ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 174–186
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 174–186

УДК 513.88

РЕЗОЛЬВЕНТА Й УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ВЛАСНИХ РОЗШИРЕНЬ ЛІНІЙНОГО ВІДНОШЕННЯ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Ольга ПІГУРА, Олег СТОРОЖ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: info@nuft.edu.ua, storog@ukr.net

У термінах абстрактних крайових операторів досліджено один клас розширень L_A фіксованого замкненого лінійного відношення L_0 у гільбертовому просторі. Встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень і критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Знайдено резольвентну множину та побудовану резольвенту розглядуваного розширення.

Ключові слова: гільбертів простір, лінійне відношення, оператор, резольвента.

1. Вступ. Теорія лінійних відношень ("багатозначних операторів" у гільбертовому просторі) — важливий розділ функціонального аналізу. Її започатковав Р. Аренс [1] і знайшла свій подальший розвиток у працях Е.А. Кодінгтона [2] (самоспряжені розширення нещільно визначених ермітових операторів), А. Дайксми і Г. Сноо [3] (опис самоспряжених розширень симетричного відношення в термінах дефектних просторів), Ф.С. Рофе-Бекетова [4], А.Н. Кочубея [5], В.І. Горбачук і М.Л. Горбачука [6] (застосування теорії лінійних відношень до опису самоспряжених та дисипативних розширень різних класів симетричних операторів) та інших математиків. Протягом останніх двадцяти років зацікавленість до теорії відношень значно посилилася. Це пов'язано, зокрема, з тим, що вона знайшла різноманітні застосування в теорії розширень нещільно визначених операторів, передусім диференціальних (див., наприклад [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], де розвивається концепція простору граничних значень і відповідної функції Вейля для лінійного відношення, та цитовану там літературу).

2. Позначення та формулювання задачі. Попередні відомості. Під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 47B44, 81Q15

Будь-який (замкнений) лінійний многовид в $H^2 = H \oplus H$ називається (*замкненим*) *лінійним відношенням* в H. Прикладом лінійного відношення є графік GrT лінійного оператора T, тому в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком. Ми використовуємо такі позначення: $D(T), R(T), \ker T$— відповідно, область визначення, область значень і многовид нулів відношення (оператора) T:

$$D(T) = \{y \in H | (\exists y' \in H) : (y, y') \in T\}; \qquad R(T) = \{y' \in H | (\exists y \in H) : (y, y') \in T\};$$

$$\ker T = \{y \in T : (y, 0) \in T\}; \qquad \alpha T = \{(y, \alpha y') : (y, y') \in T\};$$

якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то $T - \lambda = \{(y, y' - \lambda y) : (y, y') \in T\}$ (отож,

$$\ker(T - \lambda) = \{y \in H : (y, 0) \in T - \lambda\} \quad (= \{y \in H : (y, \lambda y) \in T\});$$

$$\widehat{\ker}(T - \lambda) = \{(y, \lambda y) : y \in ker(T - \lambda)\}; \qquad T^{-1} = \{(y', y) \in H^2 : (y, y') \in T\};$$

$$T(0) = \{y' \in H : (0, y') \in T\};$$

для будь-якого лінійного відношення $T \subset H^2$ спряжене (лінійне) відношення T^* визначається так:

$$T^* = H^2 \ominus \widehat{J}T = \widehat{J}(H^2 \ominus T),$$

де

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i1_H \\ i1_H & 0 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, R(T - \lambda) = H\}$ (резольвентна множина відношення T).

Далі, якщо X, Y – гільбертові простори, то $(\cdot|\cdot)_X$— символ скалярного добутку на X; $\mathcal{B}(X, Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $S : X \to Y$ таких, що $D(S) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$:

1_X – тотожне перетворення простору X;
$S \downarrow E$ – звуження відображення S на множину E;
$\dot{+}, \oplus$ – відповідно символи прямої та ортогональної суми;
$\ominus$ – символ ортогонального доповнення;
SE – образ множини E при відображенні S;
$\overline{E}$ – замикання множини E.

Роль початкового об'єкта відіграє пара (L, L_0) замкнених лінійних відношень в H таких, що $L_0 \subset L$. Приймемо $M \overset{def}{=} L_0^*$, $M_0 \overset{def}{=} L^*$. Відомо [16], що існують гільбертові простори G_1, G_2 та лінійні оператори $\Gamma_i \in \mathcal{B}(L, G_i)$ $(i = 1, 2)$ такі, що

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = G_1 \oplus G_2, \quad \ker(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = L_0 \quad \text{і} \quad \widetilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(M, G_2),\ \widetilde{\Gamma}_2 \in \mathcal{B}(M, G_1)$$

(які визначаються однозначно, виходячи з $G_1, G_2, \Gamma_1, \Gamma_2$) такі, що

$$R(\widetilde{\Gamma}_1 \oplus \widetilde{\Gamma}_2) = G_2 \oplus G_1, \quad \ker(\widetilde{\Gamma}_1 \oplus \widetilde{\Gamma}_2) = M_0,$$

$$\forall \widehat{y} = (y, y') \in L,\ \forall \widehat{z} = (z, z') \in M \qquad (y'|z) - (y|z') = (\Gamma_1 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{z})_{G_1} - (\Gamma_2 y | \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{z})_{G_2}.$$

При цьому

$$\Gamma_1 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_1^* = 0, \quad \Gamma_1 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_2^* = i1_{G_1}, \quad \Gamma_2 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_1^* = -i1_{G_2}, \quad \Gamma_2 \widehat{J} \widetilde{\Gamma}_2^* = 0, \tag{2}$$

де $\widehat{J}$ визначено згідно з (1). Будь-яке замкнене лінійне відношення $L_1(M_1)$ таке, що $L_0 \subset L_1 \subset L$ (відповідно, $M_0 \subset M_1 \subset M$) ми називаємо власним розширенням відношення $L_0(M_0)$.

Нехай F – деякий гільбертів простір такий, що $\dim F = \dim(G_1 \oplus G_2)$. Неважко довести, що для будь-якого власного розширення L_1 відношення L_0 існує $A \in \mathcal{B}(G_1 \oplus G_2, F)$ таке, що $L_1 = \ker A\Gamma$. Далі писатимемо L_A замість L_1. Отож

$$L_A = \ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2) = \{\widehat{y} \in L : A_1\Gamma_1\widehat{y} + A_2\Gamma_2\widehat{y} = 0\}, \quad \text{де } A_i = A \downarrow G_i \ (i = 1, 2).$$

Зрозуміло, що $A_i \in \mathcal{B}(G_i, F)$.

Далі припускаємо, що резольвентна множина $\rho(L_2)$ відношення $L_2 \overset{def}{=} \ker \Gamma_2$ непорожня. Нехай $\lambda \in \rho(Ł_2)$, а отже, $\overline{\lambda} \in \rho(M_2)$, де $M_2 \overset{def}{=} \ker \widetilde{\Gamma}_2 \ \ (= L_2^*)$. Тоді

$$L_\lambda \overset{def}{=} (L_2 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H), \quad M_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (M_2 - \overline{\lambda}^{-1}) \ (= L_\lambda^*) \in \mathcal{B}(H).$$

В термінах абстактних граничних операторів, тобто у вигляді, який у випадку диференціальних операторів приводить безпосередньо до крайових умов, встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень і критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda \ \ (\lambda \in \mathbb{C})$. Зокрема, з'ясовано, коли це відношення є розв'язним, тобто, коли $\ker(L_A - \lambda) = \{0\}, R(A - \lambda) = H$. У цьому випадку побудовано резольвенту відношення L_A. Окрему увагу приділено випадку, коли A є нормально розв'язним оператором.

3. Допоміжні оператор-функції. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Приймемо

$$\forall y \in H \ \widehat{L}_\lambda y = (L_\lambda y, y + \lambda L_\lambda y), \qquad \text{і} \qquad \forall z \in H \ \widehat{M_{\overline{\lambda}}} z = (M_{\overline{\lambda}} z, z + \overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}} z).$$

Лема 1.

$$R(\widehat{L}_\lambda) = L_2, \qquad R(\overline{M}_\lambda) = M_2. \tag{3}$$

Доведення. Зрозуміло, що $\widehat{L}_\lambda \in \mathcal{B}(H, H^2)$. Далі $GrL_\lambda = \{(y, L_\lambda y) : y \in H\}$, тому $L_2 - \lambda = \{(L_\lambda y, y) : y \in H\}$, а отже, $L_2 = \{(L_\lambda y, y + L_\lambda y : y \in H)\} = R(\widehat{L}_\lambda)$. Першу з рівностей (3) доведено. Другу доводимо аналогічно. □

Наслідок 1. $\forall y \in H \quad \varGamma_2 \widehat{L}_\lambda y = 0, \quad \forall z \in H \quad \widetilde{\varGamma}_2 \widehat{M_{\overline{\lambda}}} z = 0.$

Приймемо $Z_\lambda \overset{def}{=} (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M_{\overline{\lambda}}})^*$, $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda)^*$.

Лема 2.

$$Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H), \ Z_\lambda = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\widetilde{\varGamma}_1^*, \tag{4}$$

$$\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_1, H), \ \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} = (M_{\overline{\lambda}}(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\varGamma_1^*, \tag{5}$$

де $\pi_1 : H^2 \to H \oplus \{0\}$, $\pi_2 : H^2 \to \{0\} \oplus H$ *– ортопроектори.*

Доведення. Оскільки $\widehat{M_{\overline{\lambda}}} \in \mathcal{B}(H, H^2)$ і $R(\widehat{M_\lambda}) = M_2 \subset M$, то $\widehat{M_{\overline{\lambda}}} \in \mathcal{B}(H, M)$; оскільки $\widetilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(H, G_2)$, то $\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M_{\overline{\lambda}}} \in \mathcal{B}(H, G_2)$. Тому $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$.

Далі, $\forall a \in G_2, \forall z \in H$

$$(z|Z_\lambda a) = (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M_{\overline{\lambda}}} z|a)_{G_2} = (\widehat{M_{\overline{\lambda}}} z|\widetilde{\Gamma}_1^* a) = ((M_\lambda z, z + \overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}} z)|(\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a, \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a))_{H^2} =$$

$$= (M_{\overline{\lambda}} z|\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (\overline{\lambda} M_{\overline{\lambda}} z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) = (z|L_\lambda \pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\lambda L_\lambda \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) =$$

$$= (z|(L_\lambda\pi_1 + \pi_2 + \lambda L_\lambda\pi_2))\widetilde{\Gamma}_1^* a.$$

Отже, (4) доведено, (5) доводимо аналогічно. □

Позначення: $\forall a \in G_2 \quad \widehat{Z}_\lambda a \overset{def}{=} (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a)$.

Лема 3. *$R(\widehat{Z}_\lambda) \subset L$ і $\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda = 1_G$.*

Доведення.

$$\widehat{Z}_\lambda = (Z_\lambda, \lambda Z_\lambda) = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + \pi_2\widetilde{\Gamma}_1^*, \lambda(L_\lambda(\pi_1+\lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + \pi_2\widetilde{\Gamma}_1^*)) =$$
$$= (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*, \lambda L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + (\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*) + (\pi_2\widetilde{\Gamma}_1^*, -\pi_1\widetilde{\Gamma}_1^*) =$$
$$\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^*,$$

де $\widehat{J}$ визначено згідно з (1). Але

$$\forall a \in G_2 \ \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* a \subset L_2 \subset L$$

(див. лему 1), $\widetilde{\Gamma}_1^* a \in M \ominus M_0$, тому (див. [17]) $i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^* a \in L \ominus L_0 \subset L$. Звідси випливає, що $\widehat{Z}_\lambda a \in L$. Далі, враховуючи (2) і Наслідок 1, бачимо, що

$$\forall a \in G_2 \ \ \Gamma_2\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* a = 0, \Gamma_2(i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^*)a = a,$$

тому $\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda a = a$. □

Лема 4.

$$\widehat{Z}_\lambda \Gamma_2 \downarrow \widehat{\ker}(L-\lambda) = 1_{\widehat{\ker}(L-\lambda)}, \tag{6}$$
$$R(Z_\lambda) = \ker(L-\lambda) \tag{7}$$

Доведення. Нехай $y \in \ker(L-\lambda)$, $x \in H$. Застосовуючи рівність

$$(y'|z) - (y|z') = (\Gamma_1\widehat{y}|\widetilde{\Gamma_2}z)_{G_1} - (\Gamma_2 y|\widetilde{\Gamma_1}z)_{G_2}$$

при $\widehat{y} = (y, \lambda y)(\in \widehat{\ker}(L-\lambda))$, $z = M_{\overline{\lambda}}x$, отримуємо (враховуючи наслідок 1)

$$Z_\lambda\Gamma_2\widehat{y}|x) = (\Gamma_2\widehat{y}|\widetilde{\Gamma}_1\widehat{M_{\overline{\lambda}}}x) = -[(\Gamma_1\widehat{y}|\widetilde{\Gamma}_2\widehat{M_{\overline{\lambda}}}x)_{G1} - (\Gamma_2\widehat{y}|\widetilde{\Gamma}_1\widehat{M}_\lambda x)_{G_2}] =$$
$$= (-[(\lambda y|M_{\overline{\lambda}}x) - (y|x) + \overline{\lambda}M_{\overline{\lambda}}x] = (y|x).$$

Звідси випливає, що для будь-якого $y \in \ker(L-\lambda)$ $Z_\lambda\Gamma_2(y, \lambda y) = y$, а тому

1) $\widehat{Z}_\lambda\Gamma_2(y, \lambda y) = (y, \lambda y)$, тобто справджується (6);
2) $\ker(L-\lambda) \subset R(Z_\lambda)$.

Крім того, з леми 2 випливає, що для всякого $a \in G_2$($Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a) \in L$, тобто $Z_\lambda a \in \ker(L-\lambda)$. Іншими словами, $R(Z_\lambda) \subset \ker(L-\lambda)$. Рівність (7), а з нею і лему 4, доведено. □

Приймемо $M(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda$.

Зауваження 1.

$$M(\lambda) = \Gamma_1\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*. \tag{8}$$

Справді, $\widehat{Z}_\lambda = \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + i\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^*$ (див доведення леми 3), тому

$$M(\lambda) = \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda = \Gamma_1\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* + i\Gamma_1\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^*.$$

Оскільки, з огляду на (2), $\Gamma_1\widehat{J}\widetilde{\Gamma}_1^* = 0$, то (8) доведено.

Лема 5.

$$D(L_2) + \ker(L - \lambda) = D(L). \tag{9}$$

Доведення. Включення $D(L_2) + \ker(L - \lambda) \subset D(L)$ є очевидним. Навпаки, нехай $y \in D(L)$. Тоді існує $y' \in H$ таке, що $(y, y' - \lambda y) \in L - \lambda$. Але $H = R(L_2 - \lambda)$, тому існує $u \in D(L_2)$ таке, що $(u, y' - \lambda y) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Тому $(y - u, 0) \in L - \lambda$, тобто $y - u \in \ker(L - \lambda)$. Отож, $y = u + (y - u) \in D(L_2) + \ker(L - \lambda)$. □

Зауваження 2. Сума (9), загалом, не є прямою. Точніше

$$D(L_2)\bigcap\ker(L - \lambda) = \{0\} \Longleftrightarrow L_2(0) = L(0).$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $v \in L(0) = (L - \lambda)(0)$. Тоді $(0; v) \in L - \lambda$. Далі, оскільки $R(L_2 - \lambda) = H$, то існує $u \in D(L_2 - \lambda) = D(L_2)$ таке, що $(u, v) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Звідси випливає, що $(u, 0) = (u, v) - (0, v) \in L - \lambda$, тобто $u \in \ker(L - \lambda)$. Отож, $u \in \ker(L - \lambda) \cap D(L_2)$, тобто $u = 0$. А це означає, що $(0, v) \in L - \lambda$. Отже, $v \in (L_2 - \lambda)(0) = L_2(0)$.

($\Leftarrow$) Нехай $u \in D(L_2) \cap \ker(L - \lambda)$. Це означає:

1) $(\exists v \in H) : (u, v) \in L_2 \subset L$;
2) $(u, \lambda u) \in T$.

Маємо: $(0, v - \lambda u) \in L \Rightarrow v - \lambda u \in L(0) = L_2(0) \Rightarrow (0, v - \lambda u) \in S \Rightarrow (u, \lambda u) = (u, v) - (0, v - \lambda u) \in S \Rightarrow u \in \ker(S - \lambda) \Rightarrow u = 0$. □

Лема 6. $L_2 \dotplus \widehat{\ker}(L - \lambda) = L$.

Доведення. а) $L_2 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda) = \{0\}$. Нехай $(y, y') \in L_2 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda)$, зокрема існує $a \in G_2$ таке, що $(y, y') = (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a)$ (див. (7)), а отже, $(y, y' - \lambda y) = (y, 0) \in L_2 - \lambda$, або, що еквівалентно, $y \in \ker(L_2 - \lambda)$. Але $\ker(L_2 - \lambda) = 0$, тому $(y, y') = (0, 0)$.

б) $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) = L$. Включення $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) \subset L$ очевидне. Протилежне включення випливає з того, що $(\forall \widehat{y} \in L)$ $\widehat{y} = (\widehat{y} - \widehat{Z}_\lambda\Gamma_2 y) + \widehat{Z}_\lambda\Gamma y$ і лем 3, 4. □

Лема 7. а) $L_0 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda) = \{0\}$*;*
б) $L_0 \dotplus \widehat{\ker}(L - \lambda) \subset \ker(\mathit{\Gamma}_1 - M(\lambda)\mathit{\Gamma}_2)$

Доведення. а) Правильність цього твердження випливає з леми 6.

б) Якщо $\widehat{y} = (y, y') \in L_0$, то $\Gamma_1\widehat{y} = \Gamma_2\widehat{y} = 0$, а отже, $\Gamma_1\widehat{y} = M(\lambda)\Gamma_2\widehat{y}$. Якщо $\widehat{y} \in \widehat{\ker}(L - \lambda)$, то, з огляду на леми 3, 4, існує $a \in G_2$ таке, що $y = \widehat{Z}_\lambda a$, а отже $\Gamma_1\widehat{y} - M(\lambda)\Gamma_2\widehat{y} = \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda a - M(\lambda)\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda a = M(\lambda)a = M(\lambda)a = 0$. □

Наслідок 2. $L_0 \dotplus \widehat{\ker}(L - \lambda) = \ker(\mathit{\Gamma}_1 - M(\lambda)\mathit{\Gamma}_2)$.

Доведення. Нехай $\widehat{y} \in \widehat{\ker}(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$. З огляду на леми 4, 6, $\widehat{y} \in L = L_2 \dot{+} \widehat{\ker}(L-\lambda)$ і існують $\widehat{u} \in L_2, a \in G_2$ такі, що $\widehat{y} = \widehat{u} + \widehat{Z}_\lambda a$, а отже, $(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)(\widehat{u} + \widehat{Z}_\lambda a) = 0$. Отож,

$$0 = \Gamma_1 \widehat{u} + \Gamma_1 Z_\lambda a - M(\lambda)\Gamma_2 u - M(\lambda)\Gamma_2 \widehat{u} - M(\lambda)\Gamma_2 Z_\lambda a = \Gamma_1 \widehat{u}.$$

Оскільки $\Gamma_2 \widehat{u} = 0$, то $\widehat{u} \in L_0$. □

Зауваження 3. Міняючи ролями пари (L, L_0) та (M, M_0), аналогічно доводимо, що:

$$\text{якщо } \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}, \overline{\lambda}\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}), \text{ то } R(\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}) = \widehat{\ker}(M - \overline{\lambda}), \quad \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} = 1_{G_1},$$

$$\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} \widetilde{\Gamma}_2 \downarrow \widehat{\ker}(M - \overline{\lambda}) = 1_{\widehat{\ker}(M - \overline{\lambda})};$$

$$\text{якщо } \widetilde{M}(\overline{\lambda}) \overset{def}{=} \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}}, \text{ то } \widetilde{M}(\overline{\lambda}) \in \mathcal{B}(G_1, G_2), \ \widetilde{M}(\overline{\lambda}) = \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\overline{\lambda}}(\pi_1 + \overline{\lambda}\pi_2)\Gamma_1^*,$$

$$M_0 \dot{+} \widehat{\ker}(M - \overline{\lambda}) = \ker(\widetilde{\Gamma}_1 - \widetilde{M}(\overline{\lambda})\widetilde{\Gamma}_2).$$

Крім того, $\forall \lambda \in \rho(L_2) \quad M(\lambda)^* = \widetilde{M}(\overline{\lambda})$.

Справді, для будь-яких $a \in G_1, b \in G_2$

$$(\widetilde{M}(\overline{\lambda})a|b)_{G_2} = (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} a|b)_{G_2} = (\widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} a|\widetilde{\Gamma}_1^* b)_{H^2} = ((\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a, \overline{\lambda}\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a)|(\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* b, \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* b))_{H^2} =$$
$$= (\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a|\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* b) + (\overline{\lambda}\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* b) = (\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a|(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* b) =$$
$$= (a|\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda (\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* b)_{G_1} = (a|M(\lambda)b)_{G_1}.$$

4. Основний результат.

Лема 8. *Припустимо, що $\lambda \in \rho(L_2)$. У цьому випадку:*

а) *елемент $f \in H$ належить до $R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$A_1 \widetilde{Z}_\lambda^* f \in R(A_1 M(\lambda) + A_2); \tag{10}$$

б)
$$\ker(L_A - \lambda) = Z_\lambda \ker(A_1 M(\lambda) + A_2). \tag{11}$$

Доведення. Нехай $f \in H$. Оскільки $R(L_2 - \lambda) = H$, то $f \in R(L_2 - \lambda)$, а отже, $(L_\lambda f, f) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Припустимо, що для деякого $y \in H \quad (y, f) \subset L - \lambda$. Тоді $(y - L_\lambda f, 0) \in L - \lambda$, а отже, існує $a \in G_2$ таке, що

$$y = L_\lambda f + Z_\lambda a. \tag{12}$$

Маємо

$$f \in R(L_A - \lambda) \Leftrightarrow (y, f) \in L_A - \lambda \Leftrightarrow (y, f + \lambda y) \in L_A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (L_\lambda f + Z_\lambda a, f + \lambda L_\lambda f + \lambda Z a) \in L_A \Leftrightarrow \widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a \in \ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2) \Leftrightarrow$$
$$A_1\Gamma_1(\widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a) + A_2\Gamma_2(\widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a) \equiv A_1\Gamma_1\widehat{L}_\lambda f + A_1\Gamma_1\widehat{Z}_\lambda a + A_2\Gamma_2\widehat{L}_\lambda f + A_2\Gamma_2\widehat{Z}_\lambda a = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_1 \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}^* f + A_1 M(\lambda) a + + A_2 a = 0.$$

Останню рівність можна переписати так:

$$(A_1 M(\lambda) + A_2)a = -A_1 \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}^* f. \tag{13}$$

Отже, $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \in G_2$ таке, що справджується (13), тобто, коли виконується (10). Повторюючи ці міркування при $f = 0$, бачимо, що справджується (11). □

Приймемо $A_\lambda \overset{def}{=} A_1 M(\lambda) + A_2$.

Зауваження 4. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Тоді

а) $\ker \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} = 0$;

б) $\ker(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow \ker(M - \overline{\lambda})) = \{0\}$;

в) $$R(\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda) \equiv R(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}}) = G_1; \tag{14}$$

г) $$\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda \downarrow R(L_0 - \lambda) \equiv \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow R(L_0 - \lambda) = 0. \tag{15}$$

Доведення. а) $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = 0 \Rightarrow \widehat{\widetilde{Z}}^*_{\overline{\lambda}} a = 0 \Rightarrow a = \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{\widetilde{Z}}^*_{\overline{\lambda}} a = 0$.

б) Нехай $u \in \ker(M - \overline{\lambda})$, $\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} u = 0$. Оскільки $\ker(M - \overline{\lambda}) = R(\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}})$, то існує $a \in G_1$ таке, що $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = u$. Маємо $0 = \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} u = \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \widetilde{Z}_\lambda a$, тому $Z_\lambda a = u = 0$.

в) Оскільки $R(\widehat{L}_\lambda) = L_2 = \ker \Gamma_2$, то достатньо довести, що $R(\Gamma_1 \downarrow \ker \Gamma_2) = G_1$. А це cghfdls так, тому що $R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = R(\Gamma_1) \oplus R(\Gamma_2)$, а отже, $R(\Gamma_1 \downarrow \ker \Gamma_2) = R(\Gamma_1) = G_1$.

г) Нехай $v \in R(L_0 - \lambda)$. Існує $u \in H$ таке, що $(u, v) \in L_0 - \lambda \subset L_2 - \lambda$. Маємо $\widehat{L}_\lambda v = (L_\lambda v, v + \lambda L_\lambda v) = (u, v + \lambda u)$. Але $(u, v) \in L_0 - \lambda$, тому $(u, v + \lambda u) \in L_0$, отже, $\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda v = 0$. □

Наслідок 3. *Існує гомеоморфізм* $\Pi_\lambda \in \mathcal{B}(G_1, \ker(M - \overline{\lambda}))$ *такий, що*
$$R(L_A - \lambda) = R(L_0 - \lambda) \oplus \Pi_\lambda(A_1^{-1} R(A_\lambda)). \tag{16}$$

Доведення. Легко бачити, що $R(L_0 - \lambda)$ — замкнений многовид, а отже
$$H = R(L_0 - \lambda) \oplus \ker(M - \overline{\lambda}).$$
Звідси, а також з (14) і (15) випливає, що $R(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow \ker(M - \overline{\lambda})) = R(\widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}}) = G_1$.

Тому $(\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda})) \in \mathcal{B}(\ker(M - \overline{\lambda},\ G_1))$ – гомеоморфізм, а отже
$$\Pi_\lambda \overset{def}{=} (\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda}))^{-1} \in \mathcal{B}(G_1, \ker(M - \overline{\lambda}))$$
– гомеоморфізм $G_1 \to \ker(M - \overline{\lambda})$.

Далі $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існують $f_0 \in R(L_0 - \lambda)$ і
$$f_1 \in R(L_A - \lambda) \ominus R(L_0 - \lambda) = R(L_A - \lambda) \cap \ker(M - \overline{\lambda})$$
такі, що $f = f_0 + f_1$. З іншого боку, враховуючи (10) і (15), бачимо, що
$$f \in R(L_A - \lambda) \Leftrightarrow \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f \in A_1^{-1} R(A_\lambda) \Leftrightarrow \widetilde{Z}^*_\lambda f_0 + \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f_1 \in A_1^{-1} R(A_\lambda) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\widetilde{Z}^*_\lambda \downarrow \ker(M - \overline{\lambda}) f_1) \in A^{-1} R(A_\lambda) \Leftrightarrow f_1 \in \Pi_\lambda(A_1^{-1} R(A_\lambda)).$$
Рівність (16) доведено. □

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \in \rho(L_2)$. *Тоді:*

а) $\dim \ker(L_A - \lambda) = \dim \ker A_\lambda$; (17)

б) $\dim[H / R(L_A - \lambda)] = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))]$; (18)

в) *$R(L_A - \lambda)$ замкнений в H тоді і тільки тоді, коли $A_1^{-1} R(A_\lambda)$ замкнений в G_1;*

г) $\lambda \in \rho(L_A)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\ker A_\lambda = \{0\}, R(A_1) \subset R(A_\lambda)$, *тобто, коли* $A_\lambda^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(G_1, G_2)$.

У цьому випадку

$$(L_A - \lambda)^{-1} = L_\lambda - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_\lambda \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}^*. \tag{19}$$

Доведення. а) Рівність (17) випливає з (11) і неперервної оборотності оператора Z_λ.

б) Нехай $\ker(M - \overline{\lambda}) = \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L}_1$, тобто

$$\Pi_\lambda G_1 = \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \Pi_\lambda(\Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1),$$

або, що є рівносильним,

$$G_1 = A_1^{-1}R(A_\lambda) \dot{+} \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1. \tag{20}$$

З іншого боку, враховуючи (16), отримуємо

$$H = R(L_0 - \lambda) \dot{+} \ker(M - \overline{\lambda}) = R(L_0 - \lambda) \dot{+} \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda) \dot{+} \mathcal{L}_1 = R(L_A - \lambda) \dot{+} \mathcal{L}_1,$$

а отже (див. (20))

$$\dim[H/R(L_A - \lambda)] = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1 = \dim[G_1/A_1^{-1}R(A_\lambda)].$$

Але $A_1^{-1}R(A_\lambda) = A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))$, тому рівність (18) рівносильна такій:

$$\dim[G_1/A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))] = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))].$$

Доведемо її. Нехай

$$G_1 = A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L},$$

а отже,

$$R(A_1) = (R(A_1) \cap R(A_\lambda) \dot{+} A_1\mathcal{L}.$$

Крім того, якщо $l \in \mathcal{L}$ і $A_1 l = 0$, то $l \in A_1^{-1}(\{0\}) \subset A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_l)$. Отож, $l \in A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \cap \mathcal{L} = 0$. Тому $\dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L}$, а отже,

$$\dim[G_1/A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))] = \dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L} = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))].$$

Твердження б) доведено.

в) Правильність цього твердження безпосередньо випливає з (16).

г) З (17), (18) випливає, що

$$\ker(L_A - \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \ker A_\lambda = \{0\} \tag{21}$$

$$R(L_A - \lambda) = H \Leftrightarrow R(A_1) \subset R(A_\lambda). \tag{22}$$

Враховуючи (21), (22) і застосовуючи теорему про замкнений графік (див. [15, с. 211]), бачимо, що

$$(L_A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(G_1, G_2).$$

Припустимо, що умови (21), (22) справджуються. Знайдемо резольвенту оператора L_A, тобто розв'яжемо таку задачу:

нехай $f \in R(L_A - \lambda)$ $(= H)$; *знайти* $y \in H$ *таке, що* $(y, f) \in L_A - \lambda$.

Для цього повторимо міркування, використані для доведення леми 8. Отримуємо $(y, f) \in L - \lambda$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \in G_2$ таке, що $y = L_\lambda f + Z_\lambda a$ (див.

(12)); при цьому $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді , коли $A_\lambda a = -A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f$ (див. (13)). Підставляючи (13) в (12), бачимо, що

$$(L_A - \lambda)^{-1} f = y = L_\lambda f - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} f.$$

Рівність (19) доведено. □

Далі скрізь під $\mathcal{B}_\infty(X_1, X_2)$, де X_1, X_2— гільбертові простори, розуміємо множину компактних операторів з $\mathcal{B}(X_1, X_2)$, а $\mathcal{B}_\infty(H) \overset{def}{=} \mathcal{B}_\infty(H, H)$.

Наслідок 4. *В умовах теореми 1*

$$(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\lambda \in \rho(L_2) \cap \rho(L_A)$ і $(L_A - \lambda)^{-1} L_\lambda \equiv -Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді

$$Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \downarrow \ker(M - \lambda) \in \mathcal{B}_\infty(\ker(M - \overline{\lambda}), H),$$

а отже,

$$Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \Pi_\lambda = Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, H).$$

Оскільки, $\ker Z_\lambda = \{0\}$, а $R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda)$, то $Z_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(\ker(L - \lambda), G_2)$, тому

$$A_\lambda^{-1} A_1 = Z_\lambda^{-1} Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

($\Leftarrow$) Оскільки $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$, $A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2), \widetilde{Z}^*_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}(H, G_1)$, то з (19) випливає, що $(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H)$. □

5. Випадок, коли $R(A)$ — замкнений підпростір. У цьому випадку твердження, висловленні в теоремі 1 та наслідку 4, допускають деякі уточнення. Далі скрізь вважаємо, що L_A — відношення описане в п. 1, причому $R(A) = \overline{R(A)} \overset{def}{=} F_1$ (це припущення не зменшує загальності).

Лема 9.

$$L_A^* = \{\widehat{z} \in M | \exists h \in F_1 : \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{z} = A_1^* h, \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{z} = -A_1^* h\}. \tag{23}$$

Доведення. У праці [16] доведено, що існує $B \in \mathcal{B}(G_2 \oplus G_1, F \ominus F_1)$ такий, що

$$L_A^* = \ker B\widetilde{\Gamma} = \{z \in M : B\widetilde{\Gamma} z = 0\} \overset{def}{=} M_B.$$

Більше того, $M_B = L_A^* \Leftrightarrow \ker A = J^* \overline{R(B^*)}$, де

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i1_{G_2} \\ -i1_{G_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Міняючи ролями A та B і враховуючи нормальну розв'язність оператора A (а отже, і оператора A^* — див. [15, с. 295]), бачимо, що $L_A^* = M_B \Leftrightarrow \ker B = JR(A^*)$.

Але права частина рівності (23) — це $\{\widehat{z} \in M : \widetilde{\Gamma} \widehat{z} \in JR(A^*)\}$, в той час, як $M_B = \{z \in M : \widetilde{\Gamma} \widehat{z} \in \ker B\}$. Лему доведено. □

Лема 10. *Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Існує гомеоморфізм $\widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_2, \ker(L - \lambda))$ такий, що*

$$R(L_A^* - \overline{\lambda}) = R(M_0 - \overline{\lambda}) \oplus \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*). \tag{24}$$

Доведення. Міркуючи так, як при доведенні зауваження 4, бачимо, що

$$\ker(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda)) = \{0\}, R(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda)) = G_2.$$

Тому $\widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} \overset{def}{=} (Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(G_2, \ker(L-\lambda)$ — гомеоморфізм $G_2 \to \ker(L-\lambda)$.

Враховуючи лему 1, зауваження 3 та лему 9, отримуємо:

$$M - \overline{\lambda} = \{(M_{\overline{\lambda}} f + \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a, f) : f \in H, a \in G_1\}, \tag{25}$$

$\widehat{M}_{\overline{\lambda}} f + \widehat{\widetilde{Z}}_{\overline{\lambda}} a \in L_A^*$ тоді і тільки тоді, коли існує $h \in F_1$ таке, що

$$\begin{cases} \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\overline{\lambda}} f + \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = A_2^* h \\ \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{M}_\lambda f + \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} a = -A_1^* h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_\lambda^* f + \widetilde{M}(\overline{\lambda}) a = A_2^* h \\ a = -A_1^* h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z_\lambda^* f = (M(\lambda)^* A_1^* + A_2^*) h \equiv A_\lambda^* h.$$

Отже, (див. (25)), $f \in R(L_A^* - \overline{\lambda})$ тоді і тільки тоді, коли існує $h \in F_1$ таке, що $Z_\lambda^* f = A_\lambda^* h$, тобто, коли $Z_\lambda^* f \in R(A_\lambda^*)$ (пор. з (10)). Зокрема,

$$f \in R(L_A^* - \overline{\lambda}) \cap [H \ominus R(M_0 - \overline{\lambda})] = R(L_A^* - \overline{\lambda}) \cap \ker(L-\lambda)$$

тоді і тільки тоді, коли $(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L-\lambda) f \in R(A_\lambda^*))$, тобто, коли $f \in \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*)$. Лему доведено. $\square$

Наслідок 5.

$$\ker(L_A^* - \overline{\lambda}) = \widetilde{Z}_{\overline{\lambda}} A_1^* \ker A_\lambda^*. \tag{26}$$

Доведення. Для того, щоб переконатися у правильності (26), достатньо повторити міркування, використані в процесі доведення леми 10, при $f = 0$. $\square$

Теорема 2. *Нехай* $R(A) = F_1,\ \lambda \in \rho(L_2)$. *Тоді*

а) $\dim\ker(L_A^* - \overline{\lambda}) = \dim\ker A_\lambda^*$; (27)

б) $\dim[H/R(L_A^* - \overline{\lambda})] = \dim[G_2/R(A_\lambda^*)]$; (28)

в) $R(L_A - \lambda)$ *замкнений в* H *тоді і тільки тоді, коли* $R(A_\lambda)$ *замкнений у* F_1. *У цьому випадку*

$$\dim[H \ominus R(L_A - \lambda)] = \dim[F_1 \ominus R(A_\lambda)], \tag{29}$$

$$\dim[H \ominus R(L_A^* - \overline{\lambda})] = \dim[G_1 \ominus R(A_\lambda^*)]; \tag{30}$$

г) $\lambda \in \rho(L_A)$ *тоді і тільки тоді , коли* $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$. *У цьому випадку*

$$(L_A - \lambda)^{-1} L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, F_1).$$

Доведення. а) Зрозуміло, що $R(A_1) + R(A_\lambda) = R(A) \equiv F_1$, тому (див. [15, с. 279]) $\ker A_1^* \cap \ker A_\lambda^* = 0$. Звідси , з (26) та з оборотності оператора $\widetilde{Z}_{\overline{\lambda}}$ випливає (27).

б) Нехай

$$\ker(L-\lambda)^{-1} = \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*) \dot{+} \mathcal{L}. \tag{31}$$

З (31) випливає таке:

1) $H = R(M_0 - \overline{\lambda}) \dot{+} \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}} R(A_\lambda^*) \dot{+} \mathcal{L}$ так що $\dim[H/(R(L_A^* - \overline{\lambda}))] = \dim\mathcal{L}$;
2) $G_2 = \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}}^{-1} \ker(L-\lambda) = R(A_\lambda^*) \dot{+} \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}}^{-1} \mathcal{L}$, так що $\dim[G_2/R(A_\lambda^*)] = \dim \widetilde{\Pi}_{\overline{\lambda}}^{-1} \mathcal{L} = \dim\mathcal{L}$.

Рівність (28) доведено.

в) Оскільки $R(M_0 - \overline{\lambda})$— замкнений многовид, то правильність цього твердження випливає безпосередньо з (24), при цьому потрібно взяти до уваги теорему про одночасну замкненість областей значень взаємно спряжених лінійних операторів (відношень) (див. [3],[15, c. 295]), а також застосувавши твердження а) і теорему про взаємну ортогональність многовидів нулів та областей значень взаємно спряжених операторів (відношень) (див. [1, 2, 3]).

г) Безпосередньо з (29), (30) випливає, що

$$R(L_A - \lambda) = H \Leftrightarrow R(A_\lambda) = F_1, \qquad R(L_A^* - \overline{\lambda}) = H \Leftrightarrow R(A_\lambda^*) = G_2.$$

Враховуючи цю обставину та доведене вище, бачимо, що

$$\lambda \in \rho(L_A) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(L_A^*) \Leftrightarrow \ker(L_A^* - \overline{\lambda}) = \{0\},$$
$$R(L_A^* - \overline{\lambda}) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(A_\lambda^*) = \ = \{0\},$$
$$R(A_\lambda^*)^{-1} \in \mathcal{B}(G_2, F_1) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2).$$

Далі (див. наслідок 4)

$$(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

Але $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$, тому $A_\lambda^{-1} A_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2)$ тоді і тільки тоді, коли $A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, F_1)$. Теорему доведедено. □

Список використаної літератури

1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacif. J. Math. — 1961. — **11**, №1. — P. 9–23.
2. *Coddington E.A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear symmetric operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — **79**, № 4. — P. 712–715.
3. *Dijksma A., de Snoo H.S.V.* Self-adjoint extensions of symetric subspaces // Pacif. J. Math. — 1974. — **54**, №1. — P. 71–100.
4. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Самосопряженныерасширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. — 1969. — **184**, №5. — С. 1034–1037.
5. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. — 1975. — **17**, №1. — С. 41–48.
6. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1984. — 284 с.
7. *Malamud M.M., Mogilevskii V.I.* On extensions of dual pairs of operators // Доп. НАН України. — 1997. — №1. — С. 30–37.
8. *Derkach V.A., Hassi S., Malamud M.M., de Snoo H.S.V.* Generalized resolvents andadmissibility // Methods Funct. Anal. Topol. — 2000. — **6**, №3. — P. 24–55.
9. *Арлінський Ю.М.* Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів: Автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук. - Київ, 2000.
10. *Arlinskii Yu.M., Hassi S., Sebestyen Z., de Snoo H.S.V.* On the class of extremal extensions of a nonnegative operator // Operator Theory: Advances and Applications, Recent Advances in Operator Theory and Related Topics. **127**. Basel: Birkhäuser, 2001. — P. 41–81.
11. *Hassi S., de Snoo H.S.V., Sterk A., Winkler H.* Finite-domentional graph perturbations of selfdjoint Sturm-Liouville operators // Tiberiu Constantinescu Memorial Volume, Bucharest: Theta Foundation, 2007. – P. 205–226.

12. *Hassi S., de Snoo H.S.V., Szafraniec F.H.* Infinite-dimentional perturbations, maximally nondensely symmetric operators, and some matrix representations // Indag. Math. — 2012. — **23**. — P. 1087–1117.
13. *Bruk V.M.* On the characteristic operatorof an integral equation with a nevanlinna measure in the infinite-dimentional case // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. — 2014. — **10**, №2. — P. 163–188.
14. *Kuzhel A.V., Kuzhel S.A.* Regular extensions of Hermitian operators, Utrecht: VSP, 1988.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — Москва: Мир, 1972.
16. *Oliyar Yu.I., Storozh O.G.* Criteria of mutual adjoiness of proper extensions of linear relations // Mat. Stud. — 2013. — **40**, №1. – P. 71–78.
17. *Сторож О.Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипатинві розширення деяких нещільно визначених операторів // Карпатські мат. публ. — 2009. — **1**, №2. — С. 207–213.

Стаття: надійшла до редколегії 31.05.2016
доопрацьована 23.08.2016
прийнята до друку 13.03.2017

RESOLVENT AND CONDITIONS OF SOLVABILITY FOR PROPER EXTENSIONS OF LINEAR RELATION IN HILBERT SPACE

Olha PIHURA, Oleh STOROZH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: info@nuft.edu.ua, storog@ukr.net

In the terms of abstract boundary operators a class of extensions L_A of a fixed closed linear relation L_0 in a Hilbert space is investigated. The dimension of the null space, the codimension of range and a criterion of normal solvability for the relation $L_A - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C})$ are established. The resolvent set of the considered extension is founded and its resolvent is constructed.

Key words: Hilbert space, linear relation, operator, resolvent.