ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 142–158
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 142–158

УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШИХ КОЕФIЦIЄНТIВ ПАРАБОЛIЧНОГО РIВНЯННЯ В ОБЛАСТI З ВIЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНIТКО

Iнститут прикладних проблем механiки i математики iм. Я.С. Пiдстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львiв, Україна
e-mail: snitkog@ukr.net

З'ясовано умови однозначної розв'язностi оберненої задачi визначення залежних вiд часу коефiцiєнтiв при перших похiдних невiдомої функцiї у двовимiрному параболiчному рiвняннi в областi, розташування частини межi якої визначається невiдомими залежними вiд часу функцiями.

Ключовi слова: обернена задача, вiльна межа, параболiчне рiвняння, функцiя Грiна.

Ми дослiджуємо задачу, яка поєднує два типи задач, а саме, коефiцiєнтну обернену задачу i задачу з вiльною межею. Кожен iз цих типiв вивчали ранiше, проте їхнє поєднання в однiй задачi недостатньо вивчене питання. У [1]–[4] дослiджено оберненi задачi визначення залежного вiд часу коефiцiєнта при молодшiй похiднiй невiдомої функцiї в одновимiрних параболiчних рiвняннях в областях з вiдомими межами. Замiною незалежних змiнних задачi з вiльними межами можна звести до коефiцiєнтних обернених задач в областях з фiксованими межами. Такий пiдхiд дає змогу об'єднати два типи задач — коефiцiєнтнi оберненi задачi та задачi з вiльними межами в один. У працях [5]–[8] знайдено умови однозначної розв'язностi обернених задач визначення залежних вiд часу старших коефiцiєнтiв в одно- та двовимiрних параболiчних рiвняннях в областях з вiльними межами. Дослiдження обернених задач для двовимiрних параболiчних рiвнянь з невiдомими залежними вiд часу молодшими коефiцiєнтами в областях з вiльними межами є актуальним.

1. Формулювання задачi. В областi $\Omega_T = \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < l(t), 0 < x_2 < h(t), 0 < t < T\}$, де $l = l(t),\ h = h(t)$ – невiдомi функцiї, розглядаємо обернену задачу визначення коефiцiєнтiв $b_1(t), b_2(t)$ параболiчного рiвняння

$$u_t = \Delta u + b_1(t)u_{x_1} + b_2(t)u_{x_2} + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

за умов

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [0, l(0)] \times [0, h(0)], \tag{2}$$

$$u(0,x_2,t)=\mu_1(x_2,t),\quad u(l(t),x_2,t)=\mu_2(x_2,t),\ (x_2,t)\in[0,h(t)]\times[0,T],$$
$$u(x_1,0,t)=\mu_3(x_1,t),\quad u(x_1,h(t),t)=\mu_4(x_1,t),\ (x_1,t)\in[0,l(t)]\times[0,T],\tag{3}$$

$$l'(t)=-\int\limits_0^{h(t)}u_{x_1}(l(t),x_2,t)dx_2+\mu_5(t),\quad h'(t)=-\int\limits_0^{l(t)}u_{x_2}(x_1,h(t),t)dx_1+\mu_6(t),$$

$$\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{h(t)}u(x_1,x_2,t)dx_2dx_1=\mu_7(t),\ \int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{h(t)}x_2u(x_1,x_2,t)dx_2dx_1=\mu_8(t),\ t\in[0,T].\tag{4}$$

Заміною змінних $y_1=\dfrac{x_1}{l(t)}$, $y_2=\dfrac{x_2}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(l(t),h(t),b_1(t),b_2(t),v(y_1,y_2,t))$, де $v(y_1,y_2,t)=u(y_1l(t),y_2h(t),t)$, в області $Q_T=\{(y_1,y_2,t):0<y_1<1,0<y_2<1,0<t<T\}$

$$v_t=\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}+\frac{b_1(t)+y_1l'(t)}{l(t)}v_{y_1}+\frac{b_2(t)+y_2h'(t)}{h(t)}v_{y_2}+$$
$$+f(y_1l(t),y_2h(t),t),\ (y_1,y_2,t)\in Q_T,\tag{5}$$

$$v(y_1,y_2,0)=\varphi(y_1l(0),y_2h(0)),\quad (y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1],\tag{6}$$

$$v(0,y_2,t)=\mu_1(y_2h(t),t),\quad v(1,y_2,t)=\mu_2(y_2h(t),t),\quad (y_2,t)\in[0,1]\times[0,T],$$
$$v(y_1,0,t)=\mu_3(y_1l(t),t),\quad v(y_1,1,t)=\mu_4(y_1l(t),t),\quad (y_1,t)\in[0,1]\times[0,T],\tag{7}$$

$$l'(t)=-\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 v_{y_1}(1,y_2,t)dy_2+\mu_5(t),\quad t\in[0,T],\tag{8}$$

$$h'(t)=-\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1 v_{y_2}(y_1,1,t)dy_1+\mu_6(t),\quad t\in[0,T],\tag{9}$$

$$h(t)l(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_7(t),\quad t\in[0,T],\tag{10}$$

$$h^2(t)l(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_8(t),\quad t\in[0,T].\tag{11}$$

2. Основні результати. Умови на вихідні дані, за яких існує єдиний розв'язок задачі (5)–(11), зазначені в таких теоремах.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T])$, $\varphi\in C^2([0,\infty)\times[0,\infty))$, $\mu_i\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i=1,2$, $\mu_j\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $j=3,4$, $\mu_k\in C[0,T]$, $k=5,6$, $\mu_n\in C^1[0,T]$, $n=7,8$;

2) $f(x_1,x_2,t) \geqslant 0$, $(x_1,x_2,t) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T]$, $0 < \varphi_0 \leqslant \varphi(x_1,x_2) \leqslant \varphi_1 < \infty$, $(x_1,x_2) \in [0,\infty)\times[0,\infty)$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2) > 0$, $\varphi_{x_2}(x_1,x_2) > 0$, $(x_1,x_2) \in [0,l(0)]\times[0,h(0)]$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2) - \varphi_{x_1}(x_1,h(0)-x_2) > 0$, $\varphi_{x_2}(x_1,h(0)-x_2) - \varphi_{x_2}(x_1,x_2) > 0, (x_1,x_2) \in [0,l(0)]\times\left[0,\frac{h(0)}{2}\right)$, $\mu_n(t) > 0$, $n = 7,8$, $t \in [0,T]$;

3) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна зазначити таке число $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок $(l,h,b_1,b_2,v) \in (C^1[0,T_0])^2 \times (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, задачі (5)–(11).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $f \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T])$, $\mu_i \in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $i = 1,2$, $\mu_j \in C^{3,1}([0,\infty)\times[0,T])$, $j = 3,4$;

2) $0 < \varphi_0 \leqslant \varphi(x_1,x_2) \leqslant \varphi_1 < \infty$, $(x_1,x_2) \in [0,\infty)\times[0,\infty)$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2) - \varphi_{x_1}(x_1,h(0)-x_2) > 0$, $\varphi_{x_2}(x_1,h(0)-x_2) - \varphi_{x_2}(x_1,x_2) > 0$, $(x_1,x_2) \in [0,l(0)]\times\left[0,\frac{h(0)}{2}\right)$, $\varphi_{x_1}(x_1,x_2) > 0$, $\varphi_{x_2}(x_1,x_2) > 0$, $(x_1,x_2) \in [0,l(0)]\times[0,h(0)]$, $\mu_n(t) > 0$, $n = 7,8$, $t \in [0,T]$.

Тоді можна зазначити таке число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, яке визначається вихідними даними, що задача (5)–(11) не може мати двох різних розв'язків $(l,h,b_1,b_2,v) \in (C^1[0,t_0])^2 \times (C[0,t_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_0})$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$.

3. Існування розв'язку задачі (5)–(11). Доведення існування розв'язку задачі (5)–(11) ґрунтується на зведенні задачі до системи рівнянь стосовно невідомих і застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку. Спочатку визначимо значення невідомих функцій $l(t), h(t)$ у початковий момент часу. З умов (2), (4) отримуємо

$$\int_0^{l_0}\int_0^{h_0} \varphi(x_1,x_2)dx_2dx_1 = \mu_7(0), \quad \int_0^{l_0}\int_0^{h_0} x_2\varphi(x_1,x_2)dx_2dx_1 = \mu_8(0), \tag{12}$$

$l_0 = l(0)$, $h_0 = h(0)$. Позначивши $\int_0^{l_0} \varphi(x_1,x_2)dx_1 = \psi(l_0,x_2)$, подамо (12) у вигляді

$$\int_0^{h_0} \psi(l_0,x_2)dx_2 = \mu_7(0), \quad \int_0^{h_0} x_2\psi(l_0,x_2)dx_2 = \mu_8(0).$$

Згідно з припущеннями теореми

$$l_0\varphi_0 \leqslant \psi(l_0,x_2) \leqslant l_0\varphi_1.$$

Тоді

$$l_0h_0\varphi_0 \leqslant \int_0^{h_0} \psi(l_0,x_2)dx_2 \leqslant l_0h_0\varphi_1.$$

Функція $y = \int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)dx_2$ за довільного фіксованого $l_0 > 0$ монотонно зростаюча стосовно h_0. Отож, існує єдине значення $h_0(l_0)$, яке є розв'язком рівняння

$$\int\limits_0^{h_0(l_0)} \psi(l_0, x_2)dx_2 = \mu_7(0).$$

Отже,

$$\frac{\mu_7(0)}{l_0\varphi_1} \leqslant h_0(l_0) \leqslant \frac{\mu_7(0)}{l_0\varphi_0}, \qquad \frac{\varphi_0\mu_7^2(0)}{2l_0\varphi_1^2} \leqslant \int\limits_0^{h_0(l_0)} x_2\psi(l_0, x_2)dx_2 \leqslant \frac{\varphi_1\mu_7^2(0)}{2l_0\varphi_0^2}.$$

Тоді $y = \int\limits_0^{h_0} x_2\psi(l_0, x_2)dx_2$ монотонно спадна функція змінної l_0, яка перетне пряму $y = \mu_8(0)$ тільки в одній точці. Отже, існує єдиний розв'язок l_0, h_0 системи рівнянь(12).

Зведемо задачу (5)–(7) до задачі з нульовими початковою та крайовими умовами. Введемо позначення

$$\mu_0(y_1, y_2, t) = \mu_1(y_2h(t), t) - \mu_1(0, t) + \mu_3(y_1l(t), t) + y_1(\mu_2(y_2h(t), t) - \mu_2(0, t)-$$
$$-\mu_1(y_2h(t), t) + \mu_1(0, t)) + y_2(\mu_4(y_1l(t), t) - \mu_3(y_1l(t), t) - \mu_1(h(t), t) + \mu_1(0, t))-$$
$$-y_1y_2(\mu_2(h(t), t) - \mu_2(0, t) - \mu_1(h(t), t) + \mu_1(0, t)),$$
$$v_0(y_1, y_2, t) = \varphi(y_1l_0, y_2h_0) + \mu_0(y_1, y_2, t) - \mu_0(y_1, y_2, 0),$$
$$\tilde{v}(y_1, y_2, t) = v(y_1, y_2, t) - v_0(y_1, y_2, t),$$
$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{l^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{1}{h^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Для функції $\tilde{v}(y_1, y_2, t)$ отримуємо задачу

$$L\tilde{v} = \frac{b_1(t) + y_1l'(t)}{l(t)}v_{y_1}(y_1, y_2, t) + \frac{b_2(t) + y_2h'(t)}{h(t)}v_{y_2}(y_1, y_2, t)-$$
$$-Lv_0(y_1, y_2, t) + f(y_1l(t), y_2h(t), t), \ (y_1, y_2, t) \in Q_T,$$
$$\tilde{v}(y_1, y_2, 0) = 0, \quad (y_1, y_2) \in [0, 1] \times [0, 1],$$
$$\tilde{v}(0, y_2, t) = \tilde{v}(1, y_2, t) = 0, \quad \tilde{v}(y_1, 0, t) = \tilde{v}(y_1, 1, t) = 0, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T. \qquad (13)$$

За допомогою функції Гріна $G = G(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$L\tilde{v} = 0$$

розв'язок задачі (13) подамо у вигляді

$$\tilde{v}(y_1, y_2, t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\Big(\frac{b_1(\tau) + \eta_1l'(\tau)}{l(\tau)}v_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau)+$$

$$+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 h'(\tau)}{h(\tau)} v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.$$

Позначивши $w_1(y_1,y_2,t) = v_{y_1}(y_1,y_2,t)$, $w_2(y_1,y_2,t) = v_{y_2}(y_1,y_2,t)$, $p(t) = l'(t)$, $q(t) = h'(t)$, повернемось до функції v

$$v(y_1,y_2,t)=v_0(y_1,y_2,t)+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Big(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \tag{14}$$

$$(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.$$

Продиференціювавши (14) за змінними y_1, y_2, одержуємо

$$w_1(y_1,y_2,t)=v_{0y_1}(y_1,y_2,t)+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Big(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \tag{15}$$

$$w_2(y_1,y_2,t)=v_{0y_2}(y_1,y_2,t)+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Big(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}\times$$

$$\times w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{16}$$

З умов (8)–(11) знаходимо

$$p(t)=-\frac{h(t)}{l(t)}\int_0^1 w_1(1,y_2,t)dy_2+\mu_5(t), \quad t\in[0,T], \tag{17}$$

$$q(t)=-\frac{l(t)}{h(t)}\int_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1+\mu_6(t), \quad t\in[0,T], \tag{18}$$

$$h(t)=\frac{\mu_8(t)\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}{\mu_7(t)\int_0^1\int_0^1 y^2 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}, \quad t\in[0,T], \tag{19}$$

$$l(t)=\frac{\mu_7^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2}{\mu_8(t)\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)^2},\quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

Продиференціювавши умови (10), (11) за змінною t і використавши (5), отримуємо

$$b_1(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\Bigg(\Bigg(l(t)h(t)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1-\mu_7(t)\Bigg)F_1(t)-$$

$$-l(t)F_2(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l(t),t)-\mu_3(y_1l(t),t))dy_1\Bigg),\quad t\in[0,T], \tag{21}$$

$$b_2(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\Bigg(F_2(t)h(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h(t),t)-\mu_1(y_2h(t),t))dy_2-$$

$$-h^2(t)F_1(t)\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h(t),t)-\mu_1(y_2h(t),t))dy_2\Bigg),\quad t\in[0,T], \tag{22}$$

де

$$F_1(t)=\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1(w_1(0,y_2,t)-w_1(1,y_2,t))dy_2+\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1(w_2(y_1,0,t)-w_2(y_1,1,t))dy_1+$$

$$-l(t)h(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)dy_1dy_2+h(t)\Bigg(\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 w_1(1,y_2,t)dy_2-\mu_5(t)\Bigg)\times$$

$$\times\int\limits_0^1\mu_2(y_2h(t),t)dy_2+l(t)\Bigg(\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1-\mu_6(t)\Bigg)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1+\mu_7'(t),$$

$$F_2(t)=\frac{h^2(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 y_2(w_1(0,y_2,t)-w_1(1,y_2,t))dy_2-l(t)\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1+$$

$$+l(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(w_2(y_1,y_2,t)-y_2h^2(t)f(y_1l(t),y_2h(t),t))dy_1dy_2+$$

$$+h^2(t)\Bigg(\frac{h(t)}{l(t)}\int\limits_0^1 w_1(1,y_2,t)dy_2-\mu_5(t)\Bigg)\int\limits_0^1 y_2\mu_2(y_2h(t),t)dy_2+$$

$$+l(t)h(t)\Bigg(\frac{l(t)}{h(t)}\int\limits_0^1 w_2(y_1,1,t)dy_1-\mu_6(t)\Bigg)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)dy_1+\mu_8'(t),$$

$$\Delta(t) = h(t)\int_0^1 (\mu_2(y_2h(t),t) - \mu_1(y_2h(t),t))dy_2\bigg(l(t)h(t)\int_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)dy_1-$$

$$-\mu_7(t)\bigg) - l(t)h^2(t)\int_0^1 y_2(\mu_2(y_2h(t),t) - \mu_1(y_2h(t),t))dy_2\times$$

$$\times\int_0^1 (\mu_4(y_1l(t),t) - \mu_3(y_1l(t),t))dy_1.$$

Отож, задачу (5)–(11) зведено до системи рівнянь (14)–(22) стосовно невідомих $(v(y_1,y_2,t), w_1(y_1,y_2,t), w_2(y_1,y_2,t), p(t), q(t), h(t), l(t), b_1(t), b_2(t))$. Якщо $(l,h,b_1,b_2,v) \in (C^1[0,T])^2 \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(11), то $(v,w_1,w_2,p,q,h,l,b_1,b_2) \in (C(\overline{Q}_T))^3 \times (C[0,T])^6$ — розв'язок системи рівнянь (14)–(22). Правильним є і обернене твердження.

Нехай $(v,w_1,w_2,p,q,h,l,b_1,b_2)$ — неперервний розв'язок системи рівнянь (14)–(22). Продиференціюємо (14) за змінними y_1, y_2. Праві частини отриманих рівностей і рівностей (15), (16) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w_i(y_1,y_2,t) = v_{y_i}(y_1,y_2,t)$, $i = 1,2$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1} + \frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2} + \frac{b_1(t)+y_1p(t)}{l(t)}v_{y_1} + \frac{b_2(t)+y_2q(t)}{h(t)}v_{y_2}+$$

$$+f(y_1l(t),y_2h(t),t), \quad (y_1,y_2,t)\in Q_T, \tag{23}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $l(t), h(t), p(t), q(t), b_1(t), b_2(t)$. З рівностей (19), (20) випливають умови (10), (11). Припущення теореми дають підстави продиференціювати (19), (20) за t. Використавши те, що функція $v(y_1,y_2,t)$ задовольняє рівняння (23), та віднявши від отриманих рівностей (21), (22), одержуємо

$$\mu_7(t)((p(t)-l'(t))h(t) + (q(t)-h'(t))l(t)) = 0,$$

$$\mu_8(t)((p(t)-l'(t))h(t) + 2(q(t)-h'(t))l(t)) = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t) = l'(t)$, $q(t) = h'(t)$, $l,h \in (C^1[0,T])^2$ і функція $v(y_1,y_2,t)$ задовольняє рівняння (5). З (17), (18) отримуємо умови (8), (9).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(11) та системи рівнянь (14)–(22) у зазначеному сенсі доведено.

Зведемо $\Delta(t)$ до вигляду

$$\Delta(t) = l(t)h^2(t)\bigg(\int_0^1\int_0^1 w_1(y_1,y_2,t)dy_2dy_1\int_0^1\int_0^1 y_2w_2(y_1,y_2,t)dy_2dy_1-$$

$$-\int_0^1\int_0^1 y_2w_1(y_1,y_2,t)dy_2dy_1\int_0^1\int_0^1 w_2(y_1,y_2,t)dy_2dy_1\bigg) =$$

$$= \frac{1}{2} l(t) h^2(t) \Big(\int_0^1 \int_0^1 (1-2y_2) w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 \int_0^1 \int_0^1 w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 \int_0^1 \int_0^1 (2y_2-1) w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 \Big).$$

В (15) всі доданки, крім $\varphi_{y_1}(y_1 l_0, y_2 h_0)$, при $t \to 0$ прямують до нуля. Тоді згідно з умовами теореми з (15) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, що

$$w_1(y_1,y_2,t) \geqslant \frac{l_0}{2} \min_{(y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1]} \varphi_{y_1}(y_1 l_0, y_2 h_0) \equiv M_1 > 0, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді

$$\int_0^1 \int_0^1 w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 > 0, \quad t \in [0,t_1].$$

Аналогічно з (16) можемо вважати, що існує таке число t_2, $0 < t_2 \leqslant T$, що

$$w_2(y_1,y_2,t) \geqslant \frac{h_0}{2} \min_{(y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1]} \varphi_{y_2}(y_1 l_0, y_2 h_0) \equiv M_2 > 0, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_2}.$$

Тоді

$$\int_0^1 \int_0^1 w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 > 0, \ t \in [0,t_2].$$

Подамо вирази $\int_0^1 \int_0^1 (1-2y_2) w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1$, $\int_0^1 \int_0^1 (2y_2-1) w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1$ у вигляді

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-2y_2) w_1(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y_2)(w_1(y_1,y_2,t) - w_1(y_1,1-y_2,t)) dy_2 dy_1, \qquad (24)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2y_2-1) w_2(y_1,y_2,t) dy_2 dy_1 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y_2)(w_2(y_1,1-y_2,t) - w_2(y_1,y_2,t)) dy_2 dy_1. \qquad (25)$$

Підставимо (15) в (24). Всі доданки, крім $\varphi_{y_1}(y_1 l_0, y_2 h_0) - \varphi_{y_1}(y_1 l_0, h_0(1-y_2))$, при $t \to 0$ прямують до нуля. Тоді можемо вважати, що існує таке число t_3, $0 < t_3 \leqslant T$, що

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-2y_2)w_1(y_1,y_2,t)dy_2dy_1 \geqslant \frac{l_0}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-2y_2)\times$$
$$\times(\varphi_{y_1}(y_1l_0,y_2h_0)-\varphi_{y_1}(y_1l_0,h_0(1-y_2)))dy_2dy_1>0,\ t\in[0,t_3].$$

Підставивши (16) в (25), можемо зробити висновок про існування такого числа t_4, $0<t_4\leqslant T$, що

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1(2y_2-1)w_2(y_1,y_2,t)dy_2dy_1 \geqslant \frac{h_0}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-2y_2)\times$$
$$\times(\varphi_{y_2}(y_1l_0,h_0(1-y_2))-\varphi_{y_2}(y_1l_0,h_0y_2))dy_2dy_1>0,\ t\in[0,t_4].$$

Визначимо оцінки функцій $l(t)$ і $h(t)$. Згідно з умовами теореми з (14) можемо вважати, що існує таке число t_5, $0<t_5\leqslant T$, що

$$v(y_1,y_2,t)\geqslant\frac{\varphi_0}{2}\equiv M_0>0,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_5}. \tag{26}$$

Виконання (26) рівносильне виконанню нерівності

$$\Bigg|\mu_0(y_1,y_2,t)-\mu_0(y_1,y_2,0)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\times$$
$$\times\Bigg(\frac{b_1(\tau)+\eta_1p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+\frac{b_2(\tau)+\eta_2q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+f(\eta_1l(\tau),\eta_2h(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1d\eta_2d\tau\Bigg|\leqslant M_0,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_5}. \tag{27}$$

Врахувавши (27), з (14) одержуємо

$$v(y_1,y_2,t)\leqslant\varphi_1+M_0\equiv M_3<\infty,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_5}. \tag{28}$$

Тоді для розв'язків рівнянь (19), (20) справджуються нерівності

$$0<H_0\leqslant h(t)\leqslant H_1<\infty,\quad 0<L_0\leqslant l(t)\leqslant L_1<\infty,\quad t\in[0,t_5]. \tag{29}$$

Отже,

$$\Delta(t)\geqslant C_0>0,\quad t\in[0,t_0],\ t_0=\min\{t_i\},\ i=\overline{1,5}. \tag{30}$$

Визначимо оцінки розв'язків системи рівнянь (14)–(22). Позначимо $W_i(t)=\max\limits_{(y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1]}|w_i(y_1,y_2,t)|$, $i=1,2$. З (17), (18), (21), (22), врахувавши (28)–(30), одержуємо

$$|p(t)|\leqslant C_1+C_2W_1(t),\ |q(t)|\leqslant C_3+C_4W_2(t),\ |b_1(t)|\leqslant C_5+C_6W_1(t)+C_7W_2(t),$$
$$|b_2(t)|\leqslant C_8+C_9W_1(t)+C_{10}W_2(t),\quad t\in[0,t_0]. \tag{31}$$

Використавши (29), (31) та оцінки функції Гріна [9], з (15), (16) отримуємо

$$W_1(t)\leqslant C_{11}+C_{12}\int\limits_0^t(1+W_1(\tau)+W_2(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)+W_1^2(\tau)+W_2^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$W_2(t) \leqslant C_{13} + C_{14}\int\limits_0^t (1 + W_1(\tau) + W_2(\tau) + W_1(\tau)W_2(\tau) +$$

$$+ W_1^2(\tau) + W_2^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad t \in [0, t_0].$$

Звідси для функції $R(t) = W_1(t) + W_2(t)$ одержуємо нерівність

$$R(t) \leqslant C_{15} + C_{16}\int\limits_0^t \frac{R(\tau) + R^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \quad t \in [0, t_0].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [10]. Звідси отримуємо оцінку

$$R(t) \leqslant M_4 < \infty, \quad t \in [0, t_6],$$

де M_4 і $t_6, 0 < t_6 \leqslant t_0$, визначаються відомими величинами. Тоді

$$|w_1(y_1, y_2, t)| \leqslant M_4, \quad |w_2(y_1, y_2, t)| \leqslant M_4, \quad |p(t)| \leqslant B_1 < \infty,$$

$$|q(t)| \leqslant B_2 < \infty, \quad |b_1(t)| \leqslant B_3 < \infty, \quad |b_2(t)| \leqslant B_4 < \infty, \quad t \in [0, t_6].$$

Визначимо оператор P і побудуємо множину N так, щоб оператор P переводив N в себе. Візьмемо довільні $(v, w_1, w_2, p, q, h, l, b_1, b_2)$, для яких правильні визначені оцінки. Оцінимо праві частини рівнянь (15), (16):

$$\Bigg| v_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\Bigg(\frac{b_1(\tau) + \eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) +$$

$$+ \frac{b_2(\tau) + \eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau)\Bigg) d\eta_1 d\eta_2 d\tau\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} + C_{17}\sqrt{t}, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_6},$$

$$\Bigg| v_{0y_2}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\Bigg(\frac{b_1(\tau) + \eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) +$$

$$+ \frac{b_2(\tau) + \eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau)\Bigg) d\eta_1 d\eta_2 d\tau\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C_{13} + C_{18}\sqrt{t}, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_6}.$$

Вибираючи число t_7, $0 < t_7 \leqslant t_6$, так, щоб виконувалась нерівність $C_{11} + C_{17}\sqrt{t_6} \leqslant M_4$, отримаємо

$$\Bigg| v_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)\Bigg(\frac{b_1(\tau) + \eta_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\eta_1, \eta_2, \tau) +$$

$$+ \frac{b_2(\tau) + \eta_2 q(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1 l(\tau), \eta_2 h(\tau), \tau)\Bigg) d\eta_1 d\eta_2 d\tau\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant M_4, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_7}.$$

Аналогічно можемо вважати, що існує таке число t_8, $0 < t_8 \leqslant t_6$, що $C_{13} + C_{18}\sqrt{t_8} \leqslant M_4$. Тоді

$$\Bigg|v_{0y_2}(y_1,y_2,t) + \int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\bigg(\frac{b_1(\tau)+\eta_1 p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+\frac{b_2(\tau)+\eta_2 q(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau) - Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau) + f(\eta_1 l(\tau),\eta_2 h(\tau),\tau)\bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant M_4, \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{t_8}.$$

Подамо систему рівнянь (14)–(22) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y_1,y_2,t), w_1(y_1,y_2,t), w_2(y_1,y_2,t), p(t), q(t), h(t), l(t), b_1(t), b_2(t))$, а оператор $P = (P_1,\ldots,P_9)$ визначається правими частинами рівнянь (14)–(22). Позначимо $N = \{(v,w_1,w_2,p,q,h,l,b_1,b_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 \times (C[0,T_0])^6 : \ M_0 \leqslant v(y_1,y_2,t) \leqslant M_3,$ $M_1 \leqslant w_1(y_1,y_2,t) \leqslant M_4,\ M_2 \leqslant w_2(y_1,y_2,t) \leqslant M_4,\ H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1,\ L_0 \leqslant l(t) \leqslant L_1,$ $|p(t)| \leqslant B_1,\ |q(t)| \leqslant B_2,\ |b_1(t)| \leqslant B_3,\ |b_2(t)| \leqslant B_4\}$, $T_0 = \min\{t_7,t_8\}$. Множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як у [10].

Отож, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (14)–(22), а отже, і розв'язок задачі (5)–(11) при $(y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_{T_0}$.

4. Єдиність розв'язку задачі (5)–(11). Припустимо, що $(l_i(t), h_i(t), b_{1i}(t),$ $b_{2i}(t), v_i(y_1,y_2,t))$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(11). Позначимо

$$\frac{l_i'(t)}{l_i(t)} = p_i(t), \quad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \quad \frac{b_{1i}(t)}{l_i(t)} = s_i(t), \quad \frac{b_{2i}(t)}{h_i(t)} = r_i(t), \quad i=1,2,$$
$$p(t) = p_1(t)-p_2(t), \quad q(t) = q_1(t)-q_2(t), \quad s(t) = s_1(t)-s_2(t), \quad r(t) = r_1(t)-r_2(t),$$
$$v(y_1,y_2,t) = v_1(y_1,y_2,t) - v_2(y_1,y_2,t).$$

Функції $p(t), q(t), s(t), r(t), v(y_1,y_2,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{1}{l_1^2(t)}v_{y_1y_1} + \frac{1}{h_1^2(t)}v_{y_2y_2} + (s_1(t)+y_1p_1(t))v_{y_1} + (r_1(t)+y_2q_1(t))v_{y_2}+$$
$$+\left(\frac{1}{l_1^2(t)} - \frac{1}{l_2^2(t)}\right)v_{2y_1y_1} + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right)v_{2y_2y_2} + (s(t)+y_1p(t))v_{2y_1}+$$
$$+(r(t)+y_2q(t))v_{2y_2} + f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t) - f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t),\ (y_1,y_2,t) \in Q_T, \quad (32)$$

та умови

$$v(y_1,y_2,0) = 0, \quad (y_1,y_2) \in [0,1]\times[0,1], \tag{33}$$

$$v(0,y_2,t) = \mu_1(y_2h_1(t),t) - \mu_1(y_2h_2(t),t), \quad v(1,y_2,t) = \mu_2(y_2h_1(t),t) - \mu_2(y_2h_2(t),t),$$
$$v(y_1,0,t) = \mu_3(y_1l_1(t),t) - \mu_3(y_1l_2(t),t),$$
$$v(y_1,1,t) = \mu_4(y_1l_1(t),t) - \mu_4(y_1l_2(t),t), \quad (y_1,y_2,t) \in \overline{Q}_T, \tag{34}$$

$$p(t) = -\frac{h_1(t)}{l_1^2(t)}\int_0^1 v_{y_1}(1,y_2,t)dy_2 + \mu_5(t)\left(\frac{1}{l_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)}\right)-$$

$$-\left(\frac{h_1(t)}{l_1^2(t)}-\frac{h_2(t)}{l_2^2(t)}\right)\int\limits_0^1 v_{2y_1}(1,y_2,t)dy_2, \quad t\in[0,T], \tag{35}$$

$$q(t)=-\frac{l_1(t)}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1 v_{y_2}(y_1,1,t)dy_1+\mu_6(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)-$$

$$-\left(\frac{l_1(t)}{h_1^2(t)}-\frac{l_2(t)}{h_2^2(t)}\right)\int\limits_0^1 v_{2y_2}(y_1,1,t)dy_1, \quad t\in[0,T], \tag{36}$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_7(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\right), \quad t\in[0,T], \tag{37}$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2v(y_1,y_2,t)dy_1dy_2=\mu_8(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}\right), \quad t\in[0,T]. \tag{38}$$

Зведемо задачу (32)–(34) до задачі з нульовими крайовими умовами. Введемо позначення

$$\psi(y_1,y_2,t)=(1-y_1)(\mu_1(y_2h_1(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))+y_1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t))+$$
$$+(1-y_2)(\mu_3(y_1l_1(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))+y_2(\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t))-$$
$$-y_1y_2(\mu_2(h_1(t),t)-\mu_2(h_2(t),t)),$$
$$\tilde v(y_1,y_2,t)=v(y_1,y_2,t)-\psi(y_1,y_2,t),$$
$$L_1=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{l_1^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{1}{h_1^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-(s_1(t)+y_1p_1(t))\frac{\partial}{\partial y_1}-(r_1(t)+y_2q_1(t))\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Для функції $\tilde v(y_1,y_2,t)$ отримуємо задачу

$$L_1\tilde v=-L_1\psi(y_1,y_2,t)+\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)v_{2y_1y_1}+\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)v_{2y_2y_2}+$$
$$+(s(t)+y_1p(t))v_{2y_1}+(r(t)+y_2q(t))v_{2y_2}+f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-$$
$$-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t), \quad (y_1,y_2,t)\in Q_T,$$
$$\tilde v(y_1,y_2,0)=0, \quad (y_1,y_2)\in[0,1]\times[0,1],$$
$$\tilde v(0,y_2,t)=\tilde v(1,y_2,t)=0, \quad \tilde v(y_1,0,t)=\tilde v(y_1,1,t)=0, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{39}$$

Зобразивши розв'язок задачі (39) за допомогою функції Гріна $\tilde G=\tilde G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$L_1\tilde v=0,$$

повернемось до функції $v(y_1,y_2,t)$

$$v(y_1,y_2,t)=\psi(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1\tilde G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)}-\frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+(s(\tau)+\eta_1p(\tau))v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$

$$+(r(\tau)+\eta_2 q(\tau))v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)-L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1 l_1(\tau),\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$
$$-f(\eta_1 l_2(\tau),\eta_2 h_2(\tau),\tau)\Big)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (40)$$

Оскільки для $b_i(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (21), (22), то звідси отримуємо

$$s(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+r(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1+$$
$$+p(t)\int\limits_0^1\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2+q(t)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1=F_3(t),\quad t\in[0,T], \qquad (41)$$
$$r(t)\bigg(\int\limits_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int\limits_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1+$$
$$+\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int\limits_0^1\mu_3(y_1l_2(t),t)dy_1-\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_2(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\bigg)+p(t)\bigg(\int\limits_0^1 y_2\mu_1(y_2h_2(t),t)dy_2\times$$
$$\times\int\limits_0^1\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2-\int\limits_0^1 y_2\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2\int\limits_0^1\mu_1(y_2h_2(t),t)dy_2\bigg)+$$
$$+q(t)\int\limits_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\int\limits_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1=$$
$$=F_3(t)\int\limits_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\bigg(s_1(t)\int\limits_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t)-$$
$$-\mu_1(y_2h_1(t),t)+\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2+r_1(t)\int\limits_0^1(\mu_3(y_1l_1(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1+$$
$$+p_1(t)\int\limits_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t))dy_2-\mu_7'(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\right)+$$
$$+\frac{1}{l_1^2(t)}\int\limits_0^1(1-y_2)(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))dy_2-\frac{1}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1 v_{y_2}(y_1,0,t)dy_1+\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)\times$$

$$\times(f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))dy_1dy_2+\frac{1}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_{y_2}(y_1,y_2,t)dy_1dy_2+$$

$$+\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\left(\frac{\mu_8'(t)}{l_1(t)}-\int\limits_0^1 v_{2y_2}(y_1,0,t)dy_1+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_{2y_2}(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)+\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)\left(\frac{\mu_8'(t)}{h_2^2(t)}+\int\limits_0^1(1-y_2)(v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t))dy_2\right)\Bigg),\quad t\in[0,T],\tag{42}$$

$$F_3(t)=-s_1(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_1(t),t)+\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2-$$

$$-r_1(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_1(t),t)+\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1-$$

$$-p_1(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_1(t),t)-\mu_2(y_2h_2(t),t))dy_2-q_1(t)\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t))dy_1+$$

$$+\mu_7'(t)\left(\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}-\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}\right)-\frac{1}{l_1^2(t)}\int\limits_0^1(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))dy_2-$$

$$-\frac{1}{h_1^2(t)}\int\limits_0^1(v_{y_2}(y_1,1,t)-v_{y_2}(y_1,0,t))dy_1-\left(\frac{1}{l_1^2(t)}-\frac{1}{l_2^2(t)}\right)\int\limits_0^1(v_{2y_1}(1,y_2,t)-$$

$$-v_{2y_1}(0,y_2,t))dy_2-\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)\int\limits_0^1(v_{2y_2}(y_1,1,t)-v_{2y_2}(y_1,0,t))dy_1-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1(f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t)-f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t))dy_1dy_2.$$

Зауважимо, що для

$$\Delta(t)=l_2(t)h_2^2(t)\int\limits_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\left(\int\limits_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 v_2(y_1,y_2,t)dy_1dy_2\right)-\int\limits_0^1 y_2(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_1(y_2h_2(t),t))dy_2\times$$

$$\times\int\limits_0^1(\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_2(t),t))dy_1$$

виконується нерівність (30).

Продиференціювавши (40) за змінними y_1, y_2, одержуємо

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t) = \psi_{y_1}(y_1,y_2,t) + \int_0^t\int_0^1\int_0^1 \tilde{G}_{y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Bigg(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)} - \frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)\times$$
$$\times v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau) + \left(\frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau) + (s(\tau)+\eta_1 p(\tau))v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+(r(\tau)+\eta_2 q(\tau))v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau) - L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau) + f(\eta_1 l_1(\tau),\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$
$$-f(\eta_1 l_2(\tau),\eta_2 h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \tag{43}$$

$$v_{y_2}(y_1,y_2,t) = \psi_{y_2}(y_1,y_2,t) + \int_0^t\int_0^1\int_0^1 \tilde{G}_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\Bigg(\left(\frac{1}{l_1^2(\tau)} - \frac{1}{l_2^2(\tau)}\right)\times$$
$$\times v_{2\eta_1\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau) + \left(\frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau) + (s(\tau)+\eta_1 p(\tau))v_{2\eta_1}(\eta_1,\eta_2,\tau)+$$
$$+(r(\tau)+\eta_2 q(\tau))v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau) - L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau) + f(\eta_1 l_1(\tau),\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$
$$-f(\eta_1 l_2(\tau),\eta_2 h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{44}$$

Виразимо $l_i(t), h_i(t)$ через $p_i(t)$, $q_i(t)$

$$l_i(t) = l_i(0)\exp\left(\int_0^t p_i(\tau)d\tau\right), \quad h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t q_i(\tau)d\tau\right),\ i=1,2,$$

де $l_1(0) = l_2(0) = l_0,\ h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Звідси, використавши рівності

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

$$f(yh_1(t)) - f(yh_2(t)) = y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 f_y(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,$$

отримуємо

$$\frac{1}{l_1(t)} - \frac{1}{l_2(t)} = -\frac{1}{l_0}\int_0^t p(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t(\sigma p(\tau)+p_2(\tau))d\tau\right)d\sigma,$$

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t q(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t(\sigma q(\tau)+q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma,$$

$$\mu_i(y_2h_1(t),t) - \mu_i(y_2h_2(t),t) =$$
$$= y_2(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 \mu_{ix_2}(y_2(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma,\ i=1,2,$$

$$\mu_j(y_1l_1(t),t) - \mu_j(y_1l_2(t),t) =$$

$$= y_1(l_1(t) - l_2(t)) \int_0^1 \mu_{jx_1}(y_1(l_2(t) + \sigma(l_1(t) - l_2(t))), t)d\sigma, \ j = 3, 4. \tag{45}$$

Рівності (45) можемо використати для зображення різниць $l_1(t) - l_2(t)$, $\dfrac{1}{l_1^2(t)} - \dfrac{1}{l_2^2(t)}$, $h_1(t) - h_2(t)$, $\dfrac{1}{h_1^2(t)} - \dfrac{1}{h_2^2(t)}$, $\mu_{ix_1}(y_2h_1(t), t) - \mu_{ix_1}(y_2h_2(t), t)$, $\mu_{ix_1x_1}(y_2h_1(t), t) - \mu_{ix_1x_1}(y_2h_2(t), t)$, $\mu_{it}(y_2h_1(t), t) - \mu_{it}(y_2h_2(t), t)$, $i = 1, 2$, $\mu_{jx_2}(y_1l_1(t), t) - \mu_{jx_2}(y_1l_2(t), t)$, $\mu_{jx_2x_2}(y_1l_1(t), t) - \mu_{jx_2x_2}(y_1l_2(t), t)$, $\mu_{jt}(y_1l_1(t), t) - \mu_{jt}(y_1l_2(t), t)$, $j = 3, 4$, $f(y_1l_1(t), y_2h_1(t), t) - f(y_1l_2(t), y_2h_2(t), t)$.

Підставивши (43), (44) в (35), (36), (41), (42) і використавши (45), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (35), (36), (41), (42) стосовно невідомих $(p(t), q(t), s(t), r(t))$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З властивостей розв'язків таких систем випливає, що система має тільки тривіальний розв'язок.

Отже, $l_1(t) = l_2(t)$, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_{11}(t) = b_{12}(t)$, $b_{21}(t) = b_{22}(t)$, $v_1(y_1, y_2, t) = v_2(y_1, y_2, t)$, $(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_0}$.

Список використаної літератури

1. *Hong-Ming Yin.* Global solvability for some parabolic inverse problems // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — P. 392–403.
2. *Trong D.D., Ang D.D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. — 1994. — **10**, №3. — P. 733–752.
3. *Cannon J., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. — 1994. — **10**, №3. — P. 521–531.
4. *Пабирівська Н.В.* Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 56. — С. 142–149.
5. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, №7. — С. 901–910.
6. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 20–38.
7. *Баранська І.Є.* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — **50**, № 2. — С. 17–28.
8. *Баранська І.Є., Іванчов М.І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. вісн. — 2007. — **4**, № 4. — С. 457–484.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // Москва: Наука, 1967. — 736 с.
10. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. — 238 p. — (Math. Studies: Monograph Ser. — Vol. 10.)

Стаття: надійшла до редколегії 04.12.2015
прийнята до друку 08.06.2016

DETERMINATION OF THE MINOR COEFFICIENTS IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
Dudaev Str., 15, 79005, Lviv, Ukraine
e-mail: snitkog@ukr.net

We find unique solvability conditions of the inverse problem of finding the time-dependent coefficients of the first derivatives of unknown function in two-dimensional parabolic equation in a domain for which the location of boundary part is described by the unknown time-dependent functions.

Key words: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.