ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 117–120
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 117–120

УДК 517.5

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ЗБІЖНОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА-СТІЛЬТЬЄСА

Маркіян ДОБУШОВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: mdobush19@gmail.com

Для абсциси збіжності інтегралу Лапласа-Стільтьєса отримано нову формулу. Збіжність інтегралів Лапласа-Стільтьєса зводиться до збіжності рядів Діріхле.

Ключові слова: інтеграл Лапласа-Стільтьєса, ряд Діріхле.

1. Вступ. Нехай V — клас невід'ємних неспадних неперевних справа необмежених на $[0, +\infty)$ функцій F, а f — невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція. Інтеграл

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma} dF(x), \ \sigma \in \mathbb{R} \tag{1}$$

називається [1, с.7] інтегралом Лапласа-Стільтьєса. Зрозуміло, що інтеграл (1) або збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує число $\sigma_3[I]$ таке, що цей інтеграл збіжний для $\sigma < \sigma_3[I]$ і розбіжний для $\sigma > \sigma_3[I]$. В останньому випадку число $\sigma_3[I]$ називається абсцисою збіжності. Якщо інтеграл (1) розбіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважаємо $\sigma = -\infty$, а якщо збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то вважаємо $\sigma = +\infty$.

2. Основна частина.

Твердження 1 ([1], с.11). *Якщо $F \in V$ і $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \dfrac{\ln F(x)}{x} = \tau$, то*

$$\sigma_3 \geqslant \alpha - \tau, \ \ \alpha =: \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}, \tag{2}$$

крім випадку, коли $\tau = \alpha = +\infty$. Звідси випливає таке: якщо $F \in V$ і $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то $\sigma_3[I] \geqslant \alpha$.

В [1, с.16] доведено, що для кожних $-\infty \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant +\infty$ існує додатна і неперервна на $[0, +\infty)$ функція f така, що для інтеграла $I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx$ правильні рівності $\sigma_3[I] = \beta > \gamma = \alpha$. Щоб отримати рівність $\sigma_3[I] = \alpha$, як в [1, с.21], будемо говорити, що невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція f регулярно змінюється стосовно $F \in V$, якщо існують числа $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ і $\delta \geqslant 0$ такі, що для всіх $x \geqslant a$

$$\int_{x-a}^{x+b} dF(x) \geqslant \delta f(x). \tag{3}$$

Твердження 2 ([1], с.11)**.** *Нехай $F \in V$ і f регулярно змінюється стосовно F, то $\sigma_3[I] \leqslant \alpha$.*

Об'єднуючи твердження 1 і 2, приходимо до такого результату.

Твердження 3. *Якщо $F \in V$ і f регулярно змінюється стосовно F. Тоді, якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то $\sigma_3[I] = \alpha$.*

Тут буде наведений інший підхід до дослідження збіжності інтегралів Лапласа-Стільтьєса, який ґрунтується на зведенні інтеграла до ряду Діріхле.

Отже, нехай (λ_n) — довільна зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел така, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant h < +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тоді

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) e^{x\sigma} dF(x). \tag{4}$$

Якщо $\sigma \geqslant 0$, то

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) e^{x\sigma} dF(x) \leqslant \\ \leqslant e^{\lambda_{n+1}\sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \leqslant e^{h\sigma} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x), \end{aligned} \tag{5}$$

а якщо $\sigma \leqslant 0$, то

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \geqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) e^{x\sigma} dF(x) \geqslant \\ \geqslant e^{\lambda_{n+1}\sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x) \geqslant e^{h\sigma} e^{\lambda_n \sigma} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x), \end{aligned} \tag{6}$$

Приймемо

$$a_n = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x) dF(x),\, n \geqslant 0 \tag{7}$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma}. \tag{8}$$

Тоді з (4)–(6) випливає, що $F(\sigma) \leqslant I(\sigma) \leqslant e^{h\sigma} F(\sigma)$, якщо $\sigma \geqslant 0$, і $e^{h\sigma} F(\sigma) \leqslant I(\sigma) \leqslant F(\sigma)$, якщо $\sigma \leqslant 0$. Тому абсциса збіжності інтеграла (1) збігається з абсцисою збіжності ряду Діріхле (8). Оскільки $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то [2,с.15] для абсциси збіжності $\sigma_3[F]$ ряду Діріхле правильна рівність

$$\sigma_3[F] = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n}.$$

Отже, правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай $F \in V$, f — невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, а (λ_n) — довільна зростаюча до $+\infty$ послідовність така, що $\lambda_{n+1}-\lambda_n < h < +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n\to\infty$.*
Тоді

$$\sigma_3[I] = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x)}. \tag{9}$$

Зауважимо, що з доведеної теореми випливають твердження 2 і 3.

Справді, припустимо, $\alpha > -\infty$. Тоді для будь-якого $\alpha^* < \alpha$ і всіх $x \geqslant x_0(\alpha^*)$ з (2) випливає нерівність $f(x) \leqslant e^{-\alpha^* x}$. Тому для всіх досить великих n

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\alpha^* x}dF(x) \leqslant F(\lambda_{n+1})e^{-\alpha^*\lambda_{n+1}} + \alpha^* \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} F(x)e^{-\alpha^* x}dx$$

і якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x\to\infty$, то

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x) \leqslant \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_{n+1}\} + \alpha^* \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \exp\{-\alpha^*(1+o(1))x\}dx \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_n\} + \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_n\} = \exp\{-\alpha^*(1+o(1))\lambda_n\}\ n\to\infty.$$

Тому з (9) випливає, що

$$\sigma_3[I] \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln e^{\alpha^*(1+o(1))\lambda_n} = \alpha^*,$$

тобто з огляду на довільність α^* правильна нерівність $\sigma_3[I] \geqslant \alpha$, яка є очевидною, коли $\alpha = -\infty$. Отже, з теореми випливає твердження 2.

Припустимо тепер, що $\alpha < +\infty$. Тоді для кожного $\alpha^* > \alpha$ існує послідовність $(x_k) \uparrow +\infty$ така, що $f(x_h) \geqslant \exp\{-\alpha^* x_h\}$. Тому, якщо f регулярно змінюється стосовно F, то з (3) матимемо

$$\int_{x_h-a}^{x_h+b} f(t)dF(t) \geqslant \delta f(x_h) \geqslant \delta \exp\{-\alpha^* x_h\}.$$

Можемо вважати, що $x_{h+1}-a > x_h+b$ і виберемо послідовність λ_{n_h} так, щоб $\lambda_{n_h} = x_h - a$ і $\lambda_{n_h+1} = x_h+b$. Тоді $\lambda_{n_h+1}-\lambda_{n_h} = b+a < \infty$. Решту членів послідовності можемо вибрати довільно, щоб $\lambda_{n+1}-\lambda_n \leqslant h (h > b+a)$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n\to\infty$.

Тоді з (9) випливає, що

$$\sigma_3[I] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n_h}} \ln \frac{1}{\int_{\lambda_{n_h}}^{\lambda_{n_h+1}} f(t)dt} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{x_h - a} \ln \frac{1}{\delta \exp\{-\alpha^* x_h\}} = \alpha^*,$$

тобто з огляду на довільність α^* отримаємо нерівність $\sigma_3[I] \leqslant \alpha$, яка є очевидною, якщо $\alpha = +\infty$. Отож, з теореми випливає твердження 3.

Зауважимо також, що з теореми 1 випливає такий результат.

Наслідок 1. *Нехай $F \in V$ і f — невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція така, що $\ln f(x) = o(x)$ при $x\to+\infty$, а (λ_n) — така зростаюча послідовність додатних чисел , що $\lambda_{n+1}-\lambda_n \leqslant h < +\infty$ для всіх n і $\ln f(x) = o(x)$ при $x\to+\infty$. Тоді*

$$\sigma_3[I] = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{F(\lambda_n+1) - F(\lambda_n)}. \tag{10}$$

Справді, для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ маємо $-\varepsilon x \leqslant \ln f(x) \leqslant x\varepsilon$. Тому для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$e^{-\varepsilon\lambda_{n+1}}(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n)) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x) \leqslant e^{\varepsilon\lambda_{n+1}}(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n)),$$

тобто

$$\ln\frac{e^{-\varepsilon\lambda_{n+1}}}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))} \leqslant \frac{1}{\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(x)dF(x)} \leqslant \ln\frac{e^{\varepsilon\lambda_{n+1}}}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))}.$$

Звідки з огляду на (9) випливає, що

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))}-\varepsilon \leqslant \sigma_3[I] \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{(F(\lambda_n+1)-F(\lambda_n))}+\varepsilon,$$

і завдяки довільності ε правильна рівність (10).

Література

1. *Sheremeta M.M.* Asymptotical behavior of Laplace-Stieltjes integrals-Lviv:VNTL Publishers, 2010. — 210 p.
2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. — М.:Наука, 1976. — 536 с.

Стаття: надійшла до редколегії 10.03.2016.
прийнята до друку 08.06.2016.

A REMARK TO THE CONVERGENCE OF LAPLACE-STIELTJES INTEGRALS

Markiyan DOBUSHOVSKYY

Ivan Franko National University of Lviv,
79000, Lviv, Universytetska Str., 1
e-mail: mdobush19@gmail.com

For the abscissa of the convergence of Laplace-Stieltjes integral a new formula is obtained. The convergence of the Laplace-Stieltjes integrals reduces to the convergence of Dirichlet series.

Key words: Laplace-Stieltjes integral, Dirichlet series