ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 82–89
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 82–89

УДК 517.53

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ЛЕЖАНДРА

Юрій ТРУХАН

Львівський національний університет ім. Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com

Досліджено властивості розв'язків рівняння Лежандра $(1-z^2)w''-$ $-2zw'+\lambda w=0$ при $\lambda\neq n(n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$ та функцій пов'язаних із ними, а саме обмеженість l-індексу, близькість до опуклості та можливе зростання.

Ключові слова: аналітична функція, обмеженість l-індексу, рівняння Лежандра, функція Лежандра першого роду, близькість до опуклості, зростання.

1. Вступ. Аналітична однолиста в крузі $\mathbb{D}=\{z:\,|z|<1\}$ функція

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Необхідною і достатньою умовою [1, с.203] для опуклості f є умова $\mathrm{Re}\{1+zf''(z)/f'(z)\}>0\,(z\in\mathbb{D})$. Функція f називається [1, с.583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z))>0\,(z\in\mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ заповнюється променями, яка виходять з ∂G і цілком лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, тому $a_1\neq 0$.

Нехай D — довільна комплексна область, а функція $l(z)$ — додатна та неперервна в D така, що для всіх $z\in D$

$$l(z)>\beta/\mathrm{dist}\{z,\partial D\},\quad \beta=\mathrm{const}>1. \tag{2}$$

Аналітична в D функція f називається функцією обмеженого l-індексу в D [2, с. 7], якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in D$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\le\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)}:\,0\leqslant k\leqslant N\right\}.$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом і позначається $N(f,l;\,D)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 30D15, 34M05

Рівнянням Лежандра називається [3, с. 214] диференціальне рівняння

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

При $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, розв'язком цього рівняння є поліном, тому надалі обмежимося розглядом випадку $\lambda \neq n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, коли усі нетривіальні аналітичні в околі нуля розв'язки є трансцендентними функціями.

Знайдемо розв'язок рівняння (3) у вигляді (1). Оскільки

$$(1-z^2)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)z^{n-2} - 2z\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)z^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Звідки $2a_2 + \lambda a_0 = 0$, $6a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0$ і $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_n + \lambda a_n = 0$. Тобто,

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Бачимо, що коефіцієнти з парними номерами не залежать від коефіцієнтів із непарними номерами. Тому розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді

$$w(z) = C_1 U(z^2) + C_2 z V(z^2).$$

Знайдемо рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів степеневого розвинення функції $U(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Якщо у (4) підставимо $n = 2k-2$, то отримаємо $a_{2k} = a_{2(k-1)}((2k-2)(2k-1) - \lambda)/(2k(2k-1))$, а отже,

$$u_k = \frac{(2k-2)(2k-1) - \lambda}{2k(2k-1)} u_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Зауважимо, якщо $u_0 = 0$, то $U(z) \equiv 0$. Подібно, для коефіцієнтів функції $V(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n z^n$, підставляючи в (4) $n = 2k-1$, матимемо

$$v_k = \frac{2k(2k-1) - \lambda}{2k(2k+1)} v_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Зрозуміло, якщо $v_0 = 0$, то $V(z) \equiv 0$.

Легко бачити, що функції $U(z)$ і $V(z)$ — аналітичні в $\mathbb{D}$.

2. Геометричні властивості. Для дослідження близькості до опуклості функцій $U(z)$ та $V(z)$ скористаємося такою лемою [4] (критерій Александера).

Лема 1. *Якщо* $a_1 \geqslant 2a_2 \geqslant \ldots \geqslant (n-1)a_{n-1} \geqslant na_n \geqslant \cdots > 0$, *то функція* (1) *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

Якщо приймемо $u_0 = -2/\lambda$, то з (5) отримаємо, що $u_1 = 1 > 0$. Оскільки для $n \geq 2$ маємо $\dfrac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} = 1 - \dfrac{\lambda}{(2n-1)(2n-2)}$, то $(n-1)u_{n-1} \geqslant nu_n > 0$ для всіх $n \geq 2$ за умови $0 \leqslant \lambda < 6$.

Подібно, приймаючи $v_0 = 6/(2-\lambda)$ із (6) отримаємо, що $v_1 = 1 > 0$ і для $n \geq 2$ виконується $\dfrac{nv_n}{(n-1)v_{n-1}} = 1 - \dfrac{\lambda - 2}{(2n+1)(2n-2)}$. Тому $(n-1)v_{n-1} \geqslant nv_n > 0$ за умови, що $0 \leqslant \dfrac{\lambda-2}{(2n+1)(2n-2)} < 1$ для всіх $n \geq 2$. Тобто, $2 \leqslant \lambda < 12$.

Отже, правильним є таке зауваження.

Зауваження 1. Якщо $0 < \lambda < 6$, то $U(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$, а якщо $2 < \lambda < 12$, то $V(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$.

3. Зростання. Оскільки з (5) випливає, що $u_n = u_0 \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)}$, а $\dfrac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)} = 1 - \dfrac{1}{k} - \dfrac{\lambda}{2k(2k-1)}$, то

$$\ln|u_n| = \sum_{k=1}^{n} \ln\left|1 - \frac{1}{k} - \frac{\lambda}{2k(2k-1)}\right| + \ln|u_0| = \ln\frac{1}{n} + O(1), \quad n \to \infty.$$

Тому існують сталі $0 < h \leqslant H < +\infty$ такі, що $\dfrac{h}{n} \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{H}{n}$, $\;n \geq 1$. Тому $M_U(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$, $r \uparrow 1$, де $M_U(r) = \max\{|U(z)| : |z| = r\}$. Використовуючи (6) і рівність $\dfrac{2k(2k-1)-\lambda}{2k(2k+1)} = 1 - \dfrac{1}{k} - \dfrac{\lambda-2}{2k(2k-1)}$, отримуємо $M_V(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$, $r \uparrow 1$. А отже, правильним є таке зауваження.

Зауваження 2. $M_U(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ та $M_V(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ при $r \uparrow 1$.

4. Обмеженість l-індексу. Дослідимо обмеженість l-індексу в $\mathbb{D}$ довільного розв'язку $w = L(z) = C_1U(z^2) + C_2zV(z^2)$ рівняння (3).

Зауваження 3. Якщо $N(f, l_*) \leq N$ і $l_*(r) \leq l^*(r)$, то неважко довести [2, с.23], що $N(f, l^*) \leq N$.

Тому, враховуючи (2), функцію $l(|z|)$ шукатимемо у вигляді $l(r) = \beta/(1-r)$, де $\beta > 1$ – якомога менше число.

Продиференціюємо рівняння (3) $n \geqslant 0$ раз. Отримаємо

$$(1-z^2)w^{(n+2)} - 2z(n+1)w^{(n+1)} + (\lambda - n(n+1))w^{(n)} = 0. \tag{7}$$

Звідки $w^{(n+2)} = \dfrac{2z}{1-z^2}(n+1)w^{(n+1)} - \dfrac{\lambda - n(n+1)}{1-z^2}w^{(n)}$. Тому при $l(|z|) = \beta/(1-|z|)$ і для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|w^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(|z|)} \leq$$

$$\leq \frac{2|z|}{|1-z^2|l(|z|)}\frac{n+1}{n+2}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda| + n(n+1)}{|1-z^2|}\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2(|z|)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1-|z|)l(|z|)}\frac{n+1}{n+2}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}+\frac{|\lambda|+n(n+1)}{(1-|z|)(1+|z|)}\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2(|z|)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}$$

$$\leq \frac{n+1}{\beta(n+2)}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}+\frac{(|\lambda|+n(n+1))(1-|z|)/(1+|z|)}{\beta^2(n+2)(n+1)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\leq$$

$$\leq \frac{n+1}{\beta(n+2)}\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}+\frac{|\lambda|+n(n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)}\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}, \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\right\}, \tag{8}$$

якщо для всіх $n\geqslant 0$

$$\frac{n+1}{\beta(n+2)}+\frac{n/\beta}{\beta(n+2)}+\frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)}\leqslant 1. \tag{9}$$

Із (8) випливає, що для всіх $n\geqslant 0$ виконується $\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\leq \max\left\{\frac{|w'(z)|}{1!l(|z|)}, |w(z)|\right\}$, а отже, $N(L,l)\leqslant 1$.

Знайдемо, для яких β виконується нерівність (9). При $n\to\infty$ маємо $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\leqslant 1$, тобто $\beta\geqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Далі шукатимемо β у вигляді $\beta=\max\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{|\lambda|}{x}}\right\}$, де $x>0$. Тоді (9) виконується, якщо для всіх $n\geqslant 0$ виконується $\frac{n+1}{\beta(n+2)}+\frac{n/\beta}{\beta(n+2)}+$ $+\frac{\beta x/(n+1)}{\beta(n+2)}\leqslant 1$. Остання нерівність еквівалентна нерівності

$$\frac{\beta x}{n+1}\leqslant(\beta-1-\frac{1}{\beta})n+2\beta-1. \tag{10}$$

Оскільки при $\beta\geqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ права частина нерівності (10) зростає за змінною n, а ліва спадає, то (10) виконується для всіх $n\geqslant 0$, якщо вона виконується при $n=0$, тобто при $x\leqslant 2-\frac{1}{\beta}$. Оскільки $2-\frac{1}{\beta}\geqslant 2-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, то покладемо $x=\frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$. Отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Для довільного розв'язку $w=L(z)$ рівняння* (3) *виконується $N(L,l;\mathbb{D})\leqslant 1$ з $l(r)=\frac{\beta}{1-r}$, де $\beta=\max\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{|\lambda|\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right\}$.*

Дослідимо тепер обмеженість l-індексу в $\mathbb{D}$ похідних довільного порядку розв'язку $w=L(z)$ рівняння (3). Із (7) випливає, що для довільного $k\in\mathbb{N}$ і для всіх $n\geqslant 0$

$$(1-z^2)w^{(k+n+2)}-2z(k+n+1)w^{(k+n+1)}+(\lambda-(k+n)(k+n+1))w^{(k+n)}=0.$$

Тобто, $G(z)=L^{(k)}(z)$ задовольняє рівняння

$$(1-z^2)G^{(n+2)}-2z(k+n+1)G^{(n+1)}+(\lambda-(k+n)(k+n+1))G^{(n)}=0.$$

Тому при $l(|z|) = \beta/(1-|z|)$, $k \in \mathbb{N}$ і для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|G^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(|z|)} \le \frac{k+n+1}{\beta(n+2)}\frac{|G^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda|+(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)}\frac{|G^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|G^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}, \frac{|G^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\right\}, \tag{11}$$

якщо для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{k+n+1}{\beta(n+2)} + \frac{(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} + \frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leqslant 1. \tag{12}$$

Нехай $\beta = \max\left\{(k+1)(1+\sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|}\right\}$. Тоді

$$\frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leqslant \frac{1}{2} \tag{13}$$

для всіх $n \geqslant 0$. З нерівностей $2(k+n+1) \leqslant (k+1)(n+2)$ та $k+n \leqslant (k+1)(n+1)$ правильних при усіх $k \in \mathbb{N}$ та $n \geqslant 0$ випливає, що

$$\frac{k+n+1}{\beta(n+2)} \leqslant \frac{k+1}{2\beta} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{5}} \tag{14}$$

та

$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leqslant \frac{(k+1)^2}{2\beta^2} \leqslant \frac{2}{(1+\sqrt{5})^2}. \tag{15}$$

Оскільки сума правих частин нерівностей (13), (14) та (15) дорівнює 1, то з них випливає нерівність (12), а отже, і (11). Тому правильним є таке твердження.

Твердження 2. *Для довільного розв'язку $w = L(z)$ рівняння* (3) *і для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується $N(L^{(k)}, l; \mathbb{D}) \leqslant 1$ з $l(r) = \dfrac{\beta_k}{1-r}$, де $\beta_k = \max\left\{(k+1)(1+\sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|}\right\}$.*

5. Загальна теорема. Із тверджень 1–2 та зауважень випливає така теорема.

Теорема 1. *Якщо $\lambda \neq n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то довільний аналітичний в $\mathbb{D}$ розв'язок рівняння* (3) *можна записати у вигляді $L(z) = C_1U(z^2) + C_2zV(z^2)$ і $N(L, l; \mathbb{D}) \leqslant 1$ з $l(r) = \dfrac{\beta}{1-r}$, де $\beta = \max\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{|\lambda|\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\right\}$. Також для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується $N(L^{(k)}, l; \mathbb{D}) \leqslant 1$ з $l(r) = \dfrac{\beta_k}{1-r}$, де $\beta_k = \max\left\{(k+1)(1+\sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|}\right\}$. Якщо $0 < \lambda < 6$, то $U(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$, а якщо $2 < \lambda < 12$, то $V(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$. Для функцій $U(z)$ та $V(z)$ виконуються асимптотичні рівності $M_U(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ та $M_V(r) \asymp \ln\dfrac{1}{1-r}$ при $r \uparrow 1$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.*

6. Обмеженість l-індексу функції Лежандра першого роду. Нехай тепер $\lambda = \nu(\nu+1)$, $\nu \in \mathbb{C}$. Найширше застосування має частковий розв'язок рівняння Лежандра, що позначається $P_\nu(z)$ і називається функцією Лежандра першого роду. Відомо [3, с.220], що $P_\nu(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1-z}{2})$, де $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ — гіпергеометрична функція, аналітична в $\mathbb{D}$. А отже, $P_\nu(z)$ задає аналітичну в $D = \{z : |z-1| < 2\}$ функцію. Дослідимо обмеженість l-індексу цієї функції в D.

Зауваження 4. Якщо $N(f,l;G) = N$, а $f_1(z) = f(\frac{z-z_0}{a})$, то $N(f_1,l_1;G_1) = N$, де $l_1(z) = \frac{1}{|a|}l(\frac{z-z_0}{a})$, $G_1 = z_0 + aG = \{z_0 + az : z \in G\}$.

Зважаючи на зауваження, дослідимо спершу обмеженість l-індексу функції $F(z) = F(\nu+1,-\nu,1;z)$ в $\mathbb{D}$. Наведемо міркування близькі до міркувань із [5], де досліджено обмеженість l-індексу гіпергеометричної функції при додатних значеннях параметрів α, β, γ.

Для дослідження l-індексу в околі нуля нам потрібна така лема, що є безпосереднім наслідком леми з [6].

Лема 2. *Якщо функція* (1) *аналітична в* $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z : |z| \le R\}$, $a_0 = 1$ *і*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \le a(R) < 1, \tag{16}$$

то $N(f,l;\mathbb{D}_R) = 0$ *з* $l(|z|) = \dfrac{1+a(R)}{(1-a(R))(R-|z|)}$.

Якщо $z \in \mathbb{D}_{\xi R}$, $0 < \xi < 1$, то $R - |z| \ge (1-\xi)R$ і з леми 2 та зауваження 3 випливає, що $N(f,l;\mathbb{D}_{\xi R}) = 0$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{1+a(R)}{(1-\xi)R(1-a(R))}$. Тому правильна така лема.

Лема 3. *Якщо функція* (1) *аналітична в* $\mathbb{D}$ *і* $a_0 = 1$, *то для всіх* $\xi \in (0,1)$ *і* $R \in (0,1)$ *за умови* (16) *правильна рівність* $N(f,l;\mathbb{D}_{\xi R}) = 0$ *з* $l(|z|) \equiv \dfrac{1+a(R)}{(1-\xi)R(1-a(R))}$.

Із степеневого розвинення гіпергеометричної функції [3, с. 48] отримуємо

$$F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(j-\nu)(j+\nu+1)}{(j+1)^2} \right) z^k.$$

Оскільки при $|\lambda| \le 1$ маємо $\left|\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+1)^2}\right| = \left|\frac{k^2+k-\lambda}{(k+1)^2}\right| \le 1$, то $|A_k| \le 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тому, при $R = 1/4$ одержуємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n| R^n \le \frac{1}{3} = a(R)$. Прийнявши $\xi = 2/5$ в лемі 3 отримаємо $N(F, 40/3; \mathbb{D}_{1/10}) = 0$. При $|\lambda| > 1$ матимемо $\left|\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+1)^2}\right| \le |\lambda|$, а тому $|A_k| \le |\lambda|^k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. При $R = 1/4|\lambda|$ одержуємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n| R^n \le \frac{1}{3} = a(R)$. А отже, при $\xi = 2/5$ з леми 3 одержуємо $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) = 0$. Тобто, правильним є таке твердження.

Твердження 3. *Якщо* $|\lambda| \le 1$, *то* $N(F, 40/3; \mathbb{D}_{1/10}) = 0$, *а якщо* $|\lambda| > 1$, *то* $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) = 0$.

Для дослідження обмеженості l-індексу на решті одиничного кругу використаємо такий факт, що гіпергеометрична функція $F(z)$ задовольняє гіпергеометричне рівняння Гауса [3, с. 45]

$$z(z-1)w'' + (2z-1)w' - \lambda w = 0.$$

Продиференціюємо його $n \geq 0$ разів і отримаємо

$$z(z-1)w^{(n+2)} + (2z-1)(n+1)w^{(n+1)} + (n(n+1)-\lambda)w^{(n)} = 0. \tag{17}$$

Звідси, для $|\lambda| \leq 1$ при $\frac{1}{10} \leq |z| < 1$ і $l(z) = \frac{40/3}{1-|z|}$ матимемо для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|F^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(z)} \leq$$

$$\leq \frac{2|z|+1}{|z||z-1|}\frac{3(1-|z|)}{40}\frac{n+1}{n+2}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \frac{9(1-|z|)^2}{1600|z||z-1|}\frac{n(n+1)+|\lambda|}{(n+2)(n+1)}\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq$$

$$\leq \frac{2|z|+1}{|z|}\frac{3}{40}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \frac{1-|z|}{|z|}\frac{9}{1600}\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq$$

$$\leq \frac{9}{10}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \frac{81}{1600}\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}, \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\right\}.$$

Звідси легко випливає, що для всіх $n \geqslant 0$ виконується

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \max\left\{\frac{|F'(z)|}{1!l(z)}, |F(z)|\right\},$$

а отже, $N(F, l; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/10}) \leqslant 1$. Тому правильне таке твердження.

Твердження 4. *Якщо* $|\lambda| \leq 1$, *то* $N(F, \frac{40/3}{1-|z|}; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/10}) \leq 1$.

Для $|\lambda| > 1$ при $\frac{1}{10|\lambda|} \leq |z| < 1$ і $l(z) = \frac{40|\lambda|/3}{1-|z|}$ з (17) одержуємо

$$\frac{|F^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(z)} \leq \left(2 + \frac{1}{|z|}\right)\frac{3}{40|\lambda|}\frac{n+1}{n+2}\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{|z|} - 1\right)\frac{9}{1600|\lambda|}\left(\frac{n}{|\lambda|(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}\right)\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{15|\lambda|+3}{20|\lambda|} + \frac{9}{160}\left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{2}\right)\right)\max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}, \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}, \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)}\right\}$$

для всіх $n \geqslant 0$. Тому правильне таке твердження.

Твердження 5. *Якщо* $|\lambda| > 1$, *то* $N(F, \frac{40\lambda/3}{1-|z|}; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) \leq 1$.

Із тверджень 3-5 та зауваження 3 легко отримуємо таке твердження.

Твердження 6. *Для* $F(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; z)$ *виконується* $N(F, l; \mathbb{D}) \leq 1$ *з* $l(z) = \frac{\beta}{1-|z|}$, *де* $\beta = \frac{40}{3}\max\{1, |\nu(\nu+1)|\}$.

Враховуючи зауваження 4 із твердження 6 отримуємо таку теорему.

Теорема 2. *Функція Лежандра першого роду $P_\nu(z)$ є обмеженого l-індексу в $D = \{z : |z-1| < 2\}$ з $l(z) = \dfrac{\beta}{2-|z-1|}$, де $\beta = \frac{40}{3}\max\{1, |\nu(\nu+1)|\}$, а величина l-індексу не перевищує 1.*

Зауважимо, що умова (2) для круга з теореми набуває вигляду

$$l(z) > \frac{\beta}{2-|z-1|}, \quad \beta > 1.$$

Список використаної літератури

1. G. M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
2. M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
3. Д. С. Кузнецов, *Специальные функции*, Высшая школа, Москва, 1965.
4. A. W. Goodman, *Univalent function*, Vol. **II**, Mariner Publishing Co., 1983.
5. М. М. Шеремета, *Властивості гіпергеометричної функції з невід'ємними коефіцієнтами*, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **70** (2009), 183–190.
6. M. M. Sheremeta and Yu.S. Trukhan, *Properties of the solutions of the Gauss equation*, Mat. Stud. **41** (2014), no. 2, 157–167.

Стаття: надійшла до редколегії 07.10.2016
доопрацьована 21.04.2017
прийнята до друку 22.04.2017

PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE LEGENDRE EQUATION

Yuriy TRUKHAN

Ivan Franko Lviv National University,
1, Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com

We investigate growth, closeness to convexity and boundedness of l-index for the solutions of the Legendre equation $(1-z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$ if $\lambda \neq n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, and of some functions related to these solutions are investigated.

Key words: analytic function, boundedness of l-index, Legendre equation, Legendre function of the first kind, closeness to convexity, growth.