуються. Результатом пошуку в цьому напрямі стали праці українських математиків під керівництвом В. І. Фущича (див.,

2010 Mathematics Subject Classification: 35B06, 35K57

наприклад, [8]–[10]). У цих працях для розширення класів симетрій рівнянь математичної фізики застосовано нелокальні перетворення. Раніше, в 1979 р., ці нелокальні перетворення застосував Г. Розен до лінеаризації нелінійного рівняння дифузії $u_t = \partial_x(u^{-2}u_x)$ до лінійного $z_0 = z_{11}$ (див. [14]).

У праці [11] Дж. Блуман, Г. Рід і С. Кумей вперше розглянули нелокальні перетворення еквівалентності у класі рівнянь

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \tag{1}$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ – довільна гладка функція.

У 1990 р. Дж. Кінг в [13] нелокальні перетворення узагальнив і показав, що за допомогою цих перетворень нелінійне рівняння дифузії зводиться до рівняння того самого класу. У [12] нелокальні перетворення еквівалентності використані для побудови нелокальних анзаців, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь, лінеаризації рівняння (1), побудови нелокальних формул розмноження його розв'язків.

У працях [6, 7] поставлена та розв'язана задача узагальнення результатів праць [12, 13] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії

$$U_t = \partial_x[f(U)U_x], \tag{2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $f(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

У нещодавніх працях [16, 17] нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x + g(u)], \tag{3}$$

де $g(u)$ – довільна гладка функція.

Ми сукупність нелокальних перетворень використаємо для: лінеаризації, побудови нелокальних анзаців, побудови нелокальних формул розмноження розв'язків для системи рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x\left[F(U)U_x + G(U)\right], \tag{4}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a\,(t,\ x)$, t – часова змінна, x – просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}\,(U)$, $g^a = g^a\,(U)$ – коефіцієнти дифузії та конвекції, відповідно, $a, b = \overline{1,2}$.

2. Нелокальні перетворення системи конвекції-дифузії. Розглянемо сукупність трьох перетворень (див. [7])

$$t = t,\ x = x,\ u^a = v^a_x, \tag{5}$$

де $v^a = v^a(t,\ x)$ – нові невідомі функції,

$$t = x_0,\ x = w^1,\ v^1 = x_1,\ v^2 = w^2, \tag{6}$$

де $x_0,\ x_1$ – нові незалежні змінні, $w^a = w^a\,(x_0,\ x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0,\ x_1 = x_1,\ w^a_1 = z^a, \tag{7}$$

$z^a = z^a\,(x_0,\ x_1)$ – нові залежні змінні.

Теорема 1. *Перетворення* (5)—(7) *є перетвореннями еквівалентності системи* (4).

Доведення. Застосуємо до системи (4) нелокальну заміну вигляду (5) (див., наприклад, [13]). Підставимо (5) в (4) і проінтегруємо одержану систему за змінною x, отримаємо

$$U_t = F(V_x)V_{xx} + G(V_x), \tag{8}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (8) застосувати перетворення годографа (6), то ця система зведеться до вигляду

$$\begin{aligned} w_0^1 &= \frac{1}{(w_1^1)^2}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_{11}^1 - w_1^1 f^{12} w_{11}^2] - w_1^2 g^1, \\ w_0^2 &= \frac{1}{(w_1^1)^3}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_1^2 - (f^{12} + w_1^2 f^{22}]w_{11}^1 + \\ &+ \frac{1}{(w_1^1)^2}(f^{22} + w_1^2 f^{12})w_{11}^2 - w_1^2 g^1 + g^2, \end{aligned} \tag{9}$$

де $w_\mu^a = \frac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \frac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = \overline{0,1}$, причому у формулах (9) $f^{ab} = f^{ab}\left(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}\right)$, $g^a = g^a\left(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}\right)$, $a, b = \overline{1,2}$.

Продиференціємо систему (9) за змінною x_1 та подіємо перетвореннями (7), одержимо таку систему

$$Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{10}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z)$, $\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, $\psi^a = \psi^a(Z)$, $\mu = \overline{0,1}$, причому функції φ^{ab}, ψ^a пов'язані з функціями f^{ab}, g^a такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &\varphi^{11} = (z^1)^{-2}(f^{11} + z^2 f^{12}), \\ &\varphi^{12} = -(z^1)^{-1} f^{12}, \\ &\varphi^{12} = (z^1)^{-3}[(f^{11} + z^2 f^{12})z^2 - (f^{21} + z^2 f^{22})], \\ &\varphi^{22} = (z^1)^{-2}(f^{22} + z^2 f^{12}), \\ &\psi^1 = -z^1 g^1, \\ &\psi^2 = -z^2 g^1 + g^2, \end{aligned} \tag{11}$$

де $f^{ab} = f^{ab}\left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\right)$, $g^a = g^a\left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\right)$.

Отож, ми довели, що ланцюжок замін (5)—(7) зводить систему (4) до системи рівнянь того самого класу вигляду (10). Не важко переконатися, що система (10) за допомогою зазначених замін зводиться до системи (4). Теорема 1 доведена. □

3. Лінеаризація системи (4)**.** Якщо припустити, що система (4) лінійна, тобто $F(U) = \Lambda$, $G(U) = \Gamma(U)$, де $\Lambda = (\lambda_{ab})$, $\Gamma = (\gamma_{ac})$ – стала матриця, то, використавши формули (11), одержимо систему

$$
\begin{aligned}
z^1_0 &= \partial_1\left[\frac{\lambda_{11}+\lambda_{12}z^2}{(z^1)^2}z^1_1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1}z^2_1 - \gamma_{12}z^2\right],\\
z^2_0 &= \partial_1\left[\frac{z^2(\lambda_{11}+\lambda_{12}z^2)-(\lambda_{21}+\lambda_{22}z^2)}{(z^1)^3}z^1_1+\right.\\
&\left.+\frac{\lambda_{22}-\lambda_{12}z^2}{(z^1)^2}z^2_1+\frac{1}{z^1}(\gamma_{21}+(\gamma_{22}-\gamma_{11})z^2-\gamma_{12}(z^2)^2)\right],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

яка за допомогою перетворень (5)-(7) зводиться до лінійної системи вигляду

$$U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x, \tag{13}$$

і навпаки.

4. Симетрійні властивості системи (13) **та її образу.**

Лема 1. *Перетворення вигляду*

$$U = AW + B, \tag{14}$$

де $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_{ab}, \beta_a \in R$, *є перетвореннями еквівалентності системи* (4).

Зауваження 1. Наступні твердження про симетрійні властивості систем рівнянь конвекції-дифузії (12), (13) формулюватимемо з точністю до перетворень еквівалентності (14).

Теорема 2. *У залежності від вигляду матриць* Λ *та* Γ *максимальна алгебра інваріантності системи* (13) *задається такими операторами:*

1) *при* Λ, Γ *– довільних основною алгеброю симетрії є алгебра,*

$$A_0 = \langle \partial_t, \partial_x, Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

2) *при*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$,

$$A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + (x+\gamma_2 t)Q_2, Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1},$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}, D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda_1 + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + (\lambda_2 + \gamma_2(x+\gamma_2 t))Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \left[\lambda_1 t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2\right]Q_1 + \left[\lambda_2 t + \frac{1}{2}(x+\gamma_2 t)^2\right]Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

3) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$, *де* $\gamma_1 \neq \gamma_2$,

$$A_2 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + (x+\gamma_2 t)Q_2, Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}u^1\partial_{u^1}, Q_2 = -\frac{1}{2\lambda}u^2\partial_{u^2},$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + (\lambda + \gamma_2(x+\gamma_2 t))Q_2,$$
$$Q_3 = e^{\frac{\gamma_2^2-\gamma_1^2}{4\lambda}t + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2\lambda}x}u^2\partial_{u^1}, Q_4 = e^{\frac{\gamma_1^2-\gamma_2^2}{4\lambda}t + \frac{\gamma_1-\gamma_2}{2\lambda}x}u^1\partial_{u^2},$$
$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2]Q_1 + [\lambda t + \frac{1}{2}(x+\gamma_2 t)^2]Q_2,$$
$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

4) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ m\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$,

$$A_3 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + m\gamma_1 tQ_2,$$
$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), Q_2 = -\frac{1}{2\lambda}u^1\partial_{u^2},$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + m\gamma_1 xQ_2,$$
$$Q_3 = u^1\partial_{u^1} + m\gamma_1(x+\gamma_1 t)Q_2, Q_4 = m\gamma_1(x+\gamma_1 t)[Q_3 - u^2\partial_{u^2}] + u^2\partial_{u^1},$$
$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2]Q_1 + m\gamma_1 txQ_2,$$
$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

5) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$,

$$A_4 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\alpha t)Q_1 + \beta tQ_2,$$
$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), Q_2 = \frac{1}{2\lambda}(u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2}),$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \alpha x + (\alpha^2 - \beta^2)t)Q_1 + \beta(x + 2\alpha t)Q_2,$$
$$Q_3 = \cos\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}) - \sin\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}),$$
$$Q_4 = \sin\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}) + \cos\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}),$$
$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)t^2 + \alpha tx + \frac{1}{2}x^2 + \lambda t]Q_1 + \beta t(x+\alpha t)Q_2,$$
$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle;$$

6) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$,

$$A_5 = \langle A_0, Q_2 = e^{\frac{\gamma_{11}-\gamma_{22}}{4\lambda}(2x + (\gamma_{11}+\gamma_{22})t)}u^1\partial_{u^2}\rangle;$$

7) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$,

$$A_6 = \langle A_5, D = 2t\partial_t - \frac{1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t)Q + \frac{2k\lambda}{\gamma_2 - \gamma_1}u^1\partial_{u^2}\rangle;$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83

8) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}$,

$$A_7 = \langle A_0, G = t\partial_x - \frac{1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t)Q + \frac{1}{2\lambda}(k(x+\gamma_1 t) - \gamma_2 t)Q_2, Q_2 = u^1\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - [\frac{\gamma_1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t) + \frac{1}{2}]Q + (\frac{k\gamma_1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t) - \frac{\gamma_2}{2\lambda}(x+2\gamma_1 t))Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4\lambda}[(x+\gamma_1 t)^2 + 2\lambda t]Q + \frac{1}{4\lambda}[k(x+\gamma_1 t)^2 - 2\gamma_2 t(x+\gamma_1 t)]Q_2\rangle;$$

9) *при* $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}$,

$$A_8 = \langle A_0, G = t\partial_x - \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}(\alpha(x+\gamma_1 t) - \beta\gamma_2 t)Q - \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}(\beta(x+\gamma_1 t) + \alpha\gamma_2 t)Q_2,$$

$$Q_2 = u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}((\beta\gamma_2 - \alpha\gamma_1)x + (\alpha(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) + 2\beta\gamma_1\gamma_2)t - (\alpha^2+\beta^2))Q-$$

$$-\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}((\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_1)x - (\beta(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - 2\alpha\gamma_1\gamma_2)t)Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{1}{4(\alpha^2+\beta^2)}(2(\beta\gamma_2 - \alpha\gamma_1)tx + (\alpha(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) + 2\beta\gamma_1\gamma_2)t^2$$

$$-\alpha x^2 - 2(\alpha^2+\beta^2)t)Q - \frac{1}{4(\alpha^2+\beta^2)}(2(\alpha\gamma_2 + \beta\gamma_1)tx - (\beta(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - 2\alpha\gamma_1\gamma_2)t^2 + \beta x^2)Q_2, \rangle,$$

причому для β^a *виконуються рівності* $L\beta = 0$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \end{pmatrix}$, $L = \partial_t - \Lambda\partial_{xx} - \Gamma\partial_x$.

Образом системи

$$U_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_{xx} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} U_x, \tag{16}$$

внаслідок перетворень (5)—(7) є система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1[\lambda_1 \tfrac{z_1^1}{(z^1)^2}], \\ z_0^2 &= \partial_1[\tfrac{(\lambda_1-\lambda_2)}{(z^1)^3} z^2 z_1^1 + \tfrac{\lambda_2}{(z^1)^2} z_1^2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\tfrac{z^2}{z^1}]. \end{aligned} \tag{17}$$

Для того, щоб порівняти лiївськi симетрiї системи (16)—(17), дослiдимо максимальну алгебру iнварiантностi системи (17). Виконується наступне твердження.

Теорема 3. *Максимальною алгеброю iнварiантностi системи* (17) *є така алгебра*

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1}, \quad z^1\partial_{z^2}, \quad z^2\partial_{z^2}\rangle. \tag{18}$$

Теорему 3 доводимо стандартним методом Лі (див., наприклад, [1, 3]).

З теореми 2 випливає, що максимальна алгебра інваріантності системи (17) містить меншу кількість ліївських операторів, ніж максимальна алгебра інваріантності системи (16). Використаємо цей факт для знаходження додаткових (неліївських) анзаців системи (17).

5. Ліївські анзаци системи (13) **та** (17)**.** Використаємо ліївську симетрію системи (16) для побудови її інваріантних анзаців.

Розв'язок системи (16) шукатимемо у вигляді

$$U = A(t,x)\varphi(\omega), \tag{19}$$

де $A(t,x) = (\alpha^{ab})$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$, $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t,x)$, $\omega = \omega(t,x)$ – деякі гладкі функції, які знаходимо після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = d\tau, \tag{20}$$

$\varphi^a(\omega)$ – нові невідомі функції.

Максимальною алгеброю інваріантності системи (13), (17) є алгебра A_1. Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри визначаються формулами

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = c_1t^2 + 2c_2t + c_4,\\
&\xi^1 = c_1tx + c_3t + c_2x + c_5,\\
&\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}\Big[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_1t)^2{+}2\lambda_1t) + c_2(\gamma_1(x+\gamma_1t)+\lambda_1) + c_3(x+\gamma_1t) + c_6\Big]u^1{+}\beta^1(t,x),\\
&\eta^2 = -\frac{1}{2\lambda_2}\Big[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_2t)^2{+}2\lambda_2t) + c_2(\gamma_2(x+\gamma_2t)+\lambda_2) + c_3(x+\gamma_2t) + c_7\Big]u^2{+}\beta^2(t,x),
\end{aligned}$$

де $c_1,\ldots,c_7$ – групові параметри. Система (20) має вигляд

$$\begin{aligned}
&\dot t = c_1t^2 + 2c_2t + c_4,\\
&\dot x = c_1tx + c_3t + c_2x + c_5,\\
&\dot u^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}\Big[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_1t)^2 + 2\lambda_1t) + c_2(\gamma_1(x+\gamma_1t)+\lambda_1) + c_3(x+\gamma_1t) + c_6\Big]u^1,\\
&\dot u^2 = -\frac{1}{2\lambda_2}\Big[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_2t)^2 + 2\lambda_2t) + c_2(\gamma_2(x+\gamma_2t)+\lambda_2) + c_3(x+\gamma_2t) + c_7\Big]u^2,
\end{aligned} \tag{21}$$

де $c_1,\ldots,c_7$ – довільні числові параметри. Проінтегруємо систему (21) методом, який викладений, наприклад, у [4, 7], наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються у підсумку.

$$\begin{aligned}
&u^1 = e^{k_1t}\varphi^1(\omega),\\
&u^2 = e^{k_2t}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = k_3t + x;
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&u^1 = e^{\frac{k}{2\lambda_1}t(x+\frac{1}{3}kt^2+\frac{\gamma_1}{2}t+k_1)}\varphi^1(\omega),\\
&u^2 = e^{\frac{k}{2\lambda_2}t(x+\frac{1}{3}kt^2+\frac{\gamma_2}{2}t+k_2)}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = \tfrac{1}{2}kt^2 + x;
\end{aligned} \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = t^{k_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x+\frac{\gamma_1}{2}t)}\varphi^1(\omega),\\
&u^2 = t^{k_2} e^{-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}(x+\frac{\gamma_2}{2}t)}\varphi^2(\omega);\\
&\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = e^{-\frac{1}{4\lambda_1}[\gamma_1(2x+\gamma_1 t)+tx^2(t^2+1)^{-1}]-k_1 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega),\\
&u^2 = e^{-\frac{1}{4\lambda_2}[\gamma_2(2x+\gamma_2 t)+tx^2(t^2+1)^{-1}]-k_2 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

де k, k_1, k_2, k_3, k_4 – довільні сталі, які виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_7$.

Використаємо ліївську симетрію системи (17) для побудови інваріантних анзаців цієї системи.

Максимальною алгеброю інваріантності системи (17) є алгебра (18). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = c_1, \xi^1 = c_3 x_1 + c_2,\\
&\eta^1 = -c_3 z^1,\\
&\eta^2 = c_4 z^1 + c_5 z^2,
\end{aligned}
$$

де $c_1, \ldots, c_5$ – групові параметри. Система (20) має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_0 = c_1,\\
&\dot{x}_1 = c_3 x_1 + c_2,\\
&\dot{z}^1 = -c_3 z^1,\\
&\dot{z}^2 = c_4 z^1 + c_5 z^2.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (26), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті.

$$
\begin{aligned}
&z^1 = e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega),\\
&z^2 = k_2 e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega),\\
&\omega = x_1 e^{k_1 x_0};
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&z^1 = e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega),\\
&z^2 = \frac{k_1}{k_1 - m} e^{k_1 x_0}\varphi^1(\omega) + e^{m x_0}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = x_1 e^{k_1 x_0};
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
&z^1 = \varphi^1(\omega),\\
&z^2 = k_2 x_0 \varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega),\\
&\omega = x_1 + k_1 x_0;
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&z^1 = \varphi^1(\omega),\\
&z^2 = e^{k_2 x_0}\varphi^2(\omega),\\
&\omega = x_1 + k_1 x_0,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

де k_1, k_2, m – довільні сталі, які виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_5$.

6. Нелокальні анзаци системи (17)**.** Раніше довели, що лінійна система (16), інваріантна відносно алгебри $AG_2(1;1)$, під дією композиції нелокальних перетворень (5)-(7) переходить у систему (17), яка неінваріантна відносно операторів G, Π.

Неінваріантність системи (17) відносно алгебри $AG_2(1;1)$ звужує множину інваріантних анзаців цієї системи порівняно із системою (16), за допомогою яких можна було б звести (17) до системи звичайних диференціальних рівнянь і в подальшому побудувати точні розв'язки цієї системи.

Для відшукання додаткових неліївських анзаців системи (17) подіємо композицією нелокальних перетворень (5)-(7) на уже знайдені анзаци системи (16). Проілюструємо процес одержання неліївських анзаців на прикладі перетворення анзацу (25), який отримали з умови інваріантності цієї системи відносно оператора $X = \prod + \partial_t$.

Подіявши спочатку на формули (25) перетворенням (5), одержуємо:

$$\begin{aligned} v_x^1 &= e^{-\frac{\gamma_1}{4\lambda_1}(2x+\gamma_1 t)-\frac{tx^2}{4\lambda_1(t^2+1)}-k_1 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega),\\ v_x^2 &= e^{-\frac{\gamma_2}{4\lambda_2}(2x+\gamma_2 t)-\frac{tx^2}{4\lambda_2(t^2+1)}-k_2 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^2(\omega),\\ \omega &= x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Під дією перетворень годографа (6) анзац набуває вигляду

$$\begin{aligned} w_1^1 &= e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1x_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\ w_1^2 &= e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)x_0}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\ \omega &= (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}w^1. \end{aligned} \tag{31}$$

Після дії перетворення (7) на цей анзац, остаточно одержуємо

$$\begin{aligned} z^1 &= e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1x_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\ z^2 &= e^{(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{2\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)x_0}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\ \omega &= (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau, \end{aligned} \tag{32}$$

де $\tau = \int z^1 dx_1$.

Аналогічно одержуємо образи ліївських анзаців (22)—(24) системи (16). Не вдаючись у деталі їхнього знаходження, наведемо остаточні результати.

Нелокальні анзаци для системи (17)

$$\begin{aligned} z^1 &= e^{-\frac{k}{2\lambda_1}x_0(\tau+\frac{1}{3}kx_0^2+\frac{\gamma_1}{2}x_0+k_1)}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\ z^2 &= e^{(\frac{1}{2\lambda_2}-\frac{1}{2\lambda_1})kx_0(\tau+\frac{1}{3}kx_0^2)+\frac{k}{2}x_0[(\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1})x_0+\frac{k_2}{\lambda_2}-\frac{k_1}{\lambda_1}]}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\ \omega &= (\tfrac{1}{2}kx_0^2+\tau); \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} z^1 &= x_0^{-k_1}e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(\tau+\frac{\gamma_1}{2}x_0)}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\ z^2 &= x_0^{k_2-k_1}e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})\tau+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0)}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\ \omega &= x_0^{-\frac{1}{2}}\tau; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} z^1 &= e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1x_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},\\ z^2 &= e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)x_0}(\varphi^1(\omega))^{-1}\varphi^2(\omega),\\ \omega &= (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau, \end{aligned} \tag{35}$$

де $\tau = \int z^1 dx_1$.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83

7. Нелокальна редукція системи (17).

Для знаходження невідомих функцій φ^1, φ^2, необхідно одержані вище нелокальні анзаци підставити у систему (17). У підсумку отримаємо, відповідно, такі редуковані системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \gamma_1\dot{\varphi}^1 + \frac{k}{2\lambda_1}(\omega + k_1)\varphi^1 = 0,\\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \gamma_2\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{2\lambda_2}(\omega + k_2)\varphi^2 = 0; \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \tfrac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1 - k_1\varphi^1 = 0,\\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 - k_2\varphi^2 = 0; \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \Big(\frac{\omega^2}{4\lambda_1^2} + \frac{k_1}{\lambda_1}\Big)\varphi^1 = 0,\\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \Big(\frac{\omega^2}{4\lambda_2^2} + \frac{k_2}{\lambda_2}\Big)\varphi^2 = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Нелокальні анзаци (33)—(35) для системи (17) не можливо одержати в рамках теорії С. Лі. Анзаци (33)—(35) редукують систему (17) до систем звичайних диференціальних рівнянь (36)—(38), відповідно.

8. Побудова нелокальних формул розмноження розв'язків для нелінійної системи (17).

Система (16), на відміну від системи (17), інваріантна відносно оператора

$$G = t\partial_x + (x + \gamma_1 t)Q_1 + (x + \gamma_2 t)Q_2,$$

де $Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}$, $Q_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}$.

Неважко переконатися (див., наприклад, [1]), що оператор

$$G = t\partial_x + (x + \gamma_1 t)Q_1 + (x + \gamma_2 t)Q_2$$

породжує перетворення

$$\begin{aligned} &\overset{1}{t} = \overset{2}{t},\\ &\overset{1}{x} = \overset{2}{x} + \theta\,\overset{2}{t},\\ &\overset{1}{u^1}(\overset{1}{t};\overset{1}{x}) = \overset{2}{u^1}(\overset{2}{t};\overset{2}{x})e^{-\frac{\theta}{2\lambda_1}((\frac{\theta}{2}+\gamma_1)\overset{2}{t} + \overset{2}{x})},\\ &\overset{1}{u^2}(\overset{1}{t};\overset{1}{x}) = \overset{2}{u^2}(\overset{2}{t};\overset{2}{x})e^{-\frac{\theta}{2\lambda_2}((\frac{\theta}{2}+\gamma_2)\overset{2}{t} + \overset{2}{x})}. \end{aligned} \tag{39}$$

Нехай, $\overset{2}{u^1} = u^1(\overset{2}{t};\overset{2}{x}); \overset{2}{u^2} = u^2(\overset{2}{t};\overset{2}{x})$ – деякий гладкий розв'язок системи

$$\overset{2}{U}_{\overset{2}{t}} = \Lambda\,\overset{2}{U}_{\overset{2}{x}\overset{2}{x}} + \Gamma\,\overset{2}{U}_{\overset{2}{x}}, \tag{40}$$

де Λ, Γ задані у вигляді (15). Нехай дія оператора G перетворює цей розв'язок системи (40) в такий розв'язок $\overset{1}{u^1} = u^1(\overset{1}{t};\overset{1}{x})$; $\overset{1}{u^2} = u^2(\overset{1}{t};\overset{1}{x})$ системи

$$\overset{1}{U}_{\overset{1}{t}} = \Lambda\,\overset{1}{U}_{\overset{1}{x}\overset{1}{x}} + \Gamma\,\overset{1}{U}_{\overset{1}{x}}\,.$$

Позначимо $\overset{1}{t} = \overset{2}{t} = t, \overset{2}{x} = x, \theta = a$. Тоді запишемо ліївські формули розмноження розв'язків

$$\begin{aligned} &\overset{2}{u}{}^1(t;x) = \overset{1}{u}{}^1(t;at+x)e^{\frac{a}{2\lambda_1}((\frac{a}{2}+\gamma_1)t+x)}, \\ &\overset{2}{u}{}^2(t;x) = \overset{1}{u}{}^2(t;at+x)e^{\frac{a}{2\lambda_2}((\frac{a}{2}+\gamma_2)t+x)}, \\ &\overset{2}{x} = \overset{1}{x} - at. \end{aligned} \tag{41}$$

Для побудови нелокальних формул розмноження розв'язків системи (17) подіємо на ліївські формули розмноження розв'язків нелокальними перетвореннями (6), (7). (Використовуємо той факт, що для лінеаризації системи (17) достатньо лише перетворень (6), (7)).

Для дії на формули (41) перетворення (6) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &t=t, \quad \overset{1}{x} = \overset{1}{v}{}^1(t,\tau), \quad \overset{1}{u}{}^1(t,\overset{1}{x}) = \tau, \quad \overset{1}{u}{}^2(t,\overset{1}{x}) = \overset{1}{v}{}^2(t,\tau), \\ &t=t, \quad \overset{2}{x} = \overset{2}{v}{}^1(t,y), \quad \overset{2}{u}{}^1(t,\overset{2}{x}) = y, \quad \overset{2}{u}{}^2(t,\overset{2}{x}) = \overset{2}{v}{}^2(t,y), \end{aligned} \tag{42}$$

Подіявши перетвореннями (42) на формули (41) та продиференціювавши одержаний результат за змінною y, отримуємо

$$\begin{aligned} &\overset{2}{v}{}^1_y(t;y) = \tau_y \overset{1}{v}{}^1_\tau(t;\tau), \\ &\overset{2}{v}{}^2_y(t;y) = (\tfrac{y}{\tau})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} e^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2\lambda_2}at}\tau_y \left[\overset{1}{v}{}^2_\tau(t;\tau) + \tfrac{a}{2\lambda_2}\overset{1}{v}{}^2(t;\tau)\overset{1}{v}{}^1_\tau(t;\tau)\right], \\ &\tau_y = \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2\lambda_1}\overset{1}{v}{}^1_\tau(t;\tau))}. \end{aligned} \tag{43}$$

Щоб подіяти на формули (43) перетворення (7) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &t=t, \quad \tau=\tau(t;y), \quad \overset{1}{v}{}^1_\tau(t,\tau) = \overset{1}{z}{}^1(t;\tau), \quad \overset{1}{v}{}^2_\tau(t,\tau) = \overset{1}{z}{}^2(t,\tau), \\ &t=t, \quad y=y, \quad \overset{2}{v}{}^1_y(t,y) = \overset{2}{z}{}^1(t;y), \quad \overset{2}{v}{}^2_y(t,y) = \overset{2}{z}{}^2(t,y). \end{aligned} \tag{44}$$

Подіявши перетвореннями (44) на формули (43), одержуємо

$$\begin{aligned} &\overset{2}{z}{}^1(t;y) = \frac{\overset{1}{z}{}^1(t;\tau)}{y(\tau^{-1}+\frac{a}{2\lambda_1}\overset{1}{z}{}^1(t;\tau))}, \\ &\overset{2}{z}{}^2(t;y) = (\tfrac{y}{\tau})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1} e^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2\lambda_2}at} \frac{\tau\,\overset{1}{z}{}^2(t;\tau) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int \overset{1}{z}{}^2(t;\tau)d\tau}{\tau^2[\tau^{-1}+\frac{a}{2\lambda_1}\overset{1}{z}{}^1(t;\tau)]} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\tau^{-1}\int \overset{1}{z}{}^2(t;\tau)d\tau, \\ &\tau_y = \frac{1}{y(\tau^{-1}+\frac{a}{2\lambda_1}\overset{1}{z}{}^1(t;\tau))}, \qquad \tau_t = \lambda_1(\overset{1}{z}{}^1)^{-2}\tau_y^{-2}\tau_{yy} + \frac{a}{\overset{1}{z}{}^1}. \end{aligned} \tag{45}$$

Зауважимо, що останнє рівняння у формулах (45) одержуємо внаслідок підстановки перших 3-х рівнянь (45) у систему рівнянь (16) при Λ, Γ вигляду (15).

9. Симетрійні властивості образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Розглянемо систему рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$
\begin{aligned}
u^1_t &= \lambda_1 u^1_{xx} - u^1 u^1_x + \mu u^2 u^2_x,\\
u^2_t &= \lambda_2 u^2_{xx} - u^1 u^2_x - u^2 u^1_x,
\end{aligned} \tag{46}
$$

де $x = (x_0,\, x_1)$, $u^a = u^a\,(x)$, λ_1 – коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 – коефіцієнт дифузії, μ – коефіцієнт конвекції, $a \in \{1,2\}$; яку широко використовують у молекулярно-кінетичній теорії газів і рідин. Ця система входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії.

У [5] доведено, що система (46) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$$AG(1,1) = \left\langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + \partial_{u^1}, D = 2t\partial_t + x\partial_x - I, \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + tI + x\partial_{u^1} \right\rangle,$$

де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}$, $\partial_{u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}$, $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$.

Якщо ж провести повний аналіз її симетричних властивостей, то одержимо таке твердження.

Теорема 4. *Максимальною алгеброю інваріантності системи* (46) *залежно від співвідношень між сталими є такі алгебри*

1) $AG(1,1)$, *якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu \neq 0$;
2) $\left\langle AG(1,1), u^2\partial_{u^2} \right\rangle$, *якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu = 0$;
3) $\left\langle AG(1,1), u^1\partial_{u^1} \right\rangle$, *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0$;
4) $\left\langle AG(1,1), u^2\partial_{u^1}, u^2\partial_{u^2} \right\rangle$, *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \mu = 0$.

Якщо до системи (46) застосувати перетворення (5)—(7), то одержимо таку систему:

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{(z^1)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\, z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \frac{1}{2\,(z^1)^2} \begin{pmatrix} \left(\mu\,(z^1)^2 - 1\right) z^1 \\ \left(\mu\,(z^2)^2 + 1\right) z^2 \end{pmatrix} \right], \tag{47}$$

яку назвемо *образом системи* (46).

Для того, щоб порівняти лївські симетрії систем (46) та (47), дослідимо максимальну алгебру інваріантності системи (47). Виконується наступне твердження.

Теорема 5. *Максимальною алгеброю інваріантності системи* (47) *є алгебра*

1) $A^{bas} = \left\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + z^1\partial_{z^1} \right\rangle$, *якщо* $\mu \neq 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$;
2) $A = \left\langle A^{bas}, z^2\partial_{z^2} \right\rangle$, *якщо* $\mu = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$;
3) $A = \left\langle A^{bas}, z^2\partial_{z^2}, e^{\frac{x_1^1}{2}}\partial_{z^2} \right\rangle$, *якщо* $\mu = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, *де* $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\partial_{z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}$.

Теорема доводиться стандартним методом Лі (див. наприклад [2, 3]).

Зауважимо, що система Ван-дер-Ваальса має значно ширші ліїївські симетрії, ніж система (47). Використаємо цей факт для знаходження нелокальних анзаців і побудови розв'язків системи (47).

10. Ліївські анзаци системи Ван-дер-Ваальса та її образу. Використаємо ліївську симетрію системи (47) для побудови інваріантних анзаців та редукції цієї системи(див. [8]). Розв'язок системи (47) будемо шукати у вигляді (19).

У випадку $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ система (20) має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{t} = c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1, \\ &\dot{x} = c_5 tx + c_4 x + c_3 t + c_2, \\ &\dot{u}^1 = -(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3, \\ &\dot{u}^2 = -(c_5 t + c_4)u^2. \end{aligned} \tag{48}$$

Проаналізувавши та розв'язавши систему (48), одержимо нееківалентні ліївські анзаци для системи (46)

$$\begin{aligned} &u^1 = \varphi^1(\omega), \\ &u^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = kt + mx; \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = \varphi^1(\omega) - kt, \\ &u^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = \tfrac{kt^2}{2} + x; \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega), \\ &u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \\ &\omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega) + t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x, \\ &u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \\ &\omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x. \end{aligned} \tag{52}$$

Аналогічно отримуємо анзаци для системи (47)

$$\begin{aligned} &z^1 = \varphi^1(\omega), \\ &z^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = kx_0 + mx_1; \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} &z^1 = x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega), \\ &z^2 = \varphi^2(\omega), \\ &\omega = x_1 + k\ln x_0. \end{aligned} \tag{54}$$

11. Нелокальні анзаци образу системи Ван-дер-Ваальса. Для відшукання неліївських анзаців системи (47) подіємо композицією нелокальних перетворень (5)—(7) на вже знайдені анзаци системи (46). У підсумку отримаємо, що ліївські анзаци (49), (51) набудуть вигляду (53), (54), а анзаци (50), (52) перейдуть у нелокальні анзаци для системи (47)

$$\begin{aligned} &(z^1)^{-1} = \varphi^1(\omega) - kx_0, \\ &z^2 = z^1\varphi^2(\omega), \\ &\omega = \tau + \tfrac{1}{2}kx_0, \tau_1 = z^1; \end{aligned} \tag{55}$$

$$
\begin{aligned}
z^1 &= \frac{(x_0^2+1)\varphi^1(\omega)}{\sqrt{x_0^2+1}+\tau x_0\varphi^1(\omega)},\\
z^1 &= \frac{(x_0^2+1)\varphi^2(\omega)}{\sqrt{x_0^2+1}+\tau x_0\varphi^1(\omega)},\\
\omega &= -\frac{1}{2}\frac{\tau^2 x_0}{x_0^2+1}; \tau_1 = z^1.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

12. Редукція та розв'язки образу системи Ван-дер-Ваальса. Підставивши анзаци (55), (56) у систему (47), одержимо такі редуковані системи рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 + k = 0,\\
&\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^2\dot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0;
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 - \omega = 0,\\
&\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^2\dot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Одним із розв'язків редукованої системи (58) при $\mu > 0$ (див. [2, 3, 15]) є

$$
\begin{aligned}
\varphi^1(\omega) &= -\frac{\lambda_2}{\omega},\\
\varphi^2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big(\omega + \tfrac{\sqrt{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}}{\omega}\Big).
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Використавши анзац (56), знайдемо розв'язок системи (47), записаний у параметричному вигляді

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - \lambda_2\ln\tau,\\
z_1 &= \frac{1}{2}\frac{(x_0^2+1)\tau}{x_0\tau^2-\lambda_2(x_0^2+1)},\\
z_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\tau^2+\sqrt{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}(x_0^2+1)}{x_0\tau^2-\lambda_2(x_0^2+1)}.
\end{aligned}
$$

13. Висновки. Отже, знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії (4), які пов'язують між собою різні системи цього класу. Ці перетворення можуть бути використані для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків цієї системи. Ми проілюстрували на прикладі образу системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. Побудувавши ліївські анзаци для системи (46) та подіявши на них перетвореннями (5)—(7), знаходимо нелокальні анзаци для системи (47). Один із таких анзаців було використано для редукції системи (47) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язавши редуковану систему та використавши цей анзац, знайшли розв'язок системи (47). Водночас перетворення (5)—(7) зводять нелінійну систему (12) до лінійної системи вигляду (13). Для системи (12) у конкретному значенні параметрів λ_{ab}, γ_{ac}, були побудовані нелокальні анзаци, які не можливо одержати в рамках класичного методу Лі. Ці анзаци застосовано для редукції системи (12) до систем звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язавши редуковану систему та використавши відповідний анзац, можна знайти точні розв'язки системи (12).

Список використаної літератури

1. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, 1978, 400с.
2. Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности*, ДАН СССР **125** (1959), 492–495.
3. П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, Москва, 1989, 581с.
4. О. М. Омелян, *Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Мат. Мех. (2004), no. 11–12, 95–100.
5. М. М. Сєрова, О. М. Омелян, *Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса*, Праці Ін-ту математики НАН України **36** (2001), 254–261.
6. М. І. Сєров, О. М. Омелян, Р. М. Черніга, *Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень*, Доп. НАН України. (2004), no. 10, 39–45.
7. М. І. Сєров, О. М. Омелян, *Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису*, Вид-во ПолтНТУ, Полтава, 2011, 236 с.
8. В. И. Фущич, Н. И. Сєров, Т. К. Амеров *О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности*, Наукова думка, Київ, 1989, 339 с.
9. В.И. Фущич, В.М. Штелень, М.И. Сєров, *Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики*, Докл. АН УССР (1990), no. 11, 15–18.
10. В. І. Фущич, В. А. Тичинін, *Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійного хвильового рівняння*, Доп. АН УРСР. Сер. А, Фіз.-мат. техн. н. (1990), no. 5, 32–35.
11. G. W. Bluman, G. J. Reid, and S. Kumei, *New classes of symmetries for partial differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1988), no. 4, 806–811.
12. W. I. Fuschich, M. I. Serov, V. A. Tychynin, and T. K. Amerov, *On non-local symmetry of nonlinear heart equation*, Proc. Acad. Sci. Ukraine **27** (1992), no. 11, 26–32.
13. J. R. King, *Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation*, J. Math. Phys. **23** (1990), 5441–5464.
14. G. Rosen, *Nolinear heat conduction in solid*, Phys. Rev. B. **19** (1979), 2398–2399.
15. M. I Serov, T. O. Karpaliuk, O. G. Pliukhin, and I. V. Rassokha, *System of reaction-convection-diffusion equation invariant under Galilean algebras*, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), no, 1, 185–211.
16. V. A. Tychynin and O. V. Petrova, *Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations*, J. Math. Anal. Appl. **382** (2011), no. 1, 20–33.
17. V. Tychynin, O. Petrova, and O. Tertyshnyk, *Nonlocal symmetries and generation of solutions for partial differential equations*, SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3** (2007), Art. ID 019, pp. 14.

Стаття: надійшла до редколегії 23.09.2015
доопрацьована 21.04.2017
прийнята до друку 13.11.2017

APPLICATION OF NON-LOCAL CONVERSIONS OF EQUIVALENCE OF THE SYSTEM OF CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS TO THE FINDING OF EXACT SOLUTIONS

Mykola SEROV, Mariya SEROVA, Oleksandr OMELYAN, Yuliya PRYSTAVKA

Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University
24, Pershotravneva Avenue, 36011, Poltava, Ukraine
e-mail: yuliaprystavka@rambler.ru

Non-local transformations of equivalence for a system convection-diffusion equations is constructed. These transformations are used to construct an invariant Ansatz, reduction and finding exact solutions of the system.

Key words: system of convection-diffusion equations, non-local transformations of equivalence, symmetry, the method of Lie, invariance, maximal invariance algebra, linearization, local change, the Van der Waals system of equations, invariant anzatz, reduction, exact solutions.