ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 202–207
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 202–207

УДК 519.217

НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ ГЕНЕРАТОРІВ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТОРІ R^d

Оксана ЯРОВА

Львівський національний університет ім. Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

Досліджено генератори марковських процесів в апроксимації Пуассона та Леві. Процеси нормуються нелінійними множниками. Знайдено асимптотичне зображення генераторів марковських процесів у просторі R^d.

Ключові слова: марковський процес, апроксимація Пуассона, апроксимація Леві, процес з незалежними приростами, генератор.

1. Вступ. Дослідженням марковських випадкових еволюцій та їхніх апроксимацій присвячено багато наукових праць, серед яких можна виділити [1]–[7]. Зокрема, в [3] досліджено процеси з незалежними приростами в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. В таких процесах відсутня дифузійна складова, а між стрибками протікає марковський процес. В апроксимаціях Пуассона та Леві генератор процесу нормується лінійним множником $\frac{t}{\varepsilon}$ [1]. Проте в деяких випадках таке нормування не доцільне. Тому виникає потреба розглядати нормуючий множник, як нелінійну функцію $\dfrac{t}{g(\varepsilon)}$. Мета нашої праці — знайти такі параметри в зображенні генератора випадкового процесу з незалежними приростами у випадку d-вимірного евклідового простору R^d.

2. Апроксимація Пуассона. Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ та траєкторіями в області визначення простору $R^d[0;\infty)$, які нормуються множником $g_1(\varepsilon) \to 0$, $g_1(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta\big(\tfrac{t}{g_1(\varepsilon)}\big), \quad t \geqslant 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, які визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_{R^d} (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv),$$

2010 Mathematics Subject Classification: 60J25 де $\varphi(u)$ — дійснозначна, дорівнює 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u)$ належить класу $C^5(R^d)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$. Ядро інтенсивності Γ^ε належить класу $C^3(R^d)$. Таке ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації:

(P1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int\limits_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\Big(\sum_{k=1}^{d} b_k + \theta_b^\varepsilon\Big)$$

і

$$c_\varepsilon = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\Big(\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r + \theta_c^\varepsilon\Big),$$

де $v = (v_1, v_2, \dots, v_r)$, $b < \infty, c < \infty$, $|\theta_b^\varepsilon| \to 0$, $|\theta_c^\varepsilon| \to 0$, $g_1(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

(P2) Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне зображення:

$$\Gamma_g^\varepsilon = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon).$$

для всіх g, які належать класу $C^3(R^d)$, $|\theta_g^\varepsilon| \to 0$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$, задано на класі функцій, що визначає Γ_g таким співвідношенням:

$$\Gamma_g = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^0(dv).$$

(P3) У граничному генераторі відсутня дифузійна складова, тобто виконується така умова:

$$c = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^0(dv) = 0.$$

(P4) Справджується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int\limits_{|v|>c} vv^T\Gamma^0(dv) = 0,$$

яке визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

Теорема 1. *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)$$

у схемі пуассонової апроксимації має таке асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \sum_{k=1}^{d} b_k \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{d} v_k \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^0(dv) + \theta^\varepsilon\varphi,$$

де $|\theta^\varepsilon|\to 0$, $g_1(\varepsilon)\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Доведення. Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)=(g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v)-\varphi(u)-$$

$$-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Big]\Gamma^\varepsilon(dv)+(g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Gamma^\varepsilon(dv)+$$

$$+\frac{1}{2}(g_1(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k,r=1}^d v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція

$$\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}$$

належить класу $C^3(R^d)$.

З умов **(P1)**, **(P2)** матимемо

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=\int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Big]\Gamma^0(dv)+$$

$$+\sum_{k=1}^d b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d c_kc_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+\theta_b^\varepsilon+\theta_c^\varepsilon+\theta_\psi^\varepsilon.$$

Застосовуючи умову **(P3)**, отримаємо таке асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=\sum_{k=1}^d b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Big]\Gamma^0(dv)+\theta^\varepsilon\varphi.$$

Теорему доведено. □

3. Апроксимація Леві. Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами, які нормуються множником $g_2(\varepsilon)$, де $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon))$

$$\eta_2^\varepsilon(t)=\eta\big(\tfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\big),\quad t\geqslant 0,$$

де $\eta(t)$ — процес з незалежними приростами, які визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}(\varphi(u+v)-\varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv),$$

де $\varphi(u)$ — дійснозначна, дорівнює 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u)$ належить класу $C^5(R^d)$, $u=(u_1,u_2,\dots,u_r)$. Ядро інтенсивності Γ^ε належить класу $C^3(R^d)$. Таке ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0)=0$.

Нехай виконуються умови апроксимації Леві.

(L1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int\limits_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\sum_{k=1}^{d} b_k^1 + g_2(\varepsilon)\Big(\sum_{k=1}^{d} b_k + \theta_b^\varepsilon\Big)$$

та

$$c_\varepsilon = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)\Big(\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r + \theta_c^\varepsilon\Big),$$

де $v = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$, $b_k < \infty, c_k < \infty$, $|\theta_b^\varepsilon| \to 0$, $|\theta_c^\varepsilon| \to 0$, $g_2(\varepsilon) \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

(L2) Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне зображення:

$$\Gamma_g^\varepsilon = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon)$$

для всіх g, які належать класу $C^3(R^d)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$, задано на класі функцій, що визначає Γ_g таким співвідношенням:

$$\Gamma_g = \int\limits_{R^d} g(v)\Gamma^0(dv).$$

(L3) Виконується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int\limits_{|v|>c} vv^T\Gamma^0(dv) = 0,$$

яке визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

Теорема 2. *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)$$

у схемі апроксимації Леві має таке асимптотичне зображення:

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d} b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{d}(b_k - b_k^0)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}(c_k - c_k^0)\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r} +$$

$$+\int\limits_{R^d}\Big[\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{d} v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Big]\Gamma^{(0)}(dv) + \theta^\varepsilon\varphi,$$

де $b_0 = \int\limits_{R^d} v\Gamma^{(0)}(dv)$, $c_0 = \int\limits_{R^d} vv^T\Gamma^{(0)}(dv)$, $|\theta^\varepsilon|\to 0$, $g_1(\varepsilon)\to 0$, $g_2(\varepsilon)\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Доведення. Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv) =$$

$$(g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\right]\Gamma^\varepsilon(dv)+$$

$$(g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Gamma^\varepsilon(dv)+\frac{1}{2}(g_2(\varepsilon))^{-1}\int\limits_{R^d}\sum_{k,r=1}^d v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція

$$\psi_u(v) = \varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}$$

належить класу $C^3(R^d)$.

З умов **(L1)**, **(L2)** матимемо

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d v_k v_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\right]\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^d b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^d b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d c_k c_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+\theta_b^\varepsilon+\theta_c^\varepsilon+\theta_\psi^\varepsilon.$$

Застосовуючи умову **(L3)** та звівши відповідні доданки, отримаємо асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^d b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^d (b_k-b_k^0)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^d (c_k-c_k^0)\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+$$

$$+\int\limits_{R^d}\left[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^d v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\right]\Gamma^{(0)}(dv)+\theta^\varepsilon\varphi.$$

Теорему доведено. □

Отже, таке нормування дає змогу оцінити стрибки в апроксимації процесів з незалежними приростами в просторі R^d та знайти їхні асимптотичне зображення.

Список використаної літератури

1. В.С. Королюк, *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Доп. НАН України (2010), no. 6, 22–26.
2. H. Chernoff, *Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Statist. **23** (1952), no, 4, 493–655.
3. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large deviation for stochastic processes*, AMS, Math. Surveys and Monographs, Vol. **131**, 2006.
4. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic systems in merging phase space*, World Sc. Publ., 2005.

5. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Київ, Наукова думка, 1976.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії.* Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 5, 643–650.
7. А.В. Свищук, *Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций*, Ин-т мат. АН УССР. 1990, С. 102–111.

Стаття: надійшла до редколегії 14.11.2017
доопрацьована 10.12.2017
прийнята до друку 11.12.2017

NONLINEAR NORMALIZATION FOR GENERATORS OF MARKOV PROCESSES IN R^d

Oksana YAROVA

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

The generators of Markov processes in the Poisson and Levy approximation are considered. These processes are normalized by nonlinear factors. An asymptotic representation for generators of Markov processes is found in R^d.

Key words: Markov process, Poisson approximation, Levi approximation, process with independent increments, generator.