ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 58–71
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 58–71

УДК 515.124

ПЛОСКО РОЗМІЩЕНІ МНОЖИНИ ТОЧОК У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Валерій КУЗЬМИЧ

Херсонський державний університет
вул. Університетська, 27, 73000, Херсон
e-mails: kuzmich@ksu.ks.ua, kuzmich121251@ukr.net

Розглянуто поняття кута у довільному метричному просторі як упорядкованої трійки елементів цього простору. Як числову характеристику кута вибрали значення його косинуса у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров. Такий підхід дає змогу ввести поняття плоского розміщення для точок метричного простору, не застосовуючи для цього поняття його повноти. Праця продовжує дослідження В. Ф. Кагана, який вичерпно вивчив поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Наведено приклади застосування цих понять у конкретних метричних просторах.

Ключові слова: метричний простір, пряма лінія, прямолінійний образ, площина, паралельність, перпендикулярність, тетраедр.

Вступ. У довільному метричному просторі (X, ρ) єдиною його числовою характеристикою є відстань $\rho(a, b)$ між довільними елементами (точками) a і b простору. Цим частково можна пояснити значні проблеми у спробах провести його "геометризацію", тобто ввести аналоги основних геометричних понять геометрії Евкліда — прямої лінії, кута, лінії, площини, поверхні. Введення цих понять потребує властивості повноти простору. Евклід у своїх "Началах" означив лінію як "довжину без ширини", а пряму лінію як "ту, що рівно розміщена стосовно до точок на ній" [1, с. 11]. Аналогічні означення, які ґрунтуються на інтуїтивному сприйнятті цих об'єктів, Евклід дав площині, куту. Розуміючи недосконалість цих означень, Д. Гільберт в "Основах геометрії" описав властивості основних геометричних понять через співвідношення між ними, які подано у вигляді груп аксіом [2, с. 3–4]. Поняття кута Д. Гільберт вводить як систему двох променів [2, с. 10]. У метричному просторі кут між двома геодезичними означають як границю неперервного відображення певної множини плоских кутів [3, с. 35].

2010 Mathematics Subject Classification: 30L05

На наш погляд, у довільному метричному просторі, в окремих випадках (не намагаючись створити повний аналог геометрії Евкліда), можна ввести поняття кута, паралельності та перпендикулярності без вимоги повноти цього простору. Аналогічно В. Ф. Каган розглядав поняття "прямолінійного образу" множини точок метричного простору як аналог прямої лінії [4, с. 527]. За ознаку цих властивостей можна взяти одну з числових характеристик плоского кута у геометрії Евкліда [3, с. 36]. У цьому випадку можна ввести поняття "плоского образу" множини точок довільного метричного простору як аналог площини у геометрії Евкліда. Як ознаки належності точок до "плоского образу" можна використати умову рівності нулю об'єму тетраедра, усі вершини якого належать одній площині [5].

1. Постановка задачі. Надалі будемо розглядати метричний простір, який містить не менше чотирьох точок (усі точки простору будемо вважати різними). Ми не розглядатимемо питання існування точок простору, які задовольняють певні умови, усі співвідношення будемо визначати лише між заданими точками. Такий підхід дещо звужує область застосування результатів, однак дасть змогу уникнути необхідності обґрунтування існування таких точок.

Спочатку дамо означення кута для трьох точок метричного простору.

Означення 1. Нехай a, b і c — довільні точки метричного простору (X, ρ). Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будемо називати *кутом з вершиною у точці* b, і позначати: $\angle(a, b, c)$. Пари точок (a, b) і (b, c) будемо називати *сторонами кута.*

Ми будемо користуватись комутативним (симетричним) означенням кута, тобто кути $\angle(a, b, c)$ і $\angle(c, b, a)$ вважатимемо одним кутом.

Щоб порівняти кути між собою, введемо їхню числову характеристику, використавши значення косинуса кута трикутника через довжини трьох його сторін у геометрії Евкліда [3, с. 36].

Означення 2. Нехай a, b і c — довільні точки метричного простору (X, ρ). *Характеристикою кута* $\angle(a, b, c)$, або *кутовою характеристикою*, будемо називати дійсне число $\varphi(a, b, c)$, яе обчислюється за формулою

$$\varphi(a, b, c) = \frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(b, c) - \rho^2(a, c)}{2\rho(a, b)\rho(b, c)}. \tag{1}$$

Метричний простір (X, ρ), в якому введено поняття кута за означенням 1 і його характеристику за формулою (1), називатимемо *метричним простором з кутовою характеристикою* і позначати Π.

З рівності (1) легко отримати умову "прямолінійного розміщення" трьох точок простору Π. Справді, при $\varphi(a, b, c) = 1$ отримуємо рівність: $\rho(a, b) = \rho(b, c) + \rho(a, c)$, або $\rho(b, c) = \rho(a, b) + \rho(a, c)$. У цьому випадку кут $\angle(a, b, c)$ треба вважати нульовим, оскільки його вершина, точка b, "лежить поза точками" a і c. При $\varphi(a, b, c) = -1$ отримуємо рівність: $\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c)$, і кут $\angle(a, b, c)$ треба вважати розгорнутим, оскільки його вершина, точка b, "лежить між точками" a і c.

Тепер можна дати означення "прямолінійного розміщення" трьох точок простору з використанням кутової характеристики.

Означення 3. Будемо казати, що точки a, b, c простору Π *прямолінійно розміщені*, якщо $\varphi(a,b,c)=\pm 1$.

Із наведеного випливає, що з трьох прямолінійно розміщених точок одна "лежить між двома іншими", кожна з яких "лежить поза двома іншими".

Означення 4. Будемо казати, що множина A точок простору Π прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені (див. [4, с. 527]).

Приклад 1. Для ілюстрації означення 4 розглянемо простір R_1^n, елементами якого є впорядковані групи з n дійсних чисел $x=(x_1,...,x_n)$. Якщо відстань між точками x і y простору означити за формулою $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^n |x_k-y_k|$, то цей простір стає метричним [6, с. 42]. Нехай для будь-яких трьох точок $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$ і $z=(z_1,...,z_n)$ множини P виконуються нерівності $x_k\leqslant y_k\leqslant z_k$ для усіх значень $k=1,2,...,n$. Доведемо, що множина P прямолінійно розміщена у просторі R_1^n. Справді, правильні рівності

$$\rho(x,z)=\sum_{k=1}^n |x_k-z_k|=\sum_{k=1}^n (z_k-x_k)=\sum_{k=1}^n ((z_k-y_k)+(y_k-x_k))=$$

$$=\sum_{k=1}^n (z_k-y_k)+\sum_{k=1}^n (y_k-x_k)=\sum_{k=1}^n |z_k-y_k|+\sum_{k=1}^n |y_k-x_k|=$$

$$=\rho(y,z)+\rho(x,y),$$

а це й означає, що точки x, y і z розміщені прямолінійно. З довільності вибору цих точок, за означенням 4 випливає прямолінійна розміщеність множини R_1^n.

З прикладу 1 можна зробити висновок, що прямолінійна розміщеність точок простору характеризує певну "монотонність" множини цих точок стосовно метрики простору.

Ми не будемо детальніше розглядати властивість прямолінійної розміщеності точок метричного простору, оскільки досить вичерпно для точок прямої лінії у геометрії Евкліда це зроблено у праці В. Ф. Кагана [7, розділ XIX].

Ми вважаємо, що досить наочним є наступний приклад відмінності між аксіоматичним методом геометризації метричного простору та запропонованим у цій роботі.

Приклад 2. Розглянемо простір $C_{[0,1]}$ функцій, неперервних на відрізку $[0,1]$. Якщо відстань між елементами $f(x)$ та $g(x)$ простору визначити за правилом

$$\rho(f,g)=\max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|,$$

то він стає метричним [6, с. 43]. У цьому просторі візьмемо чотири елементи

$$y_1=x+1,\quad y_2=x,\quad y_3=x-2,\quad y_4=-x.$$

Знайдемо відстані між цими елементами

$$\rho(y_1,y_2)=1,\ \rho(y_1,y_3)=3,\ \rho(y_1,y_4)=3,\ \rho(y_2,y_3)=2,\ \rho(y_2,y_4)=2,\ \rho(y_3,y_4)=2.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = -1, \quad \varphi(y_1, y_2, y_4) = -1, \quad \varphi(y_3, y_2, y_4) = 0,5.$$

З першої рівності, за означенням 3, випливає, що точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно, а друга рівність свідчить про те, що точки y_1, y_2, y_4 теж прямолінійно розміщені. У евклідовій геометрії це означає, що усі чотири точки прямолінійно розміщені, а точки y_3 і y_4 збігаються [7, с. 260]. Однак третя рівність суперечить цьому.

Приклад 2 вказує на недостатність однієї лиш метрики для однозначності "прямолінійного образу". Цей факт можна пояснити тим, що у геометрії Евкліда відповідна властивість закріплена аксіомами [2, с. 3]. Неевклідову інтерпретацію прикладу 2 можна побачити на рис. 1. На ньому за відстань між точками простору взято як довжину певної дуги, що з'єднує ці точки.

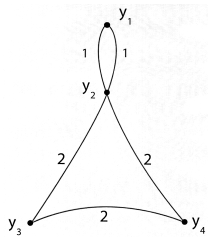

Рис. 1. Неоднозначність прямолінійної розміщеності точок.

Використовуючи рівність (1) можна, за аналогією з геометрією Евкліда, дати таке означення "*перпендикулярного розміщення*" точок простору.

Означення 5. Пари точок (a, b) і (b, c) простору Π будемо називати *перпендикулярно розміщеними*, якщо виконується рівність $\varphi(a, b, c) = 0$. Кут $\angle(a, b, c)$ називатимемо *прямим*.

Прикладом перпендикулярного розміщення пар точок у метричному просторі можуть слугувати ортогональні вектори евклідового простору (лінійного простору з введеним у ньому скалярним добутком). Зокрема, якщо до ортогонального нормованого базису простору l_2 (множина різних послідовностей $\{x_n\}$ дійсних чисел, для яких виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, а відстань між двома точками x і y цього простору визначається за формулою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$), приєднати точку $\{0\}$, то отримаємо таку множину точок цього простору:

$$e_0(0, 0, 0, \ldots),\ e_1(1, 0, 0, \ldots),\ e_2(0, 1, 0, \ldots),\ e_3(0, 0, 1, \ldots), \ldots .$$

Будь-який кут $\angle(e_i, e_0, e_k)$ цієї множини є прямим, оскільки $\rho(e_0, e_i) = \rho(e_0, e_k) = 1$ і $\rho(e_i, e_k) = \sqrt{2}$. За формулою (1) отримаємо $\varphi(e_i, e_0, e_k) = 0$, для будь-яких значень $i \neq k \neq 0$.

2. Основні результати. Для введення поняття плоского розміщення точок метричного простору використаємо умову достатню для того, щоб чотири різні точки належали одній площині у геометрії Евкліда. Така умова існує [8, с. 83]. Для чотирьох різних точок, що належать одній площині, шість відстаней a, b, c, d, e, f між ними задовольняють рівність

$$a^2c^2(b^2+d^2+e^2+f^2-a^2-c^2)+b^2d^2(a^2+c^2+e^2+f^2-b^2-d^2)+$$

$$+e^2f^2(a^2+c^2+b^2+d^2-e^2-f^2)=a^2b^2e^2+b^2c^2f^2+c^2d^2e^2+a^2d^2f^2.$$

Фактично, ця рівність означає рівність нулю об'єму тетраедра, для якого ці чотири точки є вершинами. Це випливає з відомої формули Юнгіуса об'єму тетраедра через довжини його ребер [9, с. 99–100]. Наведену вище рівність можна записати за допомогою визначника Келі-Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & a & e & d & 1 \\ a & 0 & b & f & 1 \\ e & b & 0 & c & 1 \\ d & f & c & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Обидві рівності занадто складні у використанні. У разі використання кутових характеристик ці умови можна спростити. У [5] ми отримани аналог формули Юнгіуса з використанням плоских кутів при одній вершині тетраедра. У цій же праці описано калькулятор, за допомогою якого можна обчислити об'єм тетраедра за довжинами усіх його ребер. Калькулятор враховує усі можливі комбінації цих ребер і робить висновок про існування тетраедра для кожної з комбінацій. Сам калькулятор розміщено за адресою:

http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645.

Повернувшись до прикладу 2 цієї праці, за допомогою калькулятора легко довести, що у просторі $C_{[0,1]}$ не існує тетраедра з вершинами у точках y_1, y_2, y_3, y_4. Тобто, у геометрії Евкліда неможливо побудувати тетраедр з такими довжинами ребер, при заданій орієнтації його вершин. Цей факт теж пояснює неоднозначність, яка виникла з прямолінійною розміщеністю цих точок у просторі $C_{[0,1]}$.

Якщо через a_1, a_2, a_3 позначити довжини трьох ребер тетраедра, що виходять з однієї вершини, а через $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ відповідні плоскі кути між ними, то формула об'єму тетраедра набуде вигляду [5, с. 61]

$$V=\frac{a_1a_2a_3}{6}\sqrt{1+2cos\gamma_{12}cos\gamma_{13}cos\gamma_{23}-cos^2\gamma_{12}-cos^2\gamma_{13}-cos^2\gamma_{23}}.$$

Тепер умову рівності нулю об'єма тетраедра можна записати набагато простіше

$$1+2cos\gamma_{12}cos\gamma_{13}cos\gamma_{23}-cos^2\gamma_{12}-cos^2\gamma_{13}-cos^2\gamma_{23}=0.$$

Використовуючи визначник третього порядку, цю рівність можна записати так:

$$\begin{vmatrix} 1 & cos\gamma_{12} & cos\gamma_{13} \\ cos\gamma_{12} & 1 & cos\gamma_{23} \\ cos\gamma_{13} & cos\gamma_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отриману рівність тепер можна використати для означення плоского розміщення точок метричного простору.

Означення 6. Будемо казати, що точки a, b, c, d простору Π *плоско розміщені*, якщо виконується рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Це означення має властивість симетричності, тобто, у разі виконання рівності (2) вона буде виконуватись і для випадків, коли за вершину кутів вибирати точки a, c, d (об'єм піраміди все одно дорівнюватиме нулю).

Означення 6 можна розглядати як узагальнення означення 3. Справді, рівність $\varphi(a,b,c) = \pm 1$, що за означенням 3 є ознакою прямолінійного розміщення трьох точок простору Π, можна записати за допомогою визначника другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) \\ \varphi(a,b,c) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для множини точок простору природно навести таке означення.

Означення 7. Будемо казати, що множина A точок простору Π плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені.

Повернувшись знову до прикладу 2 цієї праці, перепозначимо точки простору: $y_1 = a, y_2 = b, y_3 = c, y_4 = d$, і підставимо у рівність (2) відповідні значення кутових характеристик

$$\varphi(a,b,c) = -1, \quad \varphi(a,b,d) = -1, \quad \varphi(c,b,d) = \frac{1}{2}.$$

Отримаємо рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то за означенням 6 точки a, b, c, d не є плоско розміщеними. Цей факт додатково пояснює неоднозначність прямолінійного розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4.

Приклад 3. Наведемо приклад плоского розміщення точок простору. Для цього у просторі $C_{[0,1]}$ візьмемо чотири точки

$$y_1 = x, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = x - 1, \quad y_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 0,5).$$

Знайдемо відстані між цими точками

$$\rho(y_1, y_2) = 1, \quad \rho(y_1, y_3) = 1, \quad \rho(y_1, y_4) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\rho(y_2, y_3) = 1, \quad \rho(y_2, y_4) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \rho(y_3, y_4) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_4, y_2) = -0{,}5, \quad \varphi(y_1, y_4, y_3) = -0{,}5, \quad \varphi(y_2, y_4, y_3) = -0{,}5.$$

Для зручності обчислень перепозначимо точки

$$y_1 = a, \quad y_4 = b, \quad y_2 = c, \quad y_3 = d.$$

Підставимо ці значення у формулу (2). Матимемо:

$$\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

За означенням 6 точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщені.

З іншого боку, легко помітити, що ніякі три з цих точок не розміщені прямолінійно (немає відстані, що дорівнює сумі двох інших). У геометрії Евкліда точка y_4 є центром рівностороннього трикутника з вершинами у точках y_1, y_2, y_3.

Властивість прямолінійності розміщення точок значною мірою залежить від метрики простору. Про це свідчить такий приклад.

Приклад 4. Розглянемо простір C_L функцій, неперервних на відрізку [0;1], в якому відстань між точками $f(x)$ та $g(x)$ обчислюється за правилом

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Такий простір є метричним [10, с. 105]. Функції

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x - 2, \quad y_4 = -x,$$

розглянуті у прикладі 2, також є точками простору C_L. Знайдемо відстані між ними у цьому просторі

$$\rho(y_1, y_2) = 1, \quad \rho(y_1, y_3) = 3, \quad \rho(y_1, y_4) = 2,$$

$$\rho(y_2, y_3) = 2, \quad \rho(y_2, y_4) = 1, \quad \rho(y_3, y_4) = 1.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = -1, \quad \varphi(y_1, y_2, y_4) = -1, \quad \varphi(y_3, y_2, y_4) = 1.$$

З цих рівностей, за означенням 3, випливає, що усі чотири точки розміщені прямолінійно у такому порядку: y_1, y_2, y_4, y_3.

Лема 1. *Якщо точки a, b, c, d простору П прямолінійно розміщені, то вони плоско розміщені.*

Доведення. Без втрат для загальності вважатимемо, що точки розміщені у тому самому порядку що і записані, тобто, точка b розташована між точками a і c, а точка c розташована між точками b і d. У цьому випадку кутові характеристики будуть: $\varphi(a, b, c) = -1, \varphi(a, b, d) = -1, \varphi(c, b, d) = 1$. Підставивши ці значення у рівність (2), отримаємо рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, за означенням 6 точки a, b, c, d плоско розміщені. □

З леми 1 випливає, що точки y_1, y_2, y_3, y_4, які розглядали у прикладі 4, плоско розміщені у просторі C_L.

Надалі нам потрібне буде поняття суміжного кута у метричному просторі. У геометрії Евкліда це кут, який доповнює заданий кут до розгорнутого. Вище ми довели, що чотири точки розглянуті у прикладі 2 не є плоско розміщеними, хоча серед них є дві трійки точок, які розміщені прямолінійно. Отже, для введення поняття суміжного кута у довільному метричному просторі потрібні будуть додаткові вимоги до точок, що утворюють ці кути.

Спочатку визначимо критерій плоскої розміщеності чотирьох точок простору Π у випадку, коли три з них прямолінійно розміщені.

Лема 2. *Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, а кут $\angle(a, b, c)$ розгорнутий. Для того, щоб точки a, b, c, d цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$.*

Доведення. Припустимо, що точки a, b, c, d плоско розміщені. Оскільки, за умовою, кут $\angle(a, b, c)$ розгорнутий, то виконується рівність $\varphi(a, b, c) = -1$. Із умови (2) плоскої розміщеності точок a, b, c, d отримуємо рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \varphi(c,b,d) \\ -1 & 1 & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(c,b,d) & \varphi(a,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$1 - 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

З цієї рівності отримуємо $(\varphi(a,b,d) + \varphi(c,b,d))^2 = 0$, або $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$.

Нехай тепер, навпаки, виконується рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$. Підставимо значення кутових характеристик відповідних кутів у ліву частину формули (2). Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -\varphi(c,b,d) \\ -1 & 1 & \varphi(c,b,d) \\ -\varphi(c,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \varphi^2(c,b,d) + \varphi^2(c,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

За означенням 6 точки a, b, c, d плоско розміщені. □

Зауважимо, що лема 2 справджується також у випадку, коли усі чотири точки розміщені прямолінійно, оскільки у цьому випадку теж виконується рівність, наведена у формулюванні леми. Тобто, лема 2 узагальнює результат леми 1.

Із леми 2 випливає, що рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$ логічно взяти за основу означення суміжного кута.

Означення 8. Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, а точка d цього простору така, що виконується рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$. Тоді кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ будемо називати *суміжними*.

Із означення 8 і леми 2 випливає, що точки, які утворюють суміжні кути, плоско розміщені. Крім того, розгорнутий і нульовий кути — суміжні, а з рівності $0 = -0$ випливає, що кут суміжний з прямим кутом теж є прямим. Зокрема, у прикладі 4 кути $\angle(y_1, y_2, y_4)$ і $\angle(y_3, y_2, y_4)$ є суміжними у просторі C_L, оскільки виконуються рівності $\varphi(y_1, y_2, y_4) = -1$ і $\varphi(y_3, y_2, y_4) = 1$, а усі чотири точки розміщені прямолінійно.

З іншого боку, чотири точки з прикладу 2 не утворюють суміжні кути у просторі $C_{[0,1]}$, інакше, за лемою 2, вони мали бути плоско розміщеними.

У геометрії Евкліда суміжний кут розуміють як кут, який доповнює заданий до розгорнутого (див. [1, с. 11] і [2, с. 12]). У просторі Π такого означення суміжного кута дати не можна, оскільки у цьому просторі навіть для прямого кута, кут який доповнює його до розгорнутого, не обов'язково є прямим.

Приклад 5. Розглянемо точки

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x - 2, \quad y_4 = -x$$

простору $C_{[0,1]}$, які розглядали у прикладі 2. Візьмемо точку $y_5 = (1 - \sqrt{2})x + 1$, що також належить простору $C_{[0,1]}$. Знайдемо відстані

$$\rho(y_1, y_5) = \sqrt{2}, \quad \rho(y_2, y_5) = 1, \quad \rho(y_3, y_5) = 3, \quad \rho(y_4, y_5) = 3 - \sqrt{2}.$$

Крім того, $\rho(y_1, y_2) = 1$.

Отож, кут $\angle(y_1, y_2, y_5)$ є прямим, оскільки за формулою (1) отримаємо $\varphi(y_1, y_2, y_5) = 0$. У прикладі 2 доведено, що точки y_1, y_2, y_3 прямолінійно розміщені, і точки y_1, y_2, y_4 теж прямолінійно розміщені. Тому варто очікувати, що кути $\angle(y_3, y_2, y_5)$ і $\angle(y_4, y_2, y_5)$, які доповнюють кут $\angle(y_1, y_2, y_5)$ до розгорнутого, теж мають бути прямими. Однак за формулою (2) отримуємо: $\varphi(y_3, y_2, y_5) = -1$ і $\varphi(y_4, y_2, y_5) = \dfrac{3\sqrt{2} - 3}{2}$.

Отже, приклад 5, на наш погляд, засвідчує доречність означення 8 для введення поняття суміжного кута у просторі Π.

Теорема 1, як і лема 2, дає критерій плоскої розміщеності чотирьох точок простору Π у випадку, коли три з них утворюють прямий кут.

Теорема 1. *Нехай у метричному просторі Π кут $\angle(a, b, c)$ є прямим. Для того, щоб точки a, b, c, d були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi^2(a, b, d) + \varphi^2(c, b, d) = 1. \tag{3}$$

Доведення. З означення 5 випливає рівність: $\varphi(a, b, c) = 0$. Підставимо це значення у рівність (2) і розкриємо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varphi(a, b, d) \\ 0 & 1 & \varphi(c, b, d) \\ \varphi(a, b, d) & \varphi(c, b, d) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \varphi^2(a, b, d) - \varphi^2(c, b, d).$$

Із цієї рівності та означення 6 випливає, що рівність (3) необхідна і достатня для того, щоб за умови теореми точки a, b, c, d були плоско розміщені. $\square$

Ця теорема має самостійне значення, оскільки за її допомогою у довільному метричному просторі можна визначити прямокутну систему координат стосовно трьох фіксованих точок цього простору.

Теорема 2 дає змогу визначити встановлювати рівність числових характеристик кутів, які мають прямолінійно розміщені відповідні сторони.

Теорема 2. *Нехай a, b, c, d точки простору Π, а кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим. Для того, щоб виконувалась рівність $\varphi(b, a, d) = \varphi(c, a, d)$, необхідно і достатньо, щоб кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ були суміжними.*

Доведення. За умовою теореми кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, і отже, точки a, b, c прямолінійно розміщені. Звідси отримуємо рівність $\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Припустимо, що кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ суміжні. Тоді виконується рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$. Підставимо у цю рівність відповідні значення кутових характеристик. Матимемо

$$\frac{\rho^2(a,b) + \rho^2(b,d) - \rho^2(a,d)}{2\rho(a,b)\rho(b,d)} = -\frac{\rho^2(b,c) + \rho^2(b,d) - \rho^2(c,d)}{2\rho(b,c)\rho(b,d)};$$

$$\rho(b,c)(\rho^2(a,b) + \rho^2(b,d) - \rho^2(a,d)) = -\rho(a,b)(\rho^2(b,c) + \rho^2(b,d) - \rho^2(c,d));$$

$$\rho(b,c)\rho^2(a,b) + \rho(b,c)\rho^2(b,d) - \rho(b,c)\rho^2(a,d)) =$$
$$= -\rho(a,b)\rho^2(b,c) - \rho(a,b)\rho^2(b,d) + \rho(a,b)\rho^2(c,d);$$

$$\rho(b,c)\rho^2(a,d) - \rho(b,c)\rho^2(b,d) - \rho(a,b)\rho^2(b,d) =$$
$$= \rho(b,c)\rho^2(a,b) + \rho(a,b)\rho^2(b,c) - \rho(a,b)\rho^2(c,d).$$

Додамо до обох частин рівності вираз

$$\rho^3(a,b) + \rho^2(a,b)\rho(b,c) + \rho(a,b)\rho^2(a,d).$$

Одержуємо

$$\rho^3(a,b) + \rho^2(a,b)\rho(b,c) + \rho(a,b)\rho^2(a,d) + \rho(b,c)\rho^2(a,d) - \rho(b,c)\rho^2(b,d) -$$
$$- \rho(a,b)\rho^2(b,d) = \rho^3(a,b) + \rho^2(a,b)\rho(b,c) + \rho(a,b)\rho^2(a,d) +$$
$$+ \rho(b,c)\rho^2(a,b) + \rho(a,b)\rho^2(b,c) - \rho(a,b)\rho^2(c,d).$$

Згрупуємо у лівій частині рівності перший, третій і шостий доданки, винесемо з них за дужки множник $\rho(a, b)$, а згрупувавши другий, четвертий і п'ятий доданки, винесемо з них за дужки множник $\rho(b, c)$. У правій частині рівності винесемо з усіх доданків за дужки множник $\rho(a, b)$. У підсумку отримаємо рівність

$$\rho(a,b)(\rho^2(a,b) + \rho^2(a,d) - \rho^2(b,d)) + \rho(b,c)(\rho^2(a,b) + \rho^2(a,d) - \rho^2(b,d)) =$$
$$= \rho(a,b)((\rho^2(a,b) + 2\rho(a,b)\rho(b,c) + \rho^2(b,c)) + \rho^2(a,d) - \rho^2(c,d));$$

$$(\rho(a,b) + \rho(b,c))(\rho^2(a,b) + \rho^2(a,d) - \rho^2(b,d)) =$$
$$= \rho(a,b)((\rho(a,b) + \rho(b,c))^2 + \rho^2(a,d) - \rho^2(c,d)),$$

або

$$\rho(a,c)(\rho^2(a,b) + \rho^2(a,d) - \rho^2(b,d)) = \rho(a,b)(\rho^2(a,c) + \rho^2(a,d) - \rho^2(c,d)).$$

Поділимо обидві частини рівності на вираз $2\rho(a, b)\rho(a, c)\rho(a, d)$. Отримаємо рівність

$$\frac{\rho^2(a,b) + \rho^2(a,d) - \rho^2(b,d)}{2\rho(a,b)\rho(a,d)} = \frac{\rho^2(a,c) + \rho^2(a,d) - \rho^2(c,d)}{2\rho(a,c)\rho(a,d)},$$

або $\varphi(b,a,d) = \varphi(c,a,d)$.

Оскільки ми провели тотожні перетворення (ні одна з відстаней не дорівнює нулю), то, провівши ці перетворення у зворотному порядку, отримаємо початкову рівність, що і доводить теорему. $\square$

Теорема 2 дає умову рівності кутових характеристик кутів, у яких спільна вершина, а сторони прямолінійно розміщені. Цю умову можна використати як означення рівності самих кутів.

Порівнявши лему 2 і теорему 2, можна зробити висновок про те, що у випадку, коли у просторі Π є три прямолінійно розміщені точки a, b, c, а кут $\angle(a,b,c)$ розгорнутий, то множину усіх точок d цього простору, плоско розміщених із заданими, можна описати як точки, для яких кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ — суміжні, або для яких кути $\angle(b,a,d)$ і $\angle(c,a,d)$ мають рівні характеристики.

Як і у випадку прямолінійного розміщення точок простору Π, треба очікувати неоднозначності при плоскому розміщенні точок цього простору. Справді, про це свідчить такий приклад.

Приклад 6. Розглянемо точки

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = x, \quad y_5 = (1 - \sqrt{2})x + 1$$

простору $C_{[0,1]}$, які ми розглядали у прикладах 2 і 5. Крім того, розглянемо точки $y_6 = (\sqrt{2} - 1)(x - 1)$ і $y_7 = (2 - \sqrt{2})x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, що також належать простору $C_{[0,1]}$. Знайдемо відстані

$$\rho(y_1,y_2) = 1, \quad \rho(y_1,y_5) = \sqrt{2}, \quad \rho(y_1,y_6) = 2, \quad \rho(y_1,y_7) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho(y_2,y_5) = 1,$$

$$\rho(y_2,y_6) = 1, \quad \rho(y_2,y_7) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho(y_5,y_6) = \sqrt{2}, \quad \rho(y_5,y_7) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho(y_6,y_7) = 2-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Із отриманих рівностей випливає, що точки y_1, y_2, y_6 прямолінійно розміщені, оскільки виконується рівність

$$\rho(y_1,y_6) = \rho(y_1,y_2) + \rho(y_2,y_6).$$

Доведемо, що кут $\angle(y_5,y_2,y_6)$ є прямим. Справді, за формулою (1) маємо $\varphi(y_5,y_2,y_6) = 0$. Крім того, у прикладі 5 довели, що кут $\angle(y_1,y_2,y_5)$ теж є прямим. Отож, ці кути є суміжними, і за теоремою 2 точки y_1, y_2, y_5, y_6 — плоско розміщені.

Тепер доведемо, що точки y_1, y_2, y_5, y_7 теж плоско розміщені. Для цього за формулою (1) обчислимо кутові характеристики

$$\varphi(y_1,y_2,y_7) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{і} \quad \varphi(y_5,y_2,y_7) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, виконується рівність

$$\varphi^2(y_1,y_2,y_7) + \varphi^2(y_5,y_2,y_7) = 1.$$

Оскільки кут $\angle(y_1,y_2,y_5)$ є прямим, то з отриманої рівності і теореми 1 випливає, що точки y_1, y_2, y_5, y_7 — плоско розміщені.

Для двох розглянутих множин точок три точки y_1, y_2, y_5 — спільні. У геометрії Евкліда цього достатньо для того, щоб усі п'ять точок y_1, y_2, y_5, y_6, y_7 належали одній площині. Однак у просторі Π це не завжди виконується. Доведемо, що точки y_2, y_5, y_6, y_7 не є плоско розміщеними. Для цього обчислимо кутову характеристику

$$\varphi(y_6, y_2, y_7) = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Отож, виконується рівність

$$\varphi^2(y_5, y_2, y_7) + \varphi^2(y_6, y_2, y_7) = \frac{5}{8}.$$

Оскільки кут $\angle(y_5, y_2, y_6)$ є прямим, то за теоремою 1 точки y_2, y_5, y_6, і y_7 не є плоско розміщеними.

Більше того, точки y_1, y_2, y_6, y_7 теж не є плоско розміщеними. Щоб упевнитись у цьому, за теоремою 2 достатньо порівняти характеристики кутів $\angle(y_1, y_2, y_7)$ і $\angle(y_6, y_2, y_7)$, оскільки точки y_1, y_2, y_6 прямолінійно розміщені.

Крім того, можна довести, що точки y_1, y_5, y_6, y_7 теж не є плоско розміщеними. Справді, точки y_1, y_5, y_7 прямолінійно розміщені, оскільки виконується рівність

$$\rho(y_1, y_5) = \rho(y_1, y_7) + \rho(y_5, y_7).$$

Крім того, кут $\angle(y_1, y_7, y_5)$ є розгорнутим. Тепер відповідно до леми 2 достатньо довести, що виконується співвідношення $\varphi(y_1, y_7, y_6) \neq -\varphi(y_5, y_7, y_6)$. Для цього обчислимо кутові характеристики

$$\varphi(y_1, y_7, y_6) = -\frac{3}{4}, \quad \varphi(y_5, y_7, y_6) = \frac{1}{4}.$$

Отже, точки y_1, y_5, y_6, y_7 не є плоско розміщеними.

Із рівності (2) можна отримати критерій плоского розміщення чотирьох точок метричного простору дещо в іншому вигляді, ніж у означенні 6.

Теорема 3. *Для того, щоб точки a, b, c, d простору Π були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a, b, c) = \varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a, b, d))(1 - \varphi^2(c, b, d))}. \tag{4}$$

Доведення. Перевіримо виконання рівності (2) у разі виконання умови теореми. Для цього розкриємо визначник у лівій частині рівності і підставимо в отриманий вираз рівність (4). Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a, b, c) & \varphi(a, b, d) \\ \varphi(a, b, c) & 1 & \varphi(c, b, d) \\ \varphi(a, b, d) & \varphi(c, b, d) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 2\varphi(a, b, c)\varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) - \varphi^2(a, b, c) - \varphi^2(a, b, d) - \varphi^2(c, b, d) =$$

$$=1 + 2\varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d)(\varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a, b, d))(1 - \varphi^2(c, b, d))})-$$

$$-(\varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) \pm \sqrt{(1 - \varphi^2(a, b, d))(1 - \varphi^2(c, b, d))})^2 - \varphi^2(a, b, d) - \varphi^2(c, b, d) =$$

$$= 1 + \varphi^2(a, b, d)\varphi^2(c, b, d) - (1 - \varphi^2(a, b, d))(1 - \varphi^2(c, b, d)) - \varphi^2(a, b, d) - \varphi^2(c, b, d) = 0.$$

Оскільки рівність (2) виконується, то точки a, b, c, d плоско розміщені.

Тепер припустимо, що точки a, b, c, d плоско розміщені у просторі Π. Тоді (наприклад, для точки b) має виконуватись рівність (2). Розкривши визначник у лівій частині, отримуємо рівність

$$1 + 2\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,c) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) = 0,$$

або

$$\varphi^2(a,b,c) - 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)\varphi(a,b,c) + \varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння стосовно $\varphi(a,b,c)$, отримуємо рівність (4). □

Лема 2 є частинним випадком теореми 3. Справді, за умовами леми 2 отримаємо

$$\varphi(a,b,c) = -1, \quad \varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d),$$

і рівність (4) перетворюється у тотожність.

У геометрії Евкліда рівність (4) має просте геометричне тлумачення: одна з вершин тетраедра розташована у площині основи, що утворена трьома іншими його вершинами. У цьому легко впевнитись, помітивши, що рівність (4) є аналогом формул косинуса суми або різниці двох кутів.

3. Висновки. З наведеного вище випливає, що у метричному просторі можна розглядати основні поняття евклідової геометрії без вимоги повноти самого простору. Однак значно зростає складність визначенням співвідношень між окремими множинами точок простору, оскільки не виконуються класичні аксіоми геометрії. Ці аксіоми необхідно замінювати певними аналітичними співвідношеннями між точками цих множин, і від самих співвідношень залежатиме внутрішня геометрична конструкція метричного простору.

Надалі треба працювати у напрямку визначення умов паралельності множин точок метричного простору та визначення співвідношень між поняттями паралельності та перпендикулярності множин точок метричного простору, які аналогічні до відомих класичних співвідношень.

Автор вдячний Ю. В. Кузьмичу за графічну підтримку тексту роботи.

Список використаної літератури

1. *Начала Евклида. Книги I–VI*, Пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовский, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1948.
2. Д. Гильберт, *Основания геометрии*, Сеятель, Петроград, 1923.
3. А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1948.
4. В. Ф. Каган, *Очерки по геометрии*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1963.
5. В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич, *Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра*, Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. пед. науки **36(249)** (2012), 55–64.
6. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища школа, Київ, 1974.
7. В. Ф. Каган, *Основания геометрии*, Ч. 2, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1956.
8. Я. П. Понарин, *Элементарная геометрия*, Ч. 1, МЦНМО, Москва, 2004.
9. Я. П. Понарин, *Элементарная геометрия*, Ч. 2, МЦНМО, Москва, 2006.

10. М. О. Давидов, *Курс математичного аналізу*, Ч. 3, Вища школа, Київ, 1979.

Стаття: надійшла до редколегії 31.05.2017
прийнята до друку 13.11.2017

FLAT PLACEMENT SET OF POINTS IN A METRIC SPACE

Valery KUZ'MICH

State University of Kherson
27, Universytetska Str., 73000, Kherson, Ukraine
e-mails: kuzmich@ksu.ks.ua, kuzmich121251@ukr.net

We consider the concept of angle in any metric space, a landscaped three elements of this space. As the numerical of this angle we choose the cosine in the Euclidean geometry, as is proposed by A. D. Aleksandrov. This approach allows us to introduce the concept of a flat placement for points of a metric space without applying this concept to its completeness. The paper, in some way, continues the investigations of V. F. Kagan, who exhaustively studied the concept of straight placing points in metric space. Examples of application of these concepts in specific metric spaces are given.

Key words: metric space, a straight line, straight image, plane, parallelism, perpendicularity, tetrahedron.