ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 39–55
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 39–55

УДК 517.53

ОЦІНКИ ТА МІНІМАЛЬНІ ВІДХИЛЕННЯ ВІД 0 ТА ∞ МЕРОМОРФНОЇ В ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ З МАЛОЮ КІЛЬКІСТЮ НУЛІВ І ПОЛЮСІВ

Олександра БЕРЕЗА, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: berezalesya@gmail.com, khrystiayanyn@ukr.net

Розглянуто мероморфні функції у проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ з малою кількістю нулів і полюсів. Використовуючи аналоги введених В. П. Петренко величин $\beta(a, f)$, отримуємо оцінку на $\beta_0(0, f), \beta_0(\infty, f)$ для мероморфної у $\mathbb{C}^*$ функції f скінченного порядку $\rho \geqslant 1$.

Ключові слова: мероморфна функція, проколена площина, характеристика Неванлінни, дефект, мінімальне відхилення.

1. Вступ

Значна кількість задач теорії розподілу значень потребує вивчення властивостей мероморфних функцій у неоднозв'язних і, зокрема, двозв'язних областях. Багато авторів узагальнювали теорію Неванлінни на випадок двозв'язних областей. За теоремою про конформні відображення двозв'язних областей кожна така область конформно еквівалентна деякому кільцю, або проколеній площині, яку можна вважати узагальненим кільцем. Ми застосовуємо апарат одного з найостанніших підходів до вивчення розподілу значень мероморфних у кільці функцій, який належить А. Кондратюку, А. Христіянину та І. Лайне [1], [2], [3].

Для вивчення глибших асимптотичних властивостей мероморфних функцій В.П. Петренком ввів величини $\beta(a, f)$, які характеризують мінімальне відхилення мероморфної функції f від значення $a \in \overline{\mathbb{C}}$ ([4]). Ці величини, як виявилося, володіють багатьма властивостями аналогічними до властивостей дефектів введених Р. Неванлінною. Природно сформульована задача розширення цієї теорії та перенесення її результатів на випадок двозв'язних областей. Використовуючи аналоги $\beta_0(a, f)$ введених В.П. Петренком величин, отримуємо оцінки на $\beta_0(0, f)$, $\beta_0(\infty, f)$ для мероморфної у $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функції скінченного порядку $\rho \geqslant 1$. Досліджено вплив кількості нулів і полюсів функції f на зростання величин $\ln^+ M(r, f), \ln^+ M(r, \frac{1}{f})$

2010 Mathematics Subject Classification: 30D35 при $r \to 0$ та $r \to +\infty$. Оскільки ці результати є перенесенням відповідних результатів Петренка на випадок мероморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій, то ми загалом використовуємо ідею доведення Петренка з [4] для всієї комплексної площини $\mathbb{C}$, модифікуючи та доповнюючи це доведення для випадку $\mathbb{C}^*$.

2. Означення та позначення

Нехай f – мероморфна функція у проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Припустимо, що $f(z) \neq 0$ на одиничному колі. Позначатимемо через $n_0^1(r,f)$, $n_0^2(r,f)$ кількість полюсів функції f, відповідно, в $\{z : 1 < |z| \leqslant r\}$ та $\{z : \frac{1}{r} \leqslant |z| < 1\}$, $r > 1$ з врахуванням їх кратності. Вважатимемо при цьому $n_0^i(1,f) = 0$, $i = 1,2$. Нехай $n_0(r,f) = n_0^1(r,f) + n_0^2(r,f)$ при $r \geqslant 1$. Крім того, вживатимемо позначення $n_0(r,f,1/f) := n_0(r,f) + n_0(r,\frac{1}{f})$ при $r \geqslant 1$. Аналогічно розуміються позначення $n_0^i(r,f,1/f)$, $i = 1,2$.

Означення 1 ([1],[3]). $N_0^i(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0^i(t,f)}{t} dt, \quad i = 1,2, \quad N_0(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t,f)}{t} dt.$

Позначимо також $N_0(r,f,1/f) = N_0(r,f) + N_0(r,\frac{1}{f})$, $r \geqslant 1$.

Характеристика $T_0(r,f)$ типу Неванлінни для функцій f, мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leq +\infty$ була введена у [1].

Означення 2 ([1],[3]). $T_0(r,f) = m_0(r,f) + N_0(r,f)$, $r \geqslant 1$, *де*

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$m(t,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(te^{i\theta})|\, d\theta, \qquad \frac{1}{R_0} < t < R_0.$$

Через $E(z,p)$ позначатимемо канонічний множник Вейєрштрасса роду p, тобто цілу функцію, яка визначається так:

$$E(z,0) = 1 - z, \quad E(z,p) = (1-z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\}, \quad p \in \mathbf{N}.$$

Означення 3 ([3]). *Нехай $\{a_j\}$ і $\{b_j\}$ послідовності нулів і полюсів функції f відповідно. Позначимо*

$$z_j = \begin{cases} a_j, & \text{якщо } |a_j| > 1, \\ \frac{1}{a_j}, & \text{якщо } |a_j| < 1. \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} b_j, & \text{якщо } |b_j| > 1, \\ \frac{1}{b_j}, & \text{якщо } |b_j| < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Рід послідовності $\{z_j\}$ визначається як найменше невід'ємне ціле p таке, що

$$\sum_{z_j} |z_j|^{-p-1} < +\infty.$$

Означення 4 ([3]). *Порядком $\rho = \rho[f]$ мероморфної функції f в $\mathbb{C}^*$ називається порядок зростання її характеристичної функції $T_0(r, f)$, тобто*

$$\rho[f] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log T_0(r, f)}{\log r}.$$

Означення 5 ([5], [6]). *Функція $\rho(r)$, задана на $[1,\infty)$, називається **уточненим порядком**, якщо: 1) $\rho(r) \geqslant 0$; 2) $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$; 3) $\rho(r)$ – неперервно-диференційовна на $[1,+\infty)$; 4) $\lim\limits_{r\to+\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$.*

Означення 6 ([5], [6]). *Уточнений порядок функції $\rho(r)$ називається уточненим порядком функції $\alpha(r)$, якщо існує $\sigma(\alpha)$, $0<\sigma[\alpha]<+\infty$ таке, що $\sigma[\alpha] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\alpha(r)}{r^{\rho(r)}}$.*

Уточненим порядком мероморфної в $\mathbb{C}^*$ функції f називатимемо уточнений порядок її характеристики $T_0(r, f)$.

Означення 7. *Нехай f мероморфна функція в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Позначимо*

$$\varkappa_0(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)}{T_0(r, f)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_0(r, f, 1/f)}{T_0(r, f)},$$

та

$$\beta_0(a, f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f) + \ln^+ M(\frac{1}{r}, a, f)}{T_0(r, f)}, \quad a \in \overline{\mathbb{C}},$$

де

$$M(r, a, f) = \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z) - a|} \text{ при } a \in \mathbb{C}, \quad M(t, \infty, f) = \max_{|z|=t} |f(z)|.$$

Величини $\beta_0(a, f)$ є аналогами характеристик мінімального відхилення функції f від значення a, введених В.П. Петренком ([4]).

Означення 8 ([3], [2]). *Нехай f - мероморфна функція в $\mathbb{C}^*$. Позначимо*

$$\delta_0(a, f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{m_0(r, \frac{1}{f-a})}{T_0(r, f)} \text{ при } a \in \mathbb{C}, \quad \delta_0(\infty, f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{m_0(r, f)}{T_0(r, f)}.$$

Величина $\delta_0(a, f)$ називається дефектом функції f для значення a.

Домовимося надалі позначати сталі, які залежать від функції f літерою C з індексами знизу, а сталі, які не залежать від f літерою K, з індексами знизу.

3. Основні результати

Теорема 1. *Нехай $f(z)$ мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку $\rho \geqslant 1$. Тоді для $a = 0, \infty$ правильна оцінка*

$$\beta_0(a, f) \leqslant \pi + \varkappa_0(f) K(1 + \rho) \log(1 + \rho), \tag{2}$$

де K – деяка стала.

Зауважимо, що сталу π в теоремі не можна зменшити. Достатньо розглянути функцію $f(z) = \exp(z^p + \frac{1}{z^p})$, $p \in \mathbb{N}$. Справді, оскільки $|f(re^{i\theta})| = \exp\{(r^p + \frac{1}{r^p})\cos p\theta\}$, то $M(r,\infty,f) = M(\frac{1}{r},\infty,f) = \exp(r^p + \frac{1}{r^p})$. Тому $m(r,f) = m(\frac{1}{r},f) = \frac{1}{\pi}(r^p + \frac{1}{r^p})$, $m(1,f) = \frac{2}{\pi}$. А отже $m_0(r,f) = \frac{2}{\pi}(r^p + \frac{1}{r^p} - 2)$. Очевидно, що $N_0(r,f) = 0$. Звідси

$$\beta_0(\infty,f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r,\infty,f) + \log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{T_0(r,f)} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^p + \dfrac{1}{r^p} + r^p + \dfrac{1}{r^p}}{\dfrac{2}{\pi}(r^p + \dfrac{1}{r^p} - 2)} = \pi.$$

Аналогічно $\beta_0(0,f) = \pi$. Варто зауважити, що $M(r,0,f) = M(\frac{1}{r},0,f) = \exp(r^p + \frac{1}{r^p})$, а також використати властивість характеристики $T_0(r,f) = T_0(r,\frac{1}{f})$.

Теорема 2. *Нехай f – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку $\rho \geqslant 1$. Якщо $\sum\limits_a \delta_0(a,f) = 2$, то $\beta_0(\infty,f) \leqslant \pi$.*

4. Допоміжні результати

Теорема 3 ([3]). *Нехай f – мероморфна функція в $\mathbb{C}^*$, яка має скінченний порядок, нехай $\{a_j\}$ і $\{b_j\}$ – послідовності її нулів та полюсів відповідно, і нехай p – рід послідовності $\{z_j\}$, q – рід послідовності $\{w_j\}$, що визначається співвідношенням (1). Тоді*

$$f(z) = z^m e^{z^{-\nu}P(z)} \frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant 1} E(\frac{a_j}{z},p) \prod\limits_{|a_j|>1} E(\frac{z}{a_j},p)}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant 1} E(\frac{b_j}{z},q) \prod\limits_{|b_j|>1} E(\frac{z}{b_j},q)}, \tag{3}$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $P(z)$ – поліном, $\deg P(z) = 2\nu$, і $\nu \leqslant \rho$.

Лема 1. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція*

$$f(z) = z^m e^{\alpha_0 z^p + P_{p-1}(z)} \frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant 1} E(\frac{a_j}{z},p) \prod\limits_{|a_j|>1} E(\frac{z}{a_j},p)}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant 1} E(\frac{b_j}{z},p) \prod\limits_{|b_j|>1} E(\frac{z}{b_j},p)} \tag{4}$$

скінченного порядку ρ ($p = [\rho]$) задовольняє рівність

$$\log|f(z)| = m\log|z| + \mathrm{Re}\,\{G_1(R)z^p + G_2(R)z^{-p}\} + \\ + \log\left|\frac{\prod\limits_{1<|a_k|<R}(1-\frac{z}{a_k})}{\prod\limits_{1<|b_k|<R}(1-\frac{z}{b_k})}\right| + \log\left|\frac{\prod\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}(1-\frac{a_k}{z})}{\prod\limits_{\frac{1}{R}<|b_k|\leqslant 1}(1-\frac{b_k}{z})}\right| + H(z), \tag{5}$$

де $0 < \frac{1}{R} < |z| = r < R < +\infty$, $P_{p-1}(z)$ – поліном не вище $p-1$ степеня, $E(u,p)$ – канонічний множник Вейерштрасса роду p, а

$$G_1(R) = \alpha_0 + \frac{1}{p}\left\{\sum_{1<|a_k|<R}\frac{1}{a_k^p} - \sum_{1<|b_k|<R}\frac{1}{b_k^p}\right\}, \tag{6}$$

$$G_2(R) = \frac{1}{p}\left\{\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} a_k^p - \sum_{\frac{1}{R}<|b_k|\leqslant 1} b_k^p\right\}. \tag{7}$$

Причому $H : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ *і*

$$\begin{aligned}|H(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{R}\right)^k (r^k + \frac{1}{r^k})\left\{\frac{n_0(R,f,\frac{1}{f})}{k} + N_0(R,f,\frac{1}{f}) + kR^k\int\limits_1^R \frac{N_0(t,f,\frac{1}{f})}{t^{k+1}}dt\right\}+\\ + \sum_{l=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^l (r^l + \frac{1}{r^l})\, lR^l \int\limits_R^\infty \frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{l+1}}dt + C_1 r^{p-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Доведення. Співвідношення (5) одержується з (4), якщо врахувати, що $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$, де

$$\begin{aligned}H_1(z) = \sum_{1<|a_k|<R} \mathrm{Re}\left\{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{p-1}\right\} -\\ - \sum_{1<|b_l|<R} \mathrm{Re}\left\{\frac{z}{b_l} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{b_l}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{b_l}\right)^{p-1}\right\} +\\ + \sum_{|a_k|\geqslant R} \log|E(\frac{z}{a_k},p)| - \sum_{|b_l|\geqslant R} \log|E(\frac{z}{b_l},p)| + \mathrm{Re}\, P_{p-1}(z),\end{aligned} \tag{9}$$

а

$$\begin{aligned}H_2(z) = \sum_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1} \mathrm{Re}\left\{\frac{a_k}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{a_k}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{a_k}{z}\right)^{p-1}\right\} -\\ - \sum_{\frac{1}{R}<|b_l|\leqslant 1} \mathrm{Re}\left\{\frac{b_l}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{b_l}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{b_l}{z}\right)^{p-1}\right\} +\\ + \sum_{|a_k|\leqslant \frac{1}{R}} \log|E(\frac{a_k}{z},p)| - \sum_{|b_l|\leqslant \frac{1}{R}} \log|E(\frac{b_l}{z},p)|.\end{aligned} \tag{10}$$

Використовуючи нерівність $|\log|E(u,p)|| \leqslant \sum\limits_{l=p+1}^{\infty} \frac{|u|^l}{l}$, яка правильна при $|u| < 1$, $p \geqslant 1$, з (9) та (10) отримуємо

$$|H_1(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{r^k}{k}\int\limits_1^R \frac{dn_0^1(t,f,1/f)}{t^k} + \sum_{l=p+1}^{\infty}\frac{r^l}{l}\int\limits_R^\infty \frac{dn_0^1(t,f,1/f)}{t^l} + C_1 r^{p-1},$$

$$|H_2(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{r^k k}\int\limits_1^R \frac{dn_0^2(t,f,1/f)}{t^k} + \sum_{l=p+1}^{\infty}\frac{1}{r^l l}\int\limits_R^\infty \frac{dn_0^2(t,f,1/f)}{t^l}.$$

Тобто,

$$|H(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}\tfrac{1}{k}(r^k+\tfrac{1}{r^k})\int_1^R\frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^k}+\sum_{l=p+1}^{\infty}\tfrac{1}{l}(r^l+\tfrac{1}{r^l})\int_R^{\infty}\frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^l}+C_1r^{p-1}. \quad (11)$$

Двічі інтегруючи частинами у першому інтегралі з (11), маємо

$$\int_1^R\frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^k}=\frac{n_0(R,f,1/f)}{R^k}+k\int_1^R\frac{dN_0(t,f,1/f)}{t^k}=$$
$$=\frac{n_0(R,f,1/f)}{R^k}+k\left(\frac{N_0(R,f,1/f)}{R^k}+k\int_1^R\frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{k+1}}dt\right).$$

Для оцінки другого інтеграла з (11) знову двічі застосовуємо інтегрування частинами

$$\int_R^{\infty}\frac{dn_0(t,f,1/f)}{t^l}=-\frac{n_0(R,f,1/f)}{R^l}+l\int_R^{\infty}\frac{dN_0(t,f,1/f)}{t^l}=$$
$$=-\frac{n_0(R,f,1/f)}{R^l}-l\frac{N_0(R,f,1/f)}{R^l}+l^2\int_R^{\infty}\frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{l+1}}dt\leqslant l^2\int_R^{\infty}\frac{N_0(t,f,1/f)}{t^{l+1}}dt.$$

З отриманих оцінок безпосередньо випливає (8). □

Лема 2. *Нехай f – мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція порядку $\rho\geqslant 1$, $\rho(r)$ її уточнений порядок. Тоді при $y\geqslant y_0>r_0>1$ правильна нерівність*

$$\int_{y_0}^{y}r^{-\rho(r)-1}\left\{\int_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}dn_0(t,f,1/f)+\int_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}dn_0(t,f,1/f)\right\}dr\leqslant$$
$$\leqslant K_1(1+\rho)\log(1+\rho)\int_{y_0}^{y}r^{-\rho(r)-1}N_0(r,f,1/f)dr+C_2, \quad (12)$$

де $q=\max\{2,\rho\}$.

Доведення. Нехай I – це інтеграл у лівій частині нерівності (12). Він є сумою двох інтегралів. Позначимо їх, відповідно, I_1 та I_2. Оцінку вигляду (12) для I_1 отримуємо аналогічним способом до класичного випадку, розглянутого В.П. Петренком [4, Лема 7.3]. Варто лише змінити позначення $n(r)$ на $n_0(r,f,1/f)$.

Розглянемо тепер інтеграл I_2

$$I_2=\int_{y_0}^{y}r^{-\rho(r)-1}\left\{\int_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}dn_0(t,f,1/f)\right\}dr.$$

Для $r \geqslant 1$, $t \geqslant 1$ при $\dfrac{r}{t} \leqslant 1$, виконується

$$\left|1-\frac{r}{t}\right| = 1-\frac{r}{t} \leqslant 1-\frac{1}{t} \leqslant 1-\frac{1}{rt} = \left|1-\frac{1}{rt}\right|.$$

Тобто при $r \geqslant 1$, $t \geqslant 1$, $\frac{r}{t} \leqslant 1$ виконується нерівність

$$\log^+ \frac{1}{|1-\frac{r}{t}|} \geqslant \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}.$$

У випадку, коли вже отримано оцінку (12) для інтеграла I_1, з огляду на невід'ємність підінтегральних виразів, достатньо розглянути лише ту частину множини по якій береться інтеграл I_2, яка потрапляє до множини $\{(r,t) : r \geqslant 1, t \geqslant 1, \frac{r}{t} > 1\}$.

Розглянемо спочатку інтеграл $I_2(t) = \displaystyle\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}}{r^{\rho(r)+1}} dr$. Перейдемо до нової змінної τ, яка пов'язана з r таким співвідношенням $1-\dfrac{1}{rt} = \dfrac{\tau}{q}$. Використовуючи властивість уточненого порядку $\rho(r)$ [4], матимемо

$$I_2(t) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}}{r^{\rho(r)+1}} dr = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log \frac{1}{1-\frac{1}{rt}}}{r^{\rho(r)+1}} dr = \frac{1+o(1)}{qt^{\rho}} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\log \frac{q}{\tau}}{\left(1-\frac{\tau}{q}\right)^{-\rho+1}} d\tau, \quad t \to +\infty,$$

де $\tau_1 = q(1-\frac{1}{y_0 t})$, $\tau_2 = q(1-\frac{1}{yt})$.

В останньому інтегралі зробимо ще одну заміну $u = \dfrac{q}{\tau}$

$$I_2(t) = \frac{1+o(1)}{qt^{\rho}} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\log u}{\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-\rho+1}} \frac{(-q)\,du}{u^2} = \frac{1+o(1)}{t^{\rho}} \int\limits_{u_2}^{u_1} \frac{\log u\,du}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}}, \quad t \to +\infty,$$

де $u_1 = (1-\frac{1}{y_0 t})^{-1}$, $u_2 = (1-\frac{1}{yt})^{-1}$.

При $t \geqslant 1$ одержуємо

$$\frac{1}{y_0 t} \leqslant \frac{1}{y_0} \implies 1-\frac{1}{y_0 t} \geqslant 1-\frac{1}{y_0} \implies \frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0}}.$$

Оскільки $y_0 t \geqslant y_0 > 1$, то $\frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}} > 1$. Аналогічно при $y \geqslant y_0 > 1$ і $t \geqslant 1$

$$1 < \frac{1}{1-\frac{1}{yt}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y}}, \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{yt}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}}.$$

Звідси

$$1 < \frac{1}{1-\frac{1}{yt}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0 t}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{y_0}}.$$

Тобто, $1 < u_2 \leqslant u_1 \leqslant (1-\frac{1}{y_0})^{-1}$, а отже,

$$0 \leqslant \int\limits_{u_2}^{u_1} \frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} du < \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} du. \tag{13}$$

При $u \to +\infty: \dfrac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} \sim \dfrac{\log u}{u^2}$. Якщо ж $u \to 1+0$, то

$$\frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} \sim \frac{u-1}{(u-1)^{-\rho+1}} = (u-1)^{\rho}.$$

Отже, останній інтеграл у (13) є збіжним, тому

$$I_2(t) = \frac{1+o(1)}{t^{\rho}} \int\limits_{u_2}^{u_1} \frac{\log u}{(u-1)^{-\rho+1}u^{\rho+1}} du < \frac{C_3}{t^{\rho(t)}}, \qquad t \to +\infty.$$

Повертаючись до інтеграла I_2, пригадуючи, що нам достатньо оцінити лише його частину, і використовуючи той факт, що $\rho(r)$ є уточненим порядком функції f (тобто її характеристики $T_0(r,f)$), отримуємо

$$\int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1} \left\{ \int\limits_{1}^{r} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|} dn_0(t,f,\frac{1}{f}) \right\} dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1} \left\{ \int\limits_{1}^{y} \log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|} dn_0(t,f,\frac{1}{f}) \right\} dr =$$

$$= \int\limits_{1}^{y} \left\{ \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\log^+ \frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}}{r^{\rho(r)+1}} dr \right\} dn_0(t,f,\frac{1}{f}) = \int\limits_{1}^{y} I_2(t)\, dn_0(t,f,\frac{1}{f}) =$$

$$\leqslant I_2^y n_0(y,f,\frac{1}{f}) \leqslant C_3 \frac{n_0(y,f,\frac{1}{f})}{y^{\rho(y)}} \leqslant C_3 \frac{N_0(2y,f,\frac{1}{f})}{y^{\rho(y)}} \log 2 \leqslant C_4.$$

Це завершує доведення. $\square$

Теорема 4 ([3], [2])**.** *Нехай f – відмінна від сталої мероморфна функція в $\mathbb{C}^*$ і $a_1, a_2, \ldots, a_q$ – різні комплексні числа ($q \geqslant 2$). Тоді*

$$m_0(r,f) + \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, \frac{1}{f-a_\nu}) \leqslant 2T_0(r,f) - \widehat{N}_0(r,f) + S(r,f), \quad r > 1, \tag{14}$$

де

$$\widehat{N}_0(r,f) = N_0(r,\frac{1}{f'}) + 2N_0(r,f) - N_0(r,f')$$

і

$$S(r,f) = m_0(r,\frac{f'}{f}) + \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r,\frac{f'}{f-a_\nu}) + O(1), \quad r \to +\infty.$$

Лема 3 ([3])**.** *Якщо $\mathcal{R}$ - раціональна функція, $deg\mathcal{R} = q$, і f мероморфна в $\mathbb{C}^*$, то*

$$T_0(r, \mathcal{R} \circ f) = qT_0(r,f) + O(1), \qquad r \to +\infty.$$

Лема 4. *Якщо g – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція скінченного порядку ρ, для якої $\sum\limits_{a} \delta_0(a,g) = 2$, то $\delta_0(0,g') = 1$.*

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82

Доведення. Нехай $H(z) = h(g(z))$, де $h(\omega) = \sum\limits_{\nu=1}^{q} \dfrac{1}{\omega - a_\nu}$. За Лемою 3

$$m_0(r, H) = T_0(r, H) - N_0(r, H) = qT_0(r, f) - \sum_{\nu=1}^{q} N_0(r, a_\nu, g) + O(1) = \\ = \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, a_\nu, g) + O(1), \qquad r \to +\infty. \tag{15}$$

Враховуючи означення функції $m_0(r, f)$ та Теорему 4, можна записати

$$m_0(r, H) \leqslant m_0(r, \frac{1}{g'}) + m_0(r, g'H) \leqslant \\ \leqslant m_0(r, \frac{1}{g'}) + \sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, \frac{g'}{g - a_\nu}) + \log q = m_0(r, \frac{1}{g'}) + S(r, g), \tag{16}$$

де $S(r) = O(\log r)$ при $r \to +\infty$. З (15) та (16) отримуємо

$$\sum_{\nu=1}^{q} m_0(r, a_\nu) - S(r, g) \leqslant m_0(r, \frac{1}{g'}). \tag{17}$$

Крім того,

$$T_0(r, g') = m_0(r, g') \leqslant m_0(r, g) + m_0(r, \frac{g'}{g}) + O(1) \leqslant T_0(r, g) + O(\log r), \quad r \to +\infty. \tag{18}$$

Поділимо (17) на $T_0(r, g)$ та спрямуємо $r \to +\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta_0(a_\nu, g) \leqslant \varliminf_{r\to+\infty} \frac{m_0(r, \frac{1}{g'})}{T_0(r, g')} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{T_0(r, g')}{T_0(r, g)}. \tag{19}$$

З огляду на (18)

$$\frac{T_0(r, g')}{T_0(r, g)} \leqslant \frac{T_0(r, g) + O(\log r)}{T_0(r, g)}.$$

Звідси

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{T_0(r, g')}{T_0(r, g)} \leqslant 1. \tag{20}$$

Тому (19) набуде вигляду

$$\sum_{a \neq \infty} \delta_0(a, g) \leqslant \delta_0(0, g'). \tag{21}$$

За умовою леми $\sum\limits_{a} \delta_0(a, g) = 2$. Оскільки g є голоморфною в $\mathbb{C}^*$, то $\sum\limits_{a\neq\infty} \delta_0(a, g) = 1$. Отже, з (21) отримуємо $\delta_0(0, g') = 1$. $\square$

5. Доведення Теореми 1

Нехай $G_i(R)$ – функції з Леми 1. Для фіксованого $R>1$ позначимо через $\omega_i(R)$ аргумент $G_i(R)$, $i=1,2$. Розглянемо функцію

$$h_R(z)=exp\{m\log z+G_1(R)z^p+G_2(R)z^{-p}\}. \tag{22}$$

Враховуючи, що

$$|h_R(re^{i\theta})|=\exp\{m\log r+G_1(R)r^p\cos(p\theta+\omega_1(R))+G_2(R)r^{-p}\cos(p\theta-\omega_2(R))\},$$

$$|h_R(\tfrac{1}{r}e^{i\theta})|=\exp\{-m\log r+G_1(R)r^{-p}\cos(p\theta-\omega_1(R))+G_2(R)r^p\cos(p\theta+\omega_2(R))\},$$

$$|h_R(e^{i\theta})|=\exp\{G_1(R)\cos(p\theta+\omega_1(R))+G_2(R)\cos(p\theta-\omega_2(R))\}$$

матимемо

$$m_0(r,h_R)=m(r,h_R)+m(\tfrac{1}{r},h_R)-2m(1,h_R)=$$

$$=\frac{|G_1(R)|}{\pi}r^p+\frac{|G_2(R)|}{\pi}r^{-p}+\frac{|G_1(R)|}{\pi}r^{-p}+\frac{|G_2(R)|}{\pi}r^p-\frac{2}{\pi}(|G_1(R)|+|G_2(R)|)=$$

$$=\frac{|G_2(R)|+|G_2(R)|}{\pi}(r^p+r^{-p}-2). \tag{23}$$

Запишемо допоміжні рівності та нерівності, які нам знадобляться в процесі доведення.

1) $\pi m_0(r,h_R)+2(|G_1(R)|+|G_2(R)|)=(|G_1(R)|+|G_2(R)|)(r^p+r^{-p})$ (випливає з (23));

2) $\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log|1-\frac{re^{i\theta}}{a_k}|=\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log|\frac{re^{i\theta}}{a_k}|+\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log|\frac{a_k}{re^{i\theta}}-1|\leqslant\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log\frac{r}{|a_k|}+$
$+\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log(1+\frac{|a_k|}{r})\leqslant\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log\frac{r}{|a_k|}+n_0^1(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{R}{r})$;

3) $\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}\log\left|1-\frac{a_kr}{e^{i\theta}}\right|=\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}\left(\log\left|\frac{a_kr}{e^{i\theta}}\right|+\log\left|\frac{e^{i\theta}}{a_kr}-1\right|\right)\leqslant\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}\log(r|a_k|)+$
$+n_0^2(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{R}{r})$;

4) $\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log|1-\frac{e^{i\theta}}{ra_k}|\leqslant n_0^1(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{1}{r})\leqslant n_0^1(R,\frac{1}{f})$;

5) $\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}\log|1-\frac{a_k}{re^{i\theta}}|\leqslant n_0^2(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{1}{r})\leqslant n_0^2(R,\frac{1}{f})$.

6) $\sum\limits_{\frac{1}{R}<|a_k|\leqslant 1}\log(r|a_k|)=-\int\limits_{\frac{1}{R}}^{1}\log(rt)\,dn_0^2(\frac{1}{t},f)=-n_0^2(\frac{1}{t},f)\log(rt)\Big|_{\frac{1}{R}}^{1}+\int\limits_{\frac{1}{R}}^{1}n_0^2(\frac{1}{t},f)\frac{dt}{t}=$
$=n_0^2(R,f)\log\frac{r}{R}+N_0^2(R,f)\leqslant N_0^2(R,f)$.

7) $\sum\limits_{1<|a_k|\leqslant R}\log\frac{r}{|a_k|}=\int\limits_{1}^{R}\log\frac{r}{t}\,dn_0^1(t,f)=n_0^1(r,f)\log\frac{r}{t}\Big|_{1}^{R}+\int\limits_{1}^{R}n_0^1(t,f)\frac{dt}{t}=\log\frac{r}{R}n_0^1(R,f)+$
$+N_0^1(R,f)\leqslant N_0^1(R,f)$.

8) $|G_1(R)|\leqslant|\alpha_0|+N_0^1(R,f)+N_0^1(R,\frac{1}{f})$, $|G_2(R)|\leqslant N_0^2(R,f)+N_0^2(R,\frac{1}{f})$ (випливає з (6), (7)).

Позначимо $z=re^{i\theta}$, $\tilde{z}=\frac{1}{r}e^{i\theta}$. Зауважимо, що як для z так і для $\tilde{z}$ правильна оцінка (8) з Леми 1, а також $\log|\tilde{z}|=-\log|z|$. Враховуючи (23), (5), а також допоміжні рівності та нерівності 1) – 8), отримуємо:

$$\log|f(re^{i\varphi})|+\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|\leqslant m\log|z|+|G_1(R)|r^p+|G_2(R)|r^{-p}+\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log|1-\frac{z}{a_k}|+$$

$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log\left|\frac{1}{1-\frac{z}{b_k}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log\left|1-\frac{a_k}{z}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log\left|\frac{1}{1-\frac{b_k}{z}}\right|+|H(z)|+$$

$$+m\log|\tilde z|+|G_1(R)|r^{-p}+|G_2(R)|r^p+\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log|1-\frac{\tilde z}{a_k}|+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log\left|\frac{1}{1-\frac{\tilde z}{b_k}}\right|+$$

$$+\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log\left|1-\frac{a_k}{\tilde z}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log\left|\frac{1}{1-\frac{b_k}{\tilde z}}\right|+|H(\tilde z)|\leqslant$$

$$\leqslant(|G_1(R)|+|G_2(R)|)(r^p+r^{-p})\overset{2)}{+}\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log\frac{r}{|a_k|}+n_0(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{R}{r})+$$

$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|\overset{5)}{+}n_0^2(R,\frac{1}{f})+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|+$$

$$\overset{4)}{+}n_0^1(R,\frac{1}{f})+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|\overset{3)}{+}\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log r|a_k|+n_0^2(R,\frac{1}{f})\log(\frac{R}{r}+1)+$$

$$+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|+|H(z)|+|H(\tilde z)|\overset{1),8)}{\leqslant}\pi m_0(r,h_R)+2(N_0(R,f)+N_0(R,\frac{1}{f}))+$$

$$+2|\alpha_0|+n_0(R,\frac{1}{f})\log(1+\frac{R}{r})+n_0(R,\frac{1}{f})\overset{6)+7)}{+}N_0(R,f)+|H(z)|+|H(\tilde z)|+$$

$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|+$$

$$+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|. \tag{24}$$

Але

$$\log\left|\frac{f(z)}{h_R(z)}\right|=H(z)+\sum_{1\leqslant|a_k|<R}\log|1-\frac{z}{a_k}|+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log\left|\frac{1}{1-\frac{z}{b_k}}\right|+$$
$$+\sum_{\frac{1}{R}<|a_k|<1}\log\left|1-\frac{a_k}{z}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log\left|\frac{1}{1-\frac{b_k}{z}}\right|. \tag{25}$$

Позначивши $\{c_k\}=\{a_k\}\cup\{b_k\}$ та використавши (25), отримуємо

$$m_0(r,\frac{h_R}{f})\leqslant m(r,\frac{h_R}{f})+m(\frac{1}{r},\frac{h_R}{f})\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{f(re^{i\theta})}{h_R(re^{i\theta})}\right|\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{f(\frac{1}{r}e^{i\theta})}{h_R(\frac{1}{r}e^{i\theta})}\right|\right|d\theta\overset{(25)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant|c_k|<R} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right| d\theta + \sum_{\frac{1}{R}<|c_k|<1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right| d\theta+$$
$$+\max_{|z|=r}|H(z)| + \max_{|z|=\frac{1}{r}}|H(z)|. \quad (26)$$

Маємо

$$\int\limits_0^{\frac{r}{|c_k|}} \frac{dt}{|te^{i\theta}-1|} \geqslant \left|\int\limits_0^{\frac{r}{|c_k|}} \frac{dt}{te^{i\theta}-1}\right| = \left| e^{-i\theta}\log|te^{i\theta}-1|\Big|_{t=0}^{t=\frac{r}{|c_k|}}\right| = \left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|. \quad (27)$$

Подібно оцінюємо ще один інтеграл

$$\int\limits_0^{\frac{|c_k|}{r}} \frac{dt}{|te^{i\theta}-1|} \geqslant \left| e^{-i\theta}\log|te^{i\theta}-1|\Big|_{t=0}^{t=\frac{|c_k|}{r}}\right| = \left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|. \quad (28)$$

Із нерівностей (27) і (28) випливають відповідні оцінки

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}||d\theta \leqslant \int\limits_0^{\frac{r}{|c_k|}} A(t)\,dt, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}||d\theta \leqslant \int\limits_0^{\frac{|c_k|}{r}} A(t)\,dt, \quad (29)$$

де $A(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{|te^{i\theta}-1|}$.

Едрей і Фукс [7] отримали оцінку для $A(t)$

$$A(t) \leqslant \frac{1}{1+t}\left\{1+\frac{2}{\pi}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right\}, \qquad t\geqslant 0.$$

Використовуючи цей результат, з (29) отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right| d\theta \leqslant \log(1+\frac{r}{|c_k|}) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}{1+t}dt =$$
$$= \log\left(1+\frac{r}{|c_k|}\right) + K_2 \leqslant \log^+\frac{r}{|c_k|} + K_3, \quad (30)$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right| d\theta \leqslant \log^+\frac{|c_k|}{r} + K_4. \quad (31)$$

Отож,

$$\sum_{1\leqslant|c_k|<R} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right| d\theta \leqslant N_0^1(,f,\frac{1}{f}) + K_3 n_0^1(R,f,\frac{1}{f}), \quad (32)$$

$$\sum_{\frac{1}{R}<|c_k|<1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right| d\theta \leqslant N_0^2(r,f,\frac{1}{f}) + K_4 n_0^2(R,f,\frac{1}{f}). \quad (33)$$

Використовуючи (8), (23), (27), (28), (32), (33), одержуємо

$$m_0(r,h_R)\leqslant m_0(r,f)+m_0(r,\frac{h_R}{f})+C_5\leqslant m_0(r,f)+\sum_{1\leqslant|c_k|<R}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{r}{|c_k|}e^{i\theta}\right|\right|d\theta+$$

$$+\sum_{\frac{1}{R}<|c_k|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|1-\frac{|c_k|}{r}e^{i\theta}\right|\right|d\theta+\max_{|z|=r}|H(z)|+\max_{|z|=\frac{1}{r}}|H(z)|+C_5\leqslant$$

$$\overset{(32),(33)}{\leqslant} m_0(r,f)+N_0(r,f,\frac{1}{f})+K_5 n_0(R,f,\frac{1}{f})+\max_{|z|=r}|H(z)|+\max_{|z|=\frac{1}{r}}|H(z)|+C_5\leqslant$$

$$\overset{(8)}{\leqslant} m_0(r,f)+N_0(r,f,\frac{1}{f})+K_5 n_0(R,f,\frac{1}{f})+$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{R}\right)^k(r^k+\frac{1}{r^k})\left\{\frac{n_0(R,f,\frac{1}{f})}{k}+N_0(R,f,\frac{1}{f})+kR^k\int\limits_1^R\frac{N_0(t,f,\frac{1}{f})}{t^{k+1}}dt\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^l(r^l+\frac{1}{r^l})lR^l\int\limits_R^{\infty}\frac{N_0(t,f,\frac{1}{f})}{t^{l+1}}dt+Cr^{p+1}\right)+C_5. \qquad (34)$$

Нехай $R=\frac{q}{q-1}r$. З огляду на рівності

$$\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|=\int\limits_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}dn_0^1(t,f);\quad \sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|=-\int\limits_{(1-\frac{1}{q})\frac{1}{r}}^{1}\log^+\frac{1}{|1-\frac{t}{r}|}dn_0^2(\tfrac{1}{t},f);$$

$$\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|=\int\limits_1^{\frac{q}{q-1}r}\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}dn_0^1(t,f);\quad \sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|=-\int\limits_{(1-\frac{1}{q})\frac{1}{r}}^{1}\log^+\frac{1}{|1-rt|}dn_0^2(\tfrac{1}{t},f)$$

матимемо

$$\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{r}{|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{|b_k|}{r}}\right|+\sum_{1\leqslant|b_k|<R}\log^+\left|\frac{1}{1-\frac{1}{r|b_k|}}\right|+\sum_{\frac{1}{R}<|b_k|<1}\log^+\left|\frac{1}{1-r|b_k|}\right|=$$

$$=\int\limits_1^{\frac{q}{q-1}r}\left(\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}+\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}\right)dn_0(t,f,\frac{1}{f}). \qquad (35)$$

Тоді для $1<r_0<y_0<y<+\infty$ з (24), (34) та (35), одержимо

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\log^+M(r,\infty,f)+\log^+M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant$$

$$\leqslant\pi\int\limits_{y_0}^{y}\frac{m_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr+\pi\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+(\pi K_5)\int\limits_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$

$$+(2\pi+2)\sum_{k=1}^{p-1}(1-\frac{1}{q})^k\left(1+\frac{1}{r^{2k}}\right)\left\{\frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+\right.$$

$$+\left(\frac{q}{q-1}\right)^k k\int\limits_{y_0}^{y}\frac{r^k\int\limits_{1}^{\frac{q}{q-1}r}t^{-k-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr\Bigg\}+$$

$$+(2\pi+2)\sum_{l=p+1}^{\infty}(1-\frac{1}{q})^l\left(1+\frac{1}{r^l}\right)l\left(\frac{q}{q-1}\right)^l\int\limits_{y_0}^{y}\frac{r^l\int\limits_{\frac{q}{q-1}r}^{\infty}t^{-l-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{C(2\pi+2)r^{p-1}+C_5+2|\alpha_0|}{r^{\rho(r)+1}}dr+(\log(1+\frac{q}{q-1})+1)\int\limits_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$

$$+3\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(\frac{q}{q-1}r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+\int\limits_{y_0}^{y}\left\{\int\limits_{1}^{\frac{q}{q-1}r}\left(\log^+\frac{1}{|1-\frac{r}{t}|}+\log^+\frac{1}{|1-\frac{1}{rt}|}\right)dn_0(t,f,\frac{1}{f})\right\}r^{-\rho(r)-1}dr. \tag{36}$$

Аналогічно як у випадку функцій мероморфних у площині отримуємо такі оцінки:

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{n_0(\frac{q}{q-1}t,f,\frac{1}{f})}{t^{\rho(t)+1}}dt\leqslant K_6\cdot\rho\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_6, \tag{37}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(\frac{q}{q-1}r)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant K_7\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_7, \tag{38}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(\frac{q}{q-1}r)^k\int\limits_{0}^{\frac{q}{q-1}r}t^{-k-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant K_8\frac{1}{\rho-k}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_8, \tag{39}$$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(\frac{q}{q-1}r)^l\int\limits_{\frac{q}{q-1}r}^{\infty}t^{-l-1}N_0(t,f,\frac{1}{f})dt}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant K_9\frac{1}{l-\rho}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_9, \tag{40}$$

при $y_0>r_0>1$. Крім того, виконуються нерівності

$$\rho<(\rho+1)\log(\rho+1)\quad\text{при}\ \rho\geqslant 1;\quad \log\left(1+\frac{q}{q-1}\right)\leqslant\log 3. \tag{41}$$

Використовуючи (37)–(41), Лему 2 та означення характеристики $T_0(r,f)$, з (36) одержимо

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\log^+M(r,\infty,f)+\log^+M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant$$

$$\leqslant \pi\int\limits_{y_o}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr+K_{10}(\rho+1)\log(\rho+1)\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+$$
$$+K_{11}\sum_{l=p+1}^{\infty}(1-\frac{1}{q})^l\frac{l}{l-\rho}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})dr}{r^{\rho(r)}}+ \tag{42}$$
$$+K_{12}\sum_{k=1}^{p-1}(1-\frac{1}{q})^k\left\{\frac{\rho}{k}+1+\frac{k}{\rho-k}\right\}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_{10}.$$

Отож, для $1<r_0<y_0<y<\infty$

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\log^+M(r,\infty,f)+\log^+M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant$$
$$\leqslant \pi\int\limits_{y_o}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr+S(\rho)K_{13}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_0(r,f,\frac{1}{f})}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_{14}\leqslant$$
$$\leqslant\{\pi+\varkappa_0(f)S(\rho)K_{13}\}\int\limits_{y_o}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr+C_{14}, \tag{43}$$

де $\quad S(\rho)=(\rho+1)\log(\rho+1)+\sum\limits_{k=1}^{p-1}(1-\frac{1}{q})^k\left\{\frac{\rho}{k}+1+\frac{k}{\rho-k}\right\}+\sum\limits_{l=p+1}^{\infty}\frac{l}{l-\rho}(1-\frac{1}{q})^l=$

$$\leqslant K_{14}(\rho+1)\log(\rho+1)+\rho\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\rho-k}+q+\rho\sum_{l=p+1}^{2p}\frac{1}{l-\rho}(1-\frac{1}{q})^l+\rho\sum_{l=2p+1}^{\infty}\frac{1}{l-\rho}(1-\frac{1}{q})^l\leqslant$$
$$\leqslant K_{15}(\rho+1)\log(\rho+2)\frac{1}{p+1-\rho}. \tag{44}$$

Для обґрунтування останніх двох знаків $\leqslant$ у (44) достатньо використати міркування з роботи Петренка [4], які у цьому випадку просто переносяться.

Якщо $p\leqslant\rho\leqslant p+\frac{1}{2}$, то $S(\rho)\leqslant K_{16}(1+\rho)\log(2+\rho)$. Звідси

$$\begin{aligned}&\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\log^+M(r,\infty,f)+\log^+M(\frac{1}{r},\infty,f)}{r^{\rho(r)+1}}dr\leqslant\\ &\leqslant\{\pi+\varkappa_0(f)K_{16}(1+\rho)\log(2+\rho)\}\int\limits_{y_0}^{y}\frac{T_0(r,f)}{r^{\rho(r)+r}}dr+C_{14}.\end{aligned} \tag{45}$$

Нерівність (45) не змінюється, якщо $p+\frac{1}{2}\leqslant\rho<p+1$. У цьому випадку розпочнемо із зображення функції

$$f(z)=z^me^{P_{p+1}(z)}\frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant1}E(\frac{a_j}{z},p+1)\prod\limits_{|a_j|>1}E(\frac{z}{a_j},p+1)}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant1}E(\frac{b_j}{z},p+1)\prod\limits_{|b_j|>1}E(\frac{z}{b_j},p+1)}$$

і проводимо міркування аналогічні до вищенаведених.

Далі, оскільки $T_0(r,f)$ належить до класу розбіжності стосовно уточненого порядку, то, враховуючи (45), матимемо

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}(\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f))dr}{\int\limits_{y_0}^{y} r^{-\rho(r)-1}T_0(r,f)dr} \leqslant \pi+\varkappa_0(f)K_{17}(1+\rho)\log(2+\rho).$$

Звідси одержуємо

$$\beta_0(\infty,f)=\lim_{r\to\infty}\frac{\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{T_0(r,f)} \leqslant \pi+K\varkappa_0(f)(1+\rho)\log(1+\rho).$$

Нерівність (2) для $\beta_0(0,f)$ доводиться аналогічно, з використанням властивості $T_0(r,f)=T_0(r,\frac{1}{f})$ ([1], [3]). □

6. Доведення Теореми 2

Розглянемо функцію f'. За Лемою 4 отримаємо $\delta_0(0,f')=1$. Оскільки f – голоморфна, то $N_0(r,f')=0$, а отже,

$$\varkappa_0(f')=\lim_{r\to\infty}\frac{N_0(r,\frac{1}{f'})}{T_0(r,f')}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m_0(r,\frac{1}{f'})}{T_0(r,f')}=1-\delta_0(0,f')=0.$$

У такому випадку за Теоремою 1 матимемо $\beta_0(0,f')\leqslant\pi$, $\beta_0(\infty,f')\leqslant\pi$. Тому для f отримуємо

$$\beta_0(\infty,f)\leqslant\pi\lim_{r\to\infty}\frac{T_0(r,f')}{T_0(r,f)}\lim_{r\to\infty}\frac{\log^+ M(r,\infty,f)+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{\log^+ M(r,\infty,f')+\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f')}. \tag{46}$$

Як ми вже бачили у доведенні Леми 4 (див. (20))

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T_0(r,f')}{T_0(r,f)}\leqslant\lim_{r\to\infty}\frac{m_0(r,f')+O(\log r)}{T_0(r,f)}\leqslant 1.$$

Логарифмуючи відому нерівність

$$\frac{M(r)-C}{r}\leqslant M_1(r),\ \text{ де } M_1(r)=\max_{|z|=r}|f'(z)|,\ \ M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ \ C=const$$

та спрямовуючи $r\to+\infty$, одержуємо

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log M(r)}{\log M_1(r)}\leqslant\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log M_1(r)+\log r+O(1)}{\log M_1(r)}=1.$$

Звідси, зокрема

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ M(r,\infty,f)}{\log^+ M(r,\infty,f')}\leqslant 1,\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f)}{\log^+ M(\frac{1}{r},\infty,f')}\leqslant 1.$$

А тоді (46) дає $\beta_0(\infty,f)\leqslant\pi$. □

Список використаної літератури

1. *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I // Mat. Stud. — 2005. — **23**, №1. — P. 19–30.
2. *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II // Mat. Stud. — 2005. — **24**, №2. — P. 57–68.
3. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains — Joensuu – L'viv, 2006. — 111 p.
4. *Петренко В.П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1969. — **33**, №2. — P. 414–454.
5. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. — Москва: Наука, 1970. — 591с.
6. *Hayman W.K.* Meromorphic Functions. — Oxford: Clarendon Press, 1964. — 191p.
7. *Edrei A., Fuchs W.H.J.* On the growth of meromorphic functions with several deficient values // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — **93**, №2 — P. 292–328.

MINIMAL DEVIATION FROM 0 AND ∞ ESTIMATES FOR A MEROMORPHIC IN THE PUNCTURED PLANE FUNCTION WITH A SMALL NUMBER OF ZEROS AND POLES

Oleksandra BEREZA, Andriy KHRYSTIYANYN

Ivan Franko National University of Lviv,
79000, Lviv, 1 Universytetska Street
e-mail: berezalesya@gmail.com, khrystiyanyn@ukr.net

We consider meromorphic in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ functions with a small number of zeros and poles. Using analogs $\beta_0(a, f)$ of Petrenko's minimal deviations $\beta(a, f)$ we obtain estimates for $\beta_0(0, f)$, $\beta_0(\infty, f)$ for a meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function f of finite order $\rho \geqslant 1$.

Key words: meromorphic function, punctured plane, Nevanlinna characteristic, deficiency, minimal deviation.

Стаття: надійшла до редколегії 05.05.2016.
доопрацьована 20.01.2017.
прийнята до друку 20.02.2017.