ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 208–216
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 208–216

УДК 514.763.4

ГРУПИ КОНФОРМНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО-КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ І ГОМОТЕТІЙ КЕЛЕРОВИХ МНОГОВИДІВ

Євген ЧЕРЕВКО

Одеський національний економічний університет,
вул. Преображенська, 8, Одеса, 65082
e-mail: cherevko@usa.com

Розглянуто інфінітезимальні перетворення локально конформно-келерових многовидів, які зберігають комплексну їхню структуру. Отримано вираз для похідної Лі форм Лі цих многовидів. Також досліджо зв'язок між групою конформних перетворень конформно-келерового многовиду та групою гомотетій келерового многовиду.

Ключові слова: келерові многовиди, локально конформно-келерові многовиди, форма Лі, інфінітезимальні перетворення, аналітичні векторні поля, похідна Лі.

1. Вступ. Об'єктом дослідження є локально конформно-келерові многовиди такі, що $\dim(M) = n = 2m > 2$. Конформно-келеровим многовидам присвячені праці багатьох дослідників. Локально конформно-келерові многовиди розглядали в [11], [2], [7]. Також варто згадати енциклопедичну роботу в цьому напрямі [9]. Інфінітезимальні конформні перетворення многовидів вивчали в [8], [5]. Питання інфінітезимальних конформних перетворень комплексних многовидів досліджували в [12]. Мета нашої праці — дослідити проблеми інфінітезимальних конформних перетворень локально конформно-келерових многовидів.

2. ЛКК-многовиди та інфінітезимальні перетворення. Спочатку подамо декілька необхідних означень.

Означення 1. *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J^i_j, що*

$$J^i_\alpha J^\alpha_j = -\delta^i_j \tag{1}$$

Тут δ^i_j — символ Кронекера.

Означення 2. *Многовид, на якому задано майже комплексну структуру J, називають майже комплексним многовидом.*

2010 Mathematics Subject Classification: 32Q15, 53A30, 53B35

Означення 3. *Майже комплексний многовид є майже ермітовим, якщо на ньому задана ермітова метрика*
$$J_i^{\alpha} J_j^{\beta} g_{\alpha\beta} = g_{ij}. \tag{2}$$

Майже ермітовий многовид позначаємо $\{M_n, J, g\}$.

Означення 4. *Майже ермітовий многовид* $\{M_n, J, g\}$ *є ермітовим, якщо майже комплексна структура є інтегровною* [1], [12].

Зауважимо таке: якщо майже комплексна структура J і многовид M_n будуть належати класу C^{ω}, то достатньою умовою інтегровності майже комплексної структури є тотожна рівність нулю тензора Нейєнхейса:
$$N_{ij}^k = J_i^{\alpha}\left(\partial_j J_{\alpha}^k - \partial_{\alpha} J_j^k\right) - J_j^{\alpha}\left(\partial_i J_{\alpha}^k - \partial_{\alpha} J_i^k\right) = 0, \tag{3}$$
або, що еквівалентно,
$$J_{i,j}^k = J_i^{\alpha} J_j^{\beta} J_{\alpha,\beta}^k. \tag{4}$$

Комою ми позначаємо коваріантну похідну в зв'язності, узгодженій з рімановою метрикою g_{ij}.

Якщо, до того ж, на ермітовому многовиді $\{M_n, J, g\}$ справджується
$$J_{i,j}^k = 0, \tag{5}$$
то він є *келеровим.*

Означення 5. *Ермітовий многовид M_n, має назву* локально конформно-келерового *(коротше, ЛКК-)* многовиду*, якщо існує відкрите покриття* $\mathfrak{U} = \left\{U_{\alpha}\right\}_{\alpha\in A}$ *многовиду M та система $\Sigma = \{\sigma_{\alpha} \colon U_{\alpha} \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ гладких функцій таких, що* $\left\{J|_{U_{\alpha}}, \hat{g}_{\alpha} = e^{-2\sigma_{\alpha}} g|_{U_{\alpha}}\right\}$ *– келерова структура для будь-якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_{\alpha}}$ до метрики $e^{-2\sigma_{\alpha}} g|_{U_{\alpha}}$ називається локально конформного перетворення структури. Функція σ називається визначальною функцією конформного перетворення* [2].

Відомо, що на ЛКК-многовиді форма Лі (Lee form), компоненти якої визначаються формулою [3]
$$\omega = \frac{1}{m-1}\delta\Omega \circ J \qquad \text{або} \qquad \omega_i = -\frac{2}{n-2} J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_i^{\beta}, \tag{6}$$
має бути замкненою
$$d\omega = 0.$$

Означення 6. *Перетворення многовиду M_n*
$$\overline{x}^h = x^h + t\xi^h(x^1, x^2, \dots, x^n), \tag{7}$$
де t – довільний малий параметр незалежний від x^i, називається інфінітезимального перетворення многовида M_n. Вектор $\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ називається генератором перетворення.

Похідна Лі (Lie derivative) тензора $\mathfrak{L}_{\xi} T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$ типу (p,q) уздовж векторного поля ξ в координатах набуває вигляду
$$\mathfrak{L}_{\xi} T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} = T_{j_1\dots j_q,s}^{i_1\dots i_p}\xi^s + T_{kj_2\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\xi^k{}_{,j_1} + \ldots + T_{kj_k\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\xi^k{}_{,j_1} - T_{j_1\dots j_q}^{li_2\dots i_p}\xi^{i_1}{}_{,l} - T_{j_1\dots j_q}^{i_1 i_2\dots l}\xi^{i_p}{}_{,l}. \tag{8}$$

Конформні інфінітезимальні перетворення характеризуються рівняннями [12]

$$\mathfrak{L}_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij}. \tag{9}$$

Відомо таке: коли векторне поле ξ породжує інфінітезимальні конформні перетворення, воно разом з інваріантом φ має задовольняти систему [6], [5]:

$$\begin{array}{l} 1)\ \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ 2)\ \varphi_{,i} = \varphi_i; \\ 3)\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij}; \\ 4)\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik} - \varphi_i g_{jk}); \\ 5)\ \varphi_{i,j} = \frac{2}{n-2}\left(\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i - \frac{g_{ij}}{2(n-1)}\left(\xi^\alpha R_{,\alpha} + \varphi R\right)\right). \end{array} \tag{10}$$

3. Тензор Нейєнхейса та форма Лі при конформних інфінітезимальних перетвореннях. Особливим випадком є ситуація, коли векторне поле $\xi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ породжує перетворення, що зберігає комплексну структуру [12]

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0. \tag{11}$$

Таке поле має назву *контраваріантного аналітичного* векторного поля. Варто зауважити таке: оскільки диференціювання Лі комутує з операцією зовнішнього диференціювання

$$d\mathfrak{L}_\xi\omega = \mathfrak{L}_\xi d\omega,$$

будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі. Отже, необхідною та достатньою умовою того, щоб при інфінітезимальних конформних перетвореннях многовид залишався ЛКК-многовидом, є збереження ермітовості, тобто збереження виконання умови (3), яку можна записати у термінах коваріантних похідних

$$N^k_{ij} = J^\alpha_i \left(J^k_{\alpha,j} - J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j \left(J^k_{\alpha,i} - J^k_{i,\alpha}\right) = 0.$$

Для цього потрібно, щоб

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = 0.$$

Якщо ми вимагаємо збереження комплексної структури, то похідна Лі тензора Нейєнхейса набуває вигляду

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = J^\alpha_i \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,j} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,i} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{i,\alpha}\right). \tag{12}$$

внаслідок (11).

Відома тотожність [12], що є правильною для будь-яких інфінітезимальних перетворень

$$\mathfrak{L}_\xi J^k_{i,j} - \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_i\right)_{,j} = J^\beta_i \mathfrak{L}_\xi \Gamma^k_{j\beta} - J^k_\beta \mathfrak{L}_\xi \Gamma^\beta_{ji}, \tag{13}$$

де Γ^k_{ji} – об'єкт зв'язності, узгоджений з метрикою g_{ij}. Для інфінітезимальних конформних перетворень

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^k_{ji} = \frac{1}{2}(\delta^k_i \varphi_j + \delta^k_j \varphi_i - \varphi^k g_{ij}) \tag{14}$$

Внаслідок вимоги збереження комплексної структури (11), и (14), підставивши у (13), отримуємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J^k_{i,j} = \frac{1}{2} J^\beta_i (\delta^k_\beta \varphi_j + \delta^k_j \varphi_\beta - \varphi^k g_{\beta j}) - \frac{1}{2} J^h_\beta (\delta^\beta_i \varphi_j + \delta^\beta_j \varphi_i - \varphi^\beta g_{ij}) = \\ = \frac{1}{2}\left(\delta^k_j J^\alpha_i \varphi_\alpha - \varphi^k J_{ij} - J^k_j \varphi_i + J^k_\alpha \varphi^\alpha gij\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Обчислимо похідну Лі тензора Нейєнхейса уздовж векторного поля ξ, враховуючи (15)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = J^\alpha_i \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,j} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{j,\alpha}\right) - J^\alpha_j \left(\mathfrak{L}_\xi J^k_{\alpha,i} - \mathfrak{L}_\xi J^k_{i,\alpha}\right) = \\ = \frac{1}{2} J^\alpha_i \big(\delta^k_j J^\beta_\alpha \varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha j} - J^k_j \varphi_\alpha + J^k_\beta \varphi^\beta g_{\alpha j} - \\ - \delta^k_\alpha J^\beta_j \varphi_\beta + \varphi^k J_{j\alpha} + J^k_\alpha \varphi_j - J^k_\beta \varphi^\beta g_{j\alpha}\big) - \\ - \frac{1}{2} J^\alpha_j \big(\delta^k_i J^\beta_\alpha \varphi_\beta - \varphi^k J_{\alpha i} - J^k_i \varphi_\alpha + J^k_\beta \varphi^\beta g_{\alpha i} - \\ - \delta^k_\alpha J^\beta_i \varphi_\beta + \varphi^k J_{i\alpha} + J^k_\alpha \varphi_i - J^k_\beta \varphi^\beta g_{i\alpha}\big).\end{aligned} \tag{16}$$

Розкриваючи дужки та зводячи подібні члени у (16), отримуємо, що похідна Лі тензора Нейєнхейса тотожно дорівнює нулю

$$\mathfrak{L}_\xi N^k_{ij} = 0.$$

Враховуючи той факт, що будь-які інфінітезимальні перетворення зберігають замкненість форми Лі, отримуємо таке твердження.

Теорема 1. *При інфінітезимальних конформних перетвореннях, що зберігають комплексну структуру, тензор Нейєнхейса також зберігається. Зокрема, ЛКК-многовид буде перетворено у ЛКК-многовид.*

Тепер знайдемо похідну Лі форми Лі. Враховуючи (11), отримуємо з (6)

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = -\frac{2}{n-2} \mathfrak{L}_\xi \big(J^\alpha_{\beta,\alpha} J^\beta_i\big) = -\frac{2}{n-2} \mathfrak{L}_\xi \big(J^\alpha_{\beta,\alpha}\big) J^\beta_i. \tag{17}$$

З іншого боку, оскільки операція диференціювання Лі є переставною зі згорткою, то матимемо з (15), згортаючи індекси k та j

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi J^\alpha_{i,\alpha} = \frac{1}{2}\left(n J^\beta_i \varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J^\alpha_\alpha \varphi_i + J^\alpha_\beta \varphi^\beta g_{i\alpha}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(n J^\beta_i \varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} + J_{\beta i} \varphi^\beta\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(n J^\beta_i \varphi_\beta - \varphi^\alpha J_{i\alpha} - J_{i\beta} \varphi^\beta\right) = \frac{n-2}{2} J^\beta_i \varphi_\beta.\end{aligned} \tag{18}$$

Підставимо (18) в (17). Отримуємо

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = -\frac{2}{n-2} \cdot \frac{n-2}{2} J^\beta_\gamma \varphi_\beta J^\gamma_i = \varphi_i. \tag{19}$$

Отож, матимемо таке твердження:

Теорема 2. *При інфінітезимальних конформних перетвореннях ЛКК-многовидів, що зберігають комплексну структуру, векторне поле* ξ *та інваріант* φ, *які визначаються з системи* (10), *компонент похідної Лі форми Лі дорівнюють частинним похідним інваріанта* φ

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = \varphi_i.$$

Звернемо увагу, що згідно з (8)

$$\mathfrak{L}_\xi \omega_i = \omega_{i,\alpha}\xi^\alpha + \omega_\alpha \xi^\alpha{}_{,i}.$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big) = \omega_{\alpha,i}\xi^\alpha + \omega_\alpha \xi^\alpha{}_{,i}.$$

Внаслідок замкнености форми Лі, $\omega_{i,j} = \omega_{j,i}$, а тому з (8) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big) = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,i} = \varphi_i. \tag{20}$$

Звідси скаляр φ з рівняння (10_3) пов'язаний з формою Лі та векторним полем ξ так:

$$\varphi = \omega_\alpha \xi^\alpha + C,$$

де C – довільна константа. Отже, враховуючи умову (11) аналітичності векторного поля ξ система рівнянь (10) набуває вигляду

$$\begin{array}{l} 1)\ \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ 2)\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha + C\big) g_{ij}; \\ 3)\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk}\Big); \\ 4)\ J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0. \end{array} \tag{21}$$

4. Ізоморфізм груп конформних перетворень ЛКК-многовиде та гомотетій відповідного келерового многовиде. Рівняння (21_1) є розв'язаними стосовно похідних $n = 2m$ невідомих функцій, рівняння (21_3) – відповідно, стосовно $n^2 = 4m^2$ невідомих функцій. Рівняння (21_2) містять $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2m(2m+1)}{2}$ обмеження. Як легко бачити,(21_4) задає $2m^2$ незалежних обмежень. Оскільки досліджуваний многовид є ермітовим, то з інтегровності майже комплексної структури випливає існування голономної системи комплексних координат $(z^\alpha, z^{\hat\alpha})$. В них умови (21_4) виглядатимуть як

$$\partial_{\hat\beta}\xi^\alpha = 0$$
$$\partial_\beta \xi^{\hat\alpha} = 0.$$

Внаслідок цього

$$\nabla_{\hat\beta}\xi^\alpha = \Gamma^\alpha_{\hat\beta\delta}\xi^\delta = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^\alpha_{\hat\beta,\delta}\xi^\delta$$
$$\nabla_\beta \xi^{\hat\alpha} = \Gamma^{\hat\alpha}_{\beta\hat\delta}\xi^{\hat\delta} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat\alpha}_{\beta,\hat\delta}\xi^{\hat\delta}.$$

Опускаючи індекси, матимемо

$$\nabla_{\hat\beta}\xi_{\hat\alpha} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\hat\beta\hat\alpha,\delta}\xi^\delta$$
$$\nabla_\beta \xi_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2} J_{\beta\alpha,\hat\delta}\xi^{\hat\delta}.$$

Звідси ми бачимо, що (21_2) містять $m(m+1)$ обмежень, які є залежними від (21_4). Отже, розв'язок системи (21) буде залежати від

$$r = 4m^2 + 2m - \frac{2m(2m+1)}{2} + m(m+1) - 2m^2 + 1 = (m+1)^2$$

сталих. Таким чином, отримано такий результат.

Теорема 3. *Якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ допускає групу G_r інфінітезимальних конформних перетворень, які зберігають комплексну структуру, то векторні поля, які її породжують, задовольняють систему рівнянь:*

1) $\xi_{i,j} = \xi_{ij}$;
2) $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \big(\omega_\alpha \xi^\alpha + C\big) g_{ij}$;
3) $\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big(\big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk}\big)$;
4) $J^i_{j,k}\xi^k - J^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + J^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0.$

Порядок цієї групи r не перевищує $(m+1)^2$.

Розглянемо келеровий многовид $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, конформний ЛКК-многовидові $\{M_n, J, g\}$. За означенням, $\hat{g}_{ij} = g_{ij} e^{-2\sigma}$, $\omega_i = 2\sigma_{,i}$. Тоді

$$\hat{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}\delta^k_i \omega_j - \frac{1}{2}\delta^k_j \omega_i + \frac{1}{2}\omega^k g_{ij}, \tag{22}$$

– об'єкт зв'язності, узгоджений з метрикою $\hat{g}$. Нехай на $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ і на $\{M_n, J, g\}$ задано контраваріантне векторне поле ξ^i. Позначимо

$$\xi_i = \xi^\alpha g_{\alpha i}; \quad \hat{\xi}_i = \xi^\alpha \hat{g}_{\alpha i} = \xi_i e^{-2\sigma}.$$

Знайдемо коваріантну похідну ковектора $\hat{\xi}_i$ у зв'язності, узгодженій з метрикою $\hat{g}$. Коваріантну похідну у зв'язності $\hat{\Gamma}^k_{ij}$ ми будемо позначати вертикальною рискою ", а у зв'язності Γ^k_{ij}, узгодженій з метрикою ЛКК-многовиду g, позначимо, як зазвичай, комою. Маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_{i|j} &= \hat{\xi}_{i,j} + \big(\frac{1}{2}\delta^\alpha_i \omega_j + \frac{1}{2}\delta^\alpha_j \omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha g_{ij}\big)\hat{\xi}_\alpha = \\
&= \big(\xi_i e^{-2\sigma}\big)_{,j} + \frac{1}{2}\hat{\xi}_i \omega_j + \frac{1}{2}\hat{\xi}_j \omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha \hat{\xi}_\alpha g_{ij} = \\
&= \xi_{i,j} e^{-2\sigma} - \xi_i e^{-2\sigma}\omega_j + \frac{1}{2}\hat{\xi}_i \omega_j + \frac{1}{2}\hat{\xi}_j \omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha \hat{\xi}_\alpha g_{ij} = \\
&= \big(\xi_{i,j} - \frac{1}{2}\xi_i \omega_j + \frac{1}{2}\xi_j \omega_i - \frac{1}{2}\omega^\alpha \xi_\alpha g_{ij}\big) e^{-2\sigma} = \\
&= \big(\xi_{i,j} - \frac{1}{2}\xi_i \omega_j + \frac{1}{2}\xi_j \omega_i\big) e^{-2\sigma} - \frac{1}{2}\omega^\alpha \xi_\alpha \hat{g}_{ij}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Нехай тепер поле ξ^i є одним з тих, що породжують на $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$ групу гомотетій. Тоді воно має задовольняти рівняння

$$\hat{\xi}_{i|j} + \hat{\xi}_{j|i} = C\hat{g}_{ij}. \tag{24}$$

Підставивши (23) у (24), отримуємо:

$$e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,j}+\xi_{j,i}\big)-\omega^{\alpha}\xi_{\alpha}\hat{g}_{ij}=C\hat{g}_{ij};$$
$$e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,j}+\xi_{j,i}\big)=C\hat{g}_{ij}+\omega^{\alpha}\xi_{\alpha}\hat{g}_{ij};$$
$$e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,j}+\xi_{j,i}\big)=e^{-2\sigma}\big(\omega^{\alpha}\xi_{\alpha}g_{ij}+Cg_{ij}\big).$$

Тобто, оскільки $e^{-2\sigma}\neq 0$, то необхідно має виконуватись (21_2)

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}+C\big)g_{ij}.$$

Далі продиференціюємо коваріантно $\hat{\xi}_{i|j}$ по x^k у зв'язності $\hat{\Gamma}^k_{ij}$. Оскільки (22), то отримуємо

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{i|jk}={}&e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,jk}+\frac{1}{4}\omega_k\big(\xi_j\omega_i-\xi_i\omega_j\big)-\frac{1}{4}\xi^{\alpha}\omega_{\alpha}\big(\omega_i g_{jk}-\omega_j g_{ik}\big)+\\&+\frac{1}{2}\big(\xi_{\alpha}\omega^{\alpha}{}_{,j}g_{ik}-\xi_{\alpha}\omega^{\alpha}{}_{,i}g_{jk}\big)+\frac{1}{2}\big(\xi_j\omega_{i,k}-\xi_i\omega_{j,k}\big)+\frac{1}{4}||\omega||^2\big(\xi_i g_{jk}-\xi_j g_{ik}\big)-\\&-\frac{1}{2}\big(\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,i}g_{jk}\big)\big)=\\&=e^{-2\sigma}\big(\xi_{i,jk}+\xi_{\alpha}\big(\frac{1}{4}\omega_k\big(\delta^{\alpha}_j\omega_i-\delta^{\alpha}_i\omega_j\big)-\frac{1}{4}\omega^{\alpha}\big(\omega_i g_{jk}-\omega_j g_{ik}\big)+\\&+\frac{1}{2}\big(\omega^{\alpha}{}_{,j}g_{ik}-\omega^{\alpha}{}_{,i}g_{jk}\big)+\frac{1}{2}\big(\delta^{\alpha}_j\omega_{i,k}-\delta^{\alpha}_i\omega_{j,k}\big)+\frac{1}{4}||\omega||^2\big(\delta^{\alpha}_i g_{jk}-\delta^{\alpha}_j g_{ik}\big)\big)-\\&-\frac{1}{2}\big(\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,i}g_{jk}\big)\big),\end{aligned}\tag{25}$$

де $||\omega||^2=\omega_i\omega_j g^{ij}$. З іншого боку, з (22) матимемо, що тензор кривини $\hat{R}$ келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$ пов'язаний з тензором кривини R ЛКК-многовиду $\{M_n,J,g\}$ так:

$$\begin{aligned}\hat{R}^h_{ijk}={}&R^h_{ijk}+\delta^h_j\big(\frac{1}{2}\omega_{i,k}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_k-\frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ik}\big)-\\&-\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\omega_{i,j}+\frac{1}{4}\omega_i\omega_j-\frac{1}{4}||\omega||^2 g_{ij}\big)+\\&+\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,j}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_j\big)g_{ik}-\big(\frac{1}{2}\omega^h{}_{,k}+\frac{1}{4}\omega^h\omega_k\big)g_{ij}.\end{aligned}\tag{26}$$

Відомо таке: коли поле ξ^i породжує на $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$ гомотетію, то воно має задовольняти також рівняння [8]

$$\hat{\xi}_{i|jk}=\hat{\xi}_{\alpha}\hat{R}^{\alpha}_{kji}.\tag{27}$$

Підставивши (25) і (26) у рівняння (27), враховуючи, що $\hat{\xi}_i=\xi_i e^{-2\sigma}$, отримаємо

$$e^{-2\sigma}\xi_{i,jk}=e^{-2\sigma}\big(\xi_{\alpha}R^{\alpha}_{kji}+\frac{1}{2}\big(\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,i}g_{jk}\big)\big).$$

Знову, внаслідок $e^{-2\sigma}\neq 0$, необхідно має виконуватись (21_3)

$$\xi_{i,jk}=\xi_{\alpha}R^{\alpha}_{kji}+\frac{1}{2}\big(\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,k}g_{ij}+\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,j}g_{ik}-\big(\omega_{\alpha}\xi^{\alpha}\big)_{,i}g_{jk}\big).$$

Умова аналітичності контраваріантного векторного поля ξ^i для келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n,J,\hat{g}\}$

$$\mathfrak{L}_{\xi}J^i_j=J^i_{j|k}\xi^k-J^{\alpha}_j\xi^i{}_{|\alpha}+J^i_{\alpha}\xi^{\alpha}{}_{|j}=0.$$

Внаслідок властивостей похідної Лі ця умова буде виконуватись тоді і тільки тоді, коли аналогічна умова (11) буде виконуватись для ЛКК-многовиду $\{M_n, J, g\}$. Отож, якщо векторне поле ξ^i задовольняє систему (21), то воно необхідно задовольняє систему

$$\begin{array}{l} 1)\ \hat{\xi}_{i,j} = \hat{\xi}_{ij}; \\ 2)\ \hat{\xi}_{i,j} + \hat{\xi}_{j,i} = C\hat{g}_{ij}; \\ 3)\ \hat{\xi}_{i,jk} = \hat{\xi}_{\alpha}\hat{R}^{\alpha}_{kji}; \\ 4)\ J^i_{j|k}\xi^k - J^{\alpha}_j\xi^i{}_{|\alpha} + J^i_{\alpha}\xi^{\alpha}{}_{|j} = 0. \end{array} \tag{28}$$

Отже, отримано такий результат.

Теорема 4. *Якщо ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ допускає групу G_r інфінітезимальних конформних перетворень, які зберігають комплексну структуру, то ця група локально ізоморфна групі гомотетій келерового многовиду $\{\mathcal{K}_n, J, \hat{g}\}$, яка перебуває у конформній відповідності з $\{M_n, J, g\}$.*

Завершуючи, зазначимо, що доведена теорема дуже подібна до результату, отриманого Р. Ф. Біляловим ([6], стор. 274) для дійсних лоренцевих многовидів: група конформних перетворень, які діють у неконформно-плоскому полі тяжіння, є групою рухів або гомотетій простору, конформного даному. Як бачимо, ключовою відмінністю нашого випадку є відсутність вимоги, щоб ЛКК-многовид $\{M_n, J, g\}$ був неконформно-плоским.

Список використаної літератури

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Москва: МПГУ, 2003. — 495 с.
2. *Кириченко В.Ф.* Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Матем. сб. — 1991. — **182**, №3. — С. 354-–363.
3. *Кириченко В.Ф.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия // Матем. заметки — 1992. — **51**, №5. — С. 57—66.
4. *Кузаконь В.М., Черевко Є.В.* Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензора енергії-імпульсу // Proc. Inter. Geom. Center. — 2011. — **4**, №4. — P. 20–26.
5. *Микеш Й., Молдобаев Д.* О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств // Изв. вузов. Матем. — 1991. — №12. — С. 24–29.
6. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. — Москва: Наука, 1966. — 496 с.
7. *Радулович Ж., Микеш Й.* Геодезические отображения конформно-келеровых пространств // Изв. вузов. Матем. — 1994. — №3. — С. 50–52.
8. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. — Москва: ИЛ, 1948. — 316 с.
9. *Dragomir S., Ornea L.* Locally conformal Kähler geometry. — Basel: Birkhäuser – 1998. — 328p.
10. *Mikeš J., Vanžurovà A., Hinterleitner I.* Geodesic mappings and some generalizations. — Olomouc: Palacky University Press, 2009. — 304p.
11. *Vaisman I.* A geometric condition for an l.c.K. manifold to be Kähler // Geom. Dedicata. — 1981. — **10**, №1. — P. 129–134.

12. *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces. — New York: Pergamon Press Book, 1965. — 326p.

Стаття: надійшла до редколегії 16.10.2016
прийнята до друку 11.12.2016

GROUPS OF CONFORMAL TRANSFORMATIONS ON LOCALLY CONFORMAL KÄHLER MANIFOLDS AND GROUPS OF HOMOTHETIC MOTIONS ON KÄHLER MANIFOLDS

Yevhen CHEREVKO

Odesa National Economics University,
8, Preobrazhenska str., Odesa, 65082 Ukraine
e-mail: cherevko@usa.com

In this paper, we study infinitesimal conformal transformations which does not change a complex structure of locally conformal Kähler manifolds. We have found an expression for the Lie derivative of a Lee form with respect to a covariant almost analytic field for locally conformal Kähler manifolds. Also we explore links between the group of conformal transformations on a locally conformal Kähler manifold and a group of homothetic motions on a Kähler manifold.

Key words: Kähler manifold, reduced branching processes,locally conformal Kähler manifolds, Lee form,infinitesimal conformal transformations, analitic vector fields, Lie derivative.