ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 24–33
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 24–33

УДК 514.01

САЛЯ ВАЙНЛЬОС ТА ЇЇ ПРАЦЯ З ОСНОВ ГЕОМЕТРІЇ

Ігор ГУРАН, Ярослав ПРИТУЛА

Львівський національний університет ім. Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: igor_guran@yahoo.com, ya.g.prytula@gmail.com

Викладено біографічну довідку про Салю Вайнльос і зміст її докторської праці, де запропоновано оригінальне доведення існування неевклідової геометрії.

Ключові слова: основи геометрії, аксіоматика Гільберта, аксіоматика Штайнгауза, незалежність аксіом, аксіома паралельності, неевклідова геометрія.

Серед тринадцяти осіб, які в період 1920–1939 років отримали ступінь доктора філософії у галузі математики у Львівському університеті, була одна жінка — Саля Вайнльос (Sala Weinlös). Вона стала першою жінкою доктором філософії у галузі математики в історії Львівського університету [1].

Саля Вайнльос народилася 6 лютого 1903 р. в Рогатині на Станіславщині. Її батьком був Ізраель, мати Реббека з дому Дам. До 1940 р. батько працював службовцем у приватних підприємствах. Вів також історичні та бібліографічні дослідження у сфері єврейської літератури. З приходом радянської влади став членом спілки письменників Львова. У 1940–1941 роках працював бібліографом у Науковій бібліотеці імені Василя Стефаника [2]. З 1909 р. С. Вайнльос почала відвідувати народну школу у Львові. У 1913-14 н.р. вона навчалась у приватній жіночій гімназії ім. Юліуша Словацького, де закінчила перший клас. Далі продовжувала навчання в гімназії пані Камерлінг, у якій 1921 р. отримала атестат зрілості з оцінкою "відмінно".

Ця приватна гімназія була заснована у 1899 р. Юзефою С. Голдблатт-Камерлінг (Juzefa S. Goldblatt-Kamerling). Це була перша приватна жіноча гімназія не лише у Львові, а й в Галичині. Гімназія містилась у будинку на вул. Сакраментек 16, тепер це вулиця Туган–Барановського. У повоєнний час в цьому будинку була фабрика, а з 2005 — новий будинок. Гімназія була змішаного типу — класичного та математично-природничого, мала повні публічні права. До цієї гімназії ходили дівчата з заможних єврейських сімей, які прагнули більшої асиміляції. З 1905 р. тут

2010 Mathematics Subject Classification: 01A60, 01A70, 01A72, 51A05

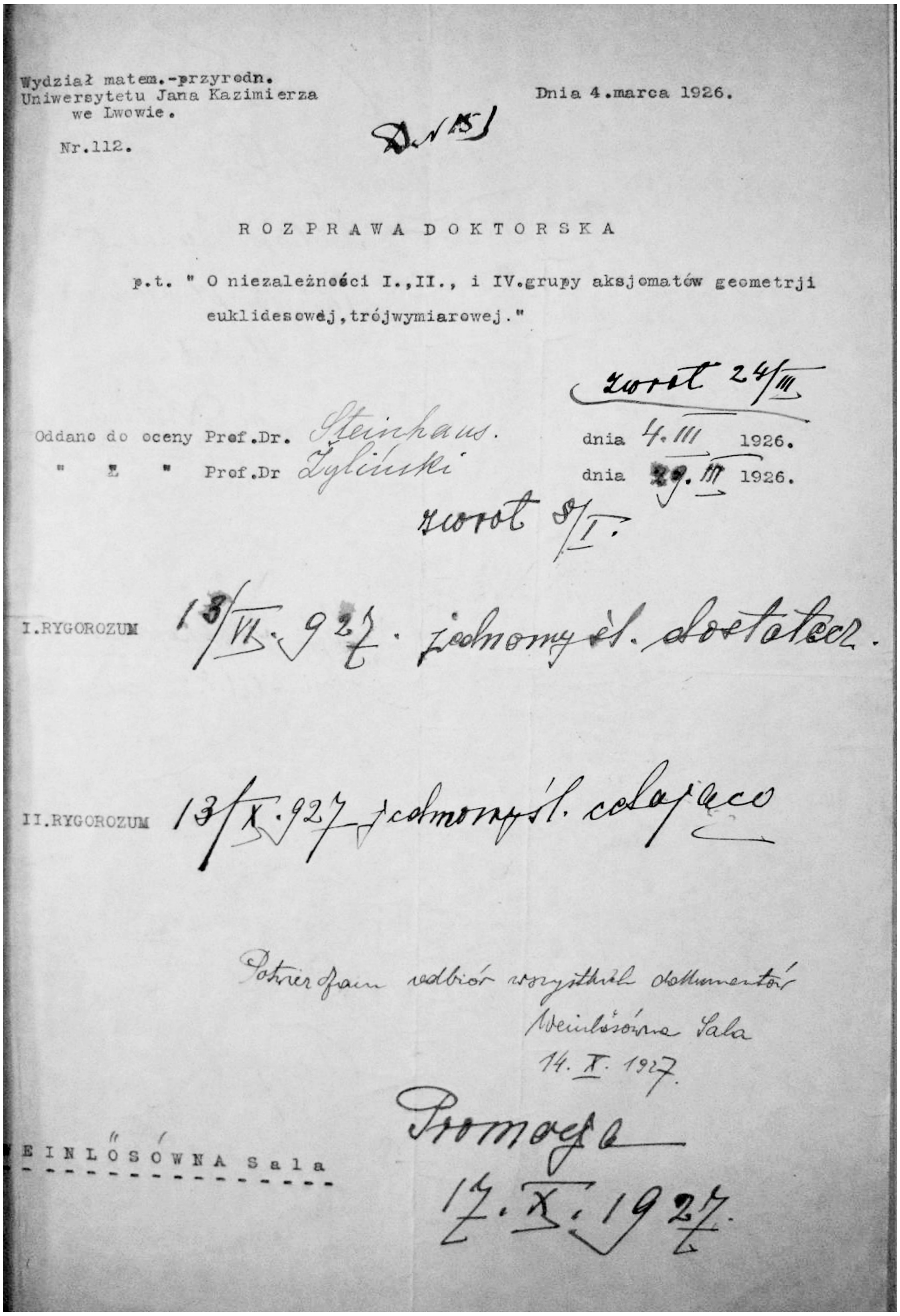
було повних 8 класів гімназії. Від заснування до 1939 р. директором гімназії була її власниця пані Камерлінг, яка навчалася в університетах Цюріха та Відня, і отримала диплом історика.

З жовтня 1921 р. С. Вайнльос була студенткою філософського факультету Львівського університету Яна Казимира, а з 1924 математично-природничого, який був утворений під час поділу філософського факультету. У першому семестрі С. Вайнльос вибрала курси К. Твардовського "Вступ до психології", "Силогістика", М. Вартенберга "Вступ до філософії", Є. Жилінського "Алгебра", "Вступ до математики", С. Рузевіча "Математика для філософів і природничників", Р. Негруса "Експериментальна фізика", а також курс стенографії. Колоквіум з "Силогістики" склала на "дуже добре", а з математики у С. Рузевіча на "відмінно" [3]. Далі кожного року вона записувалась на курси К. Твардовського з логіки та філософії, на математичні курси С. Банаха, Є. Жилінського, С. Рузевіча та Г. Штайнгауза. У 1924 р. Г. Штайнгауз читав курс "Основи геометрії" та вів семінар з цього курсу. С. Вайнльос відвідувала цей курс і брала участь у семінарі Г. Штайнгауза. У цьому курсі він сформулював декілька проблем, які зацікавили С. Вайнльос. Гурток математично-фізичний студентів університету в 1925 р. видав текст лекцій "Podstawy geometrji" [4]. У вступі Г. Штайнгауз, згадуючи про вклад Д. Гільберта, написав "Після Гільберта основи геометрії викладали в Гетінгені: Ландау і Бернаус. Нотатки з тих лекцій, які велися студентом Басковічем обдуманні ним і викладачем були викладені у манускрипті".

Гуго Штайнгауз (1887-1972) свою університетську освіту почав у Львівському університеті восени 1905 р. Тут у першому півріччі він вибрав лекції з філософії та етики К. Твардовського та М. Вартенберга, з математики Ю. Пузини, з експериментальної фізики І. Закшевського та з методології суспільних наук С. Грабського. Через рік він продовжив навчання у Гетінгенському університеті, де у 1911 р. отримав ступінь доктора філософії на підставі праці "Neue Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips". Після габілітації у Львівському університеті 1917 р. Г. Штайнгауз читав лекції як приват-доцент і мав штатну посаду асистента. У 1920 р. він отримав посаду надзвичайного, а з 1923 — звичайного професора і керівника II-ої кафедри математики.

С. Вайнльос звернулася з заявою до Ради математично-природничого факультету про допуск до докторських іспитів 3 березня 1926 р.: математики, як головної дисципліни і кристалографії, як другої дисципліни та філософії. Разом з заявою подала докторську працю "O niezależności I, II, IV grupy aksiomatów geometrji euklidesowej trójwymiarowej", яка, зазначена в заяві, була виконана на семінарі Г. Штайнгауза [5]. Вибір другої дисципліни був пов'язаний, мабуть з тим, що у 1925/26 навчальному році вона слухала курси "Загальна мінерологія" та "Геометрична кристалографія" у З. Вейберга [6].

Рецензентами докторської праці призначено Г. Штайнгауза та Є. Жилінського. Г. Штайнгауз уже 23 березня написав свою оцінку праці, Є. Жилінський, взявши докторську працю, свою оцінку написав 20 грудня 1926 р. Обидва рецензенти вважали, що на підставі цієї праці С. Вайнльос можна допустити до докторських іспитів. Зауважимо, що у всіх інших випадках написання оцінок докторських праць у цей (1920-39 рр.) період рецензенти писали спільну оцінку [7].



Wydział matem.-przyrodn.
Uniwersytetu Jana Kazimierza
we Lwowie.

Dnia 4.marca 1926.

Nr.112.

Dr. N 151

ROZPRAWA DOKTORSKA

p.t. " O niezależności I.,II., i IV.grupy aksjomatów geometrji euklidesowej,trójwymiarowej."

zwrot 24/III

Oddano do oceny Prof.Dr. Steinhaus. dnia 4.III 1926.
" " " Prof.Dr Żyliński dnia 29.III 1926.

zwrot 8/I.

I.RYGOROZUM 13/VI.927. jednomyśl. dostateczn.

II.RYGOROZUM 13/X.927 jednomyśl. celująco

Potwierdzam odbiór wszystkich dokumentów
Weinlösówna Sala
14. X. 1927.

Promocja
17. X. 1927.

WEINLÖSÓWNA Sala

Оцінки Г. Штайнгауза та Є. Жилінського

Іспит з математики та кристалографії С. Вайнльос склала 13 червня 1927 р. Її відповідь З. Вайберг оцінив "відмінно", інші члени комісії Є. Жилінський, Г. Штайнгауз і декан С. Лоріа "задовільно". Комісія одноголосно прийняла оцінку "задовільно". Відповідь на іспиті з філософії 13 жовтня 1927 р. комісія, до якої входили К. Твардовський і М. Вартенберг, оцінили на "відмінно". Офіційна докторська промоція С. Вайнльос відбулась 17 жовтня 1927 р. Промотором був Г. Штайнгауз [7].

Уже в 1926 р. С. Вайнльос була членом Львівського відділення Польського математичного товариства. У 1927 р. була учасником Першого польського математичного з'їзду у Львові. У журналі "Fundamenta Mathematica" опублікувала дві статті ([8, 9]).

З 1926 до 1930 р. С. Вайнльос працювала вчителькою математики у приватних школах Львова. Вона продовжувала науково співпрацювати з Г. Штайнгаузом. В 1932-1933 роках займалась підготовкою до друку лекцій з основ геометрії Г. Штайнгауза. Підготувала і подала до журналу "Fundamenta Mathematica" статтю "Beitrage zur Axiomatik der Euklidischen dreidimensionelen Geometrie", яка мала вийти у 1940 р.

З 1934 до 1941 р. С. Вайнльос працювала в середній школі (№29 у радянський період) у Львові. Середня школа №29 була розташована в монастирі, на площі Юра 1. Тепер там третій навчальний корпус "Львівської політехніки". У 1939-1940 рр. викладала математику на обласних педагогічних курсах для вчителів.

У 1940 р. С. Вайнльос подала заяву про вступ до аспірантури Львівського державного університету імені Івана Франка [10]. Вступні іспити склала успішно: спеціальність — "добре", основи марксизму-ленінізму — "добре", іноземна мова — "відмінно". Однак, не була зарахована за конкурсом.

Доля Салі Вайнльос в час війни авторам невідома.

Ми згадували, що в 1925 р. вийшов з друку манускрипт професора Г. Штайнгауза "Podstawy geometrji". В ньому викладені основи геометрії на підставі певної системи аксіом, яка покликана систематизувати тільки логічним шляхом структуру евклідової геометрії. Цю програму раніше реалізував Д. Гільберт у його класичній монографії [11], перше видання якої з'явилось 1899 р.

Гільбертом запропоновано розбиття системи аксіом геометрії на п'ять груп:

(I) **I1–I8** аксіоми сполучення (незалежності);
(II) **II1–II4** аксіоми порядку;
(III) **III1-III5** аксіоми конгруентності;
(IV) аксіоми паралельності;
(V) **V1**, **V2** аксіоми неперервності.

У манускрипті Г. Штайнгауза "Podstawy geometrji" [4] (далі **PG**) поділ на групи системи аксіом такий самий як у Д. Гільберта. Зупинимось на порівнянні цих систем аксіом, беручи за базову систему Гільберта. Аксіоми Гільберта ми позначатимемо літерою **H** з відповідною нумерацією групи і порядковим номером аксіоми, наприклад, **HI1** — означає першу аксіому першої групи, **HII2** — другу аксіому другої групи і т.д. Для позначення аксіом системи Штайнгауза, викладеної в **PG**, вживатимемо літеру **S**, номер групи і номер відповідної аксіоми. Наприклад, **SI2** — це друга аксіома першої групи аксіом сполучення.

Які ж відмінності між аксіоматикою (**H**) Гільберта та (**S**) — Штайнгауза. Запис **SI1≡HI1** означає ідентичність відповідних аксіом **1**: "Для довільних двох точок A,

B існує пряма a, що належить до цих двох точок" в обох системах (**H**) і (**S**). Запис **HI4**$\Rightarrow$**SI4** означає, що з аксіоми **HI4** випливає аксіома **SI4**. А запис **HI4**$\equiv$**SI4**$+$**SI3**$_2$, відповідно, означає, що аксіома **HI4** еквівалентна кон'юнкції аксіом **SI4** і **SI3**$_2$.

Порівняння системи аксіом першої групи в системах (**H**) і (**S**).

В системі (**S**) аксіоми **SI1**–**SI8** формулюються так:

SI1: через дві різні точки завжди проходить пряма;
SI2: через дві різні точки проходить щонайбільше одна пряма;
SI3$_1$**:** на прямій лежать принаймні дві різні точки;
SI3$_2$**:** на площині лежить принаймні одна точка;
SI4: через три різні точки завжди проходить площина;
SI5: через три різні точки, які не лежать на одній прямій, проходить щонайбільше одна площина;
SI6: якщо дві різні точки прямої лежать на площині α, то кожна точка цієї прямої лежить на площині α;
SI7: якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають іншу спільну точку;
SI8: існують принаймні чотири різні точки, які не лежать на одній площині.

Оскільки **HI1**$\equiv$**SI1**, **HI2**$\equiv$**SI2**, **HI5**–**HI8**$\equiv$**SI5**–**SI8**, то формулювати відповідні аксіоми Гільберта не треба. Розглянемо аксіоми

HI4: Для будь-яких трьох точок A, B, C, що не лежать на тій самій прямій, існує площина α, що належить кожній з цих трьох точок A, B, C. Для довільної площини завжди існує точка, що їй належить.
HI3: На прямій існують принаймні дві точки. Існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

Щодо аксіоми **HI4**, то очевидно

$$\mathbf{HI4} \equiv \mathbf{SI4} + \mathbf{SI3}_2.$$

В лемі 1 доводиться, що

$$\mathbf{HI3} \equiv \mathbf{SI3}_1 + \mathbf{SI4} + \mathbf{SI6} + \mathbf{SI8}.$$

Отож, системи аксіом сполучення **HI** та **SI** еквівалентні.

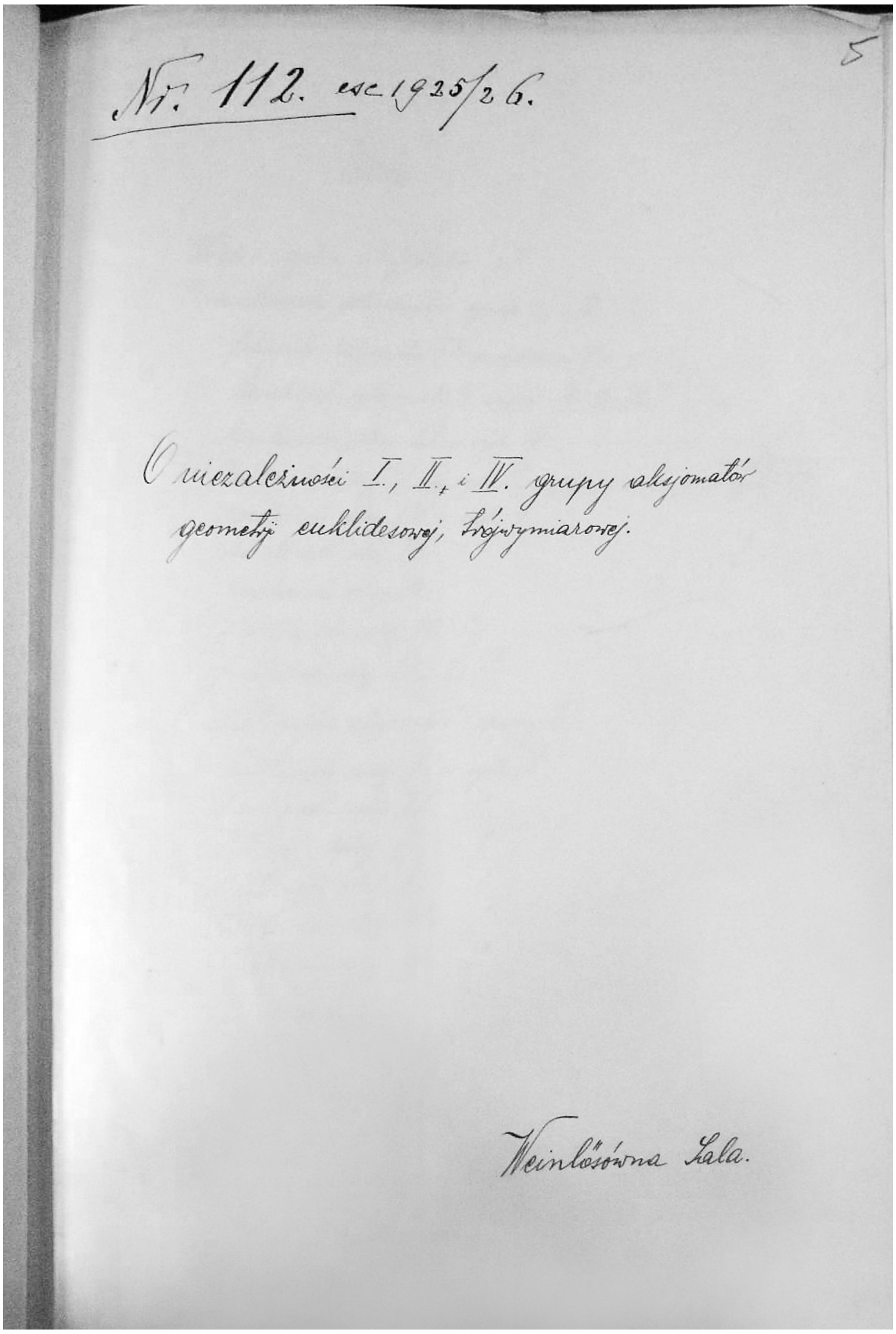
В подальшому розгляді докторської праці Салі Вайнльос аксіома **SI3**$_1$ матиме визначальне значення.

Проста перевірка аксіом другої, третьої, четвертої та п'ятої групи аксіом в обох системах (**H**) і (**S**) свідчить про їхню еквівалентність. Отже, системи (**H**) і (**S**) еквівалентні та становлять аксіоматичну основу евклідової геометрії.

Перейдемо до викладу основних результатів докторської праці "Про незалежність **I**, **II** і **IV** груп аксіом тривимірної евклідової геометрії" Салі Вайнльос.

Докторська праця складається зі вступу, двох розділів і висновків.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83



5

Nr. 112. esc. 1925/26.

O niezależności I., II., i IV. grupy aksjomatów geometrji euklidesowej, trójwymiarowej.

Weinlösówna Sala.

"O niezależności **I**, **II** i **IV** grupy aksjomatóv geomrtrji euklidowej trójwymiarowej"
Weinlösówna Sala

У вступі автор сформулював мету праці, а саме, доведення незалежності аксіом груп **I**, **II**, **IV**.

В першому розділі після викладу системи аксіом Г. Штайнгауза (**S**) автор розглядав таке:

Залежність аксіом $\mathbf{SI3}_1$ *від аксіом* **SI1**, **SI2**, **SI4**, **SI6**, **SI8**, **II2**, $\mathbf{II3}_3$, **IV**.

Лема 1. *Існують три різні точки, які не лежать на одній прямій.*

Доведення. З аксіоми **I8** випливає існування чотирьох різних точок A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Стверджуємо, що довільні три з них, наприклад, A, B, C не лежать на одній прямій. Якщо б ці точки A, B, C лежали на одній якісь прямій, то площина α, що проходить через точки A, B, D (така площина існує завдяки аксіомі **I4**), проходила б також (за аксіомою **I6**) через точку C, що суперечить тому, що точки A, B, C, D не належать одній площині. □

Лема 2. *Для заданої точки існують дві різні точки, які не лежать з нею на одній прямій.*

Доведення. Візьмемо три різні точки A, B, C, які не лежать на одній прямій (існування таких точок випливає з леми 1). Якщо довільні дві з них, наприклад, A, B, не лежать з точкою X на одній прямій, то лема доведена. Якщо ж через точки A, B, X проходить пряма l, то вже точка C на цій прямій l не лежить (бо тоді б точки A, B, C лежали на одній прямій, що суперечить припущенню), однак пряма l є єдиною прямою, що проходить через A, X, тому точки A, C, X не лежать на жодній прямій. Візьмемо тепер довільну пряму a. Для неї можливі три випадки:

1° На прямій a немає жодної точки.

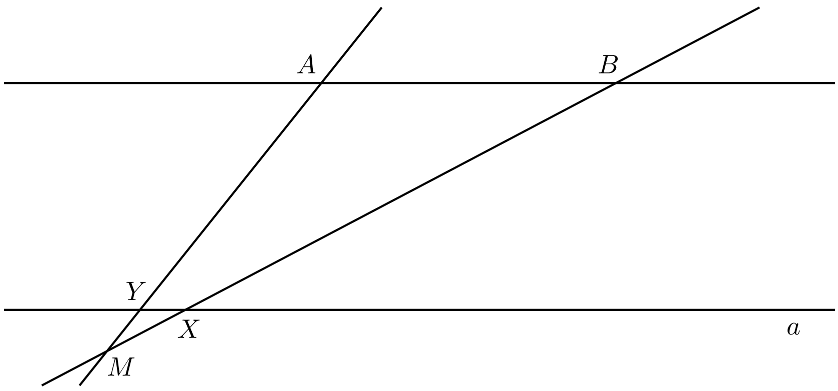
2° На прямій a лежить тільки одна точка .

3° На прямій a лежить принаймні дві різні точки.

У випадку 3° нічого не треба доводити.

У випадку 1° проведемо через три різні точки A, B, C, які не лежать на одній прямій площину α (**I4**). Пряма a лежить в площині α, і як така, що не містить жодної точки, лежить в кожній площині. Розглянемо прямі AB і BC (**I1**), які лежать (за аксіомою **I6**) в площині α. Всупереч тому, що вони різні і проходять обидві через точку B, мають, принаймні одна з них, перетинати, — на підставі аксіоми **IV** — пряму a. Отже, маємо на прямій a якусь точку X. Якщо на ній існує ще одна точка Y, відмінна від X, то твердження доведено. Випадок, коли X є єдиною точкою прямої a, аналогічний до випадку 2°. У цьому випадку візьмемо до точки X дві різні від неї точки A, B, які не лежать з нею на одній прямій і проведемо через точки A, B, X площину α (**I4**), пряма a, яка містить лише точку X, лежатиме в площині α. Розглянемо на площині α прямі AB і AM, причому M — це точка прямої BX, що задовольняє відношення BXM. Така точка M існує завдяки аксіомі **II2**. Стверджуємо, що прямі AB і AM — різні.

У протилежному випадку точка M належала б прямій AB, що означало б, що прямі AB і BX мали б дві різні спільні точки: B, M ($B \neq M$ за аксіомою $\mathbf{II3}_3$ і відношенням BXM), тому вони б збігалися, що означало б, що точки A, B, X лежали б на одній прямій, всупереч припущенню. Однак далі, обидві прямі AB, AM лежать в площині α і проходять через точку A і не можуть обидві бути паралельними до прямої a — (аксіома **IV**), тому принаймні одна з цих прямих перетинає пряму а в точці Y.



Стверджуємо, що точка Y відмінна від точки X. Якщо б точки X і Y були ідентичними, то точка X лежала б або на прямій AB, що суперечить припущенню, або лежала б на AM, звідки випливало б, що прямі AM і BM збігаються (бо мають дві спільні різні точки: M і X) всупереч попередньому твердженню.

Маємо в кожному з випадків, що на прямій a існують різні точки, що й треба було довести. $\square$

Далі автор пропонує оригінальне доведення незалежності аксіоми **IV** паралельності в аксіоматиці системи $\overline{\mathsf{S}} \equiv \mathsf{S} - \mathsf{I3}_1$.

Незалежність аксіоми **IV** *в системі* $\overline{\mathsf{S}}$.

Довівши залежність аксіоми $\mathsf{I3}_1$ в системі **S**, ми можемо її виключити з системи **S** і спростити цю систему аксіом до $\overline{\mathsf{S}} \equiv \mathsf{S} - \mathsf{I3}_1$, яка рівносильна з системою **S**. У цій системі $\overline{\mathsf{S}}$ набагато легше довести незалежність аксіоми **IV**, ніж у всій системі **S**. Побудуємо модель для доведення незалежності аксіоми **IV**.

“точка” $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ “точка евклідової геометрії”
“пряма” $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ 1) “евклідова пряма”
2) “довільне число, наприклад, 1/2”
“площина” $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ “евклідова площина”
“точка лежить на прямій” $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ 1) “пряма” є евклідова пряма і
2) “точка” “лежить” на ній в сенсі евклідовому

Відношення “порядку” і “належності” залишаються як в евклідовій геометрії. Іншими словами, до евклідової геометрії ми додали “пряму” — число $1/2$, отже жодна “точка” на ній не лежить. Ця модель геометрії задовольняє всі аксіоми системи $\overline{\mathsf{S}}$, за винятком аксіоми **IV**.

Аксіоми **I1**, **I2** виконуються, бо через дві різні “точки” проходить одна і тільки одна “пряма”, саме евклідова.

Аксіоми $\mathsf{I3}_2$, **I4**, **I7**, **I8** виконуються, оскільки в їхніх формулюваннях відсутнє поняття “пряма”.

Аксіома **I5** виконується, бо ця аксіома виконується в евклідовій геометрії.

Аксіома **I6** виконується для евклідових прямих, а для "прямої" приєднаної "1/2" посилання є хибним, тому **I6** для прямої "1/2" — виконується.

Всі аксіоми групи **II** і **III** виконуються для цієї моделі, оскільки вони виконуються для евклідових "прямих", а для доданої "1/2" прямої посилання хибні.

V група аксіом повноти очевидно виконується як для евклідових "прямих", так і для доданої прямої "1/2".

Аксіома **IV** не виконується: існує нескінченна множина різних "прямих" (евклідових), що проходять через "точку" поза прямою "1/2", які лежать в єдиній "площині", кожна з яких не перетинає "прямої 1/2".

Завдяки цій моделі геометрії бачимо, наскільки істотним є застосування аксіоми **IV** в доведенні залежності аксіоми $\mathbf{I3}_1$ в системі **S**. З іншого боку, аксіома $\mathbf{I3}_1$ є незалежною в неевклідовій геометрії.

Далі автор доводить незалежність аксіом першої та другої групи у введеній нею системі $\overline{\mathbf{S}} \equiv \mathbf{S} - \mathbf{I3}_1$. Ідея доведення полягає в побудові різноманітних моделей для системи аксіом $\overline{\mathbf{S}}$. Наприклад, незалежність аксіоми **I1** в системі $\overline{\mathbf{S}}$:

В евклідовій геометрії беремо довільні різні точки A, B, C, D і визначаємо:

"точки" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "кожна з точок A, B, C, D"

"пряма" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "евклідова пряма, що не проходить через жодну з "точок" в сенсі евклідової геометрії"

"площина" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "трійка різних "точок" (невпорядкованих)"

"точка лежить на прямій" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ ""точка" лежить в сенсі евклідовому на евклідовій прямій"

"точка лежить на площині" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "є серед даної трійки "точок""

Жодна "точка" не "лежить між" двома іншими

"Відкладення кутів" не визначаємо, бо кути в цій геометрії не існують, нема саме двох різних "прямих", що перетинаються в якісь точці.

У цій моделі не виконується аксіома **I1**, бо через дві "точки" не "проходить", за означенням, жодна "пряма" — однак всі інші аксіоми — виконуються. В цьому легко переконатись.

Для доведення незалежності аксіоми **I4** у системі $\overline{\mathbf{S}}$ запропонована така модель: фіксуємо довільну евклідову пряму a і означуємо:

"точки" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "кожна точка прямої a"

"пряма" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "пряма a"

"площина" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "фіксоване коло $\mathcal{K}$ з центром в точці A, яке лежить на прямій a"

"точка лежить на прямій" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "точка лежить в сенсі евклідовому на прямій a"

"точка лежить на площині" $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$ "точка є центром кола $\mathcal{K}$"

Докторська праця С. Вайнльос приваблює простотою доведень незалежності аксіом першої та другої групи, аксіоми паралельності особливо. Безперечно, що простота досягається введенням системи $\overline{\mathbf{S}}$, еквівалентної системі (**S**) Г. Штайнгауза, яка еквівалентна системі (**H**) Д. Гільберта.

Викладені результати докторської праці С. Вайнльос зацікавлять не лише викладачів, які читають університетський курс "Основи геометрії", а й широке коло студентів і любителів математики.

Список використаної літератури

1. J. Prytula, *Doktoraty z matematyki i logili na Uniwersytecie Jana Kazimierza w latach 1920–1938*, Dzieje Matematyki Polskej, W. Więsław ed., Wrocław, 2012, pp. 137–161.
2. *Архів Національної наукової бібліотеки України імені Василя Стефаника*, Особова справа І. Вайнльос.
3. ДАЛО (Державний архів Львівської області), ф. 26, оп. 15, сп. 661.
4. H. Steinhaus, *Podstawy geometrji*, Lwów, MCMXXV, 82 str.
5. ДАЛО, ф. 26, оп. 9, сп. 386.
6. ДАЛО, ф. 26, оп. 15, сп. 981.
7. ДАЛО, ф. 26, оп. 15, сп. 1354.
8. S. Weinlös, *Sur l'indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité dans un système des axiomes de la géométrie euclidienne à trois dimensions*, Fundam. Math. **11** (1928), 206–221.
9. S. Weinlös, *Remarques à propos de la note de M. Rosenthal: "Eine Bemerkung zu der Arbeit von Frl. Weinlös ..."*, Fundam. Math. **15** (1930), 310–312.
10. Архів Львівського університету, ф. 119, оп. 1, сп. 1474.
11. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner Verlag, 1899.

SALA WEINLÖS AND HER WORK ON FOUNDATIONS OF GEOMETRY

Igor GURAN, Yaroslav PRYTULA

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: igor_guran@yahoo.com, ya.g.prytula@gmail.com

A biographical note on Sala Weinlös and the contents of her doctoral thesis are presented. This doctoral thesis proposes an original proof of the existence of non-Euclidean geometry.

Key words: foundations of geometry, Hilbert axiomatics, Steinhaus axiomatics, axiom independence, parallel axiom, non-Euclidean geometry

Стаття: надійшла до редколегії 24.04.2017
доопрацьована 29.09.2017
прийнята до друку 13.11.2017