ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 85–94
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 85–94

УДК 517.547

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ІНДИКАТОРІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В ПРОКОЛЕНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ. II

Олег ВИШИНСЬКИЙ, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Використовуючи результати з першої частини, доведено теореми про асимптотичну поведінку голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині при $r \to +\infty$ та $r \to 0$ поза деякими E_0-множинами.

Ключові слова: функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, функція скінченного λ-типу, верхня відносна міра, коефіцієнти Фур'є, голоморфна функція.

1. Основні результати. Ця стаття є безпосереднім продовженням [1]. Ми використовуватимемо тут означення та позначення введені у першій частині. Зокрема, нагадаємо означення верхньої відносної міри множини $E \subset (0, +\infty)$ ([1])

$$\overline{m}_0^*(E) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{mes(E \cap (1, r))}{r} + \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{mes(E' \cap (1, r))}{r}, \text{ де } E' = \{\frac{1}{r} : r \in E \cap (0, 1)\}.$$

Множину E з нульовою верхньою відносною мірою називатимемо E_0-множиною. В цій частині ми доводимо теореми про асимптотичну поведінку голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ([2]) при $r \to +\infty$ та $r \to 0$ поза деякими E_0-множинами. Основними результатами є такі теореми.

Теорема 5. *Нехай $f \in \Lambda_H^0$. Тоді існують E_0-множини $E_0^{(1)}$, $E_0^{(2)}$ такі, що виконується*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(1)}}} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = h_1(\varphi, f), \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(2)}}} \frac{\log |f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = h_2(\varphi, f). \tag{2}$$

рівномірно для $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Теорема 6. *Нехай $f \in \Lambda_H$, функція $\lambda(r)$ опукла стосовно $\log r$ та існують E_0-множини $E_0^{(1)}$, $E_0^{(2)}$, а також дійсні функції $H_1(\varphi)$, $H_2(\varphi)$ на $[0, 2\pi]$ такі, що*

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_0^{(1)}}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = H_1(\varphi), \quad \lim_{\substack{r\to\infty\\ r\notin E_0^{(2)}}} \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} = H_2(\varphi), \tag{3}$$

рівномірно для $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тоді $f \in \Lambda_H^0$ і

$$h_1(\varphi, f) = H_1(\varphi), \quad h_2(\varphi, f) = H_2(\varphi) \tag{4}$$

для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2. Допоміжні поняття та результати. Нехай f голоморфна функція в проколеній площині $\mathbb{C}^*$, відмінна від тотожного нуля. Ми вживатимемо дещо модифіковані позначення з [3], [4] та [5]. А саме, через $n_0^{(1)}(t, f)$, $n_0^{(2)}(t, f)$ та $n_0(\mathbb{T}, f)$ позначимо кількість нулів a_j функції f з урахуванням їхньої кратності відповідно в $\{z : 1 < |z| \leqslant t\}$, $\{z : \frac{1}{t} \leqslant |z| < 1\}$, $t > 1$, та на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$. Також нехай

$$N_0^{(i)}(r, f) = \int_1^r \frac{n_0^{(i)}(t, f)}{t} dt, \quad i = 1, 2.$$

Для довільного цілого $k \neq 0$ приймемо $n_k^{(1)}(t, f) = \sum\limits_{1<|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j}$, $n_k^{(2)}(t, f) = \sum\limits_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|<1} e^{-ik\gamma_j}$, $n_k(\mathbb{T}, f) = \sum\limits_{|a_j|=1} e^{-ik\gamma_j}$, де $\gamma_j = \arg a_j$, а також

$$N_k^{(i)}(r, f) = \int_1^r \frac{n_k^{(i)}(t, f)}{t} dt, \quad i = 1, 2.$$

Зауваження 3. Використовуючи властивість інтеграла Стільтьєса ([6], с. 217-218) можемо записати

$$\int_1^r \frac{dn_k^{(1)}(t, f)}{t^k} = \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \frac{e^{-ik\gamma_j}}{|a_j|^k}, \qquad \int_1^r \frac{dn_k^{(2)}(t, f)}{t^k} = \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} e^{-ik\gamma_j}|a_j|^k,$$

$$\int_1^r t^k dn_k^{(1)}(t, f) = \sum_{1<|a_j|\leqslant r} e^{-ik\gamma_j}|a_j|^k, \qquad \int_1^r t^k dn_k^{(2)}(t, f) = \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|<1} \frac{e^{-ik\gamma_j}}{|a_j|^k}.$$

Нагадаємо, що під функцією зростання ми розуміємо додатну, неспадну, неперервну, необмежену функцію λ. Ми розглядаємо так звані функції помірного зростання, тобто такі функції зростання для яких $(\exists M > 0)$ $(\forall r > 1) : \lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$.

Означення 5. *Клас функцій Λ_H° будемо називати тривіальним, якщо для всіх функцій з цього класу індикатори $h_1 \equiv 0$, $h_2 \equiv 0$. В іншому випадку будемо казати, що клас Λ_H° є нетривіальним.*

Функції зростання $\lambda(r)$ та $\tilde{\lambda}(r)$, для яких $\lambda(r)/\tilde{\lambda}(r) \to 1$ при $r \to +\infty$ будемо вважати еквівалентними й ототожнювати.

Лема 1. *Для того, щоб клас Λ_H° був нетривіальним, достатньо, щоб функція зростання $\lambda(r)$ була еквівалентною до деякої опуклої стосовно $\log r$ функції зростання.*

Доведення. Нехай функція зростання $\lambda(r)$ еквівалентна до деякої опуклої стосовно $\log r$ функції зростання. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція λ визначена при $r \geqslant 0$. В такому випадку нетривіальним буде клас Λ_E° цілих функцій цілком регулярного зростання (див. [7] або [8, с. 85]), а отже, існуватиме ціла функція f для якої індикатор $h_1 \not\equiv 0$. Кожна ціла функція цілком регулярного зростання стосовно λ в класичному розумінні [8], [9] буде також функцією цілком регулярного зростання і в проколеній площині $\mathbb{C}^*$. Справді, якщо $T(r,f)$ її класична характеристика Неванлінни [10], то справджується нерівність $T_0(r,f) \leqslant T(r,f)$ для всіх $r > 1$ (див. [3]). Крім того, існуватимуть границі $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. А отже, f задовольнятиме Означення 2 з першої частини цієї праці. У цьому випадку голоморфна у $\mathbb{C}^*$ функція $f(1/z)$ також належатиме до класу Λ_H° з індикатором $h_2 \not\equiv 0$. □

Лема 2. *Нехай $\lambda(r)$ функція помірного зростання опукла стосовно $\log r$. Нехай $1<\gamma<2$. Тоді*

$$\sup_{r>1} \frac{\lambda(\gamma r)}{\lambda(r)} \leqslant 1 + M^3(\gamma - 1).$$

Доведення цієї леми є аналогічним до доведення Леми 7.2 з [8, ст. 81], [11].

Лема 3. *Нехай $f \in \Lambda_H$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists A_k \quad \forall \gamma \in (1,2) \quad \forall r > 1 : \quad \Big| c_k(\gamma r, f) - c_k(r,f) \Big| \leqslant A_k(\gamma - 1)\lambda(r).$$

Лема 4. *Нехай $f \in \Lambda_H$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists A_k \quad \forall \gamma \in (1,2) \quad \forall r > 1 : \quad \left| c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) \right| \leqslant A_k(\gamma - 1)\lambda(r).$$

Доведення цих двох лем ми подаємо нижче.

3. Доведення леми 3. Оскільки $f \in \Lambda_H$, то $(\exists A > 0)$ $(\forall r > 1)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$: $|c_k(2r,f)| \leqslant A\lambda(r)$, $n_0(2r,f) \leqslant A\lambda(r)$.

Спочатку розглянемо випадок $k = 0$. Нам знадобиться така формула, яку можна знайти в доведенні аналога формули Єнсена для кільця з роботи [3]

$$N_0^{(1)}(r,f) + \frac{1}{2} n_0(\mathbb{T}, f) \log r = c_0(r,f) - c_0(1,f) + \alpha_f \log r, \tag{5}$$

де $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$, α_f – стала, яка не залежить від r. Маємо

$$N_0^{(1)}(\gamma r, f) - N_0^{(1)}(r,f) = \int\limits_r^{\gamma r} \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t} dt \leqslant n_0^{(1)}(\gamma r, f) \log \gamma \leqslant A(\gamma - 1)\lambda(r). \tag{6}$$

Тому, використовуючи (5), отримуємо

$$|c_0(\gamma r, f) - c_0(r,f)| \le A(\gamma-1)\lambda(r) + \frac{1}{2}(n_0(\mathbb{T}, f) + |\alpha_f|) \log \gamma \le B(\gamma - 1)\lambda(r),$$

де $B = A + \frac{n_0(\mathbb{T},f)+|\alpha_f|}{2\lambda(1)}$.

При $k \in \mathbb{N}$, використовуючи вирази для коефіцієнтів Фур'є ([4])

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}) + \frac{1}{2k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right) - \frac{n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k}, \quad r>1,$$

отримуємо

$$\begin{gathered}\frac{c_k(\gamma r,f)}{\gamma^k} - c_k(r,f) = \frac{1}{2\gamma^k}\left(\alpha_k(\gamma r)^k + \frac{\overline{\alpha}_{-k}}{(\gamma r)^k}\right) + \frac{1}{2k\gamma^k} \sum_{1<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\left(\frac{\gamma r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{\gamma r}\right)^k \right) - \\ - \frac{n_k(\mathbb{T},f)}{2k\gamma^{2k}r^k} - \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}) - \frac{1}{2k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right) + \frac{n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k} = \\ = \frac{k\overline{\alpha}_{-k} - n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) - \frac{1}{2k\gamma^{2k}} \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k - \\ - \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k + \frac{1}{2k} \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k .\end{gathered} \tag{7}$$

Враховуючи, що

$$\gamma^s - 1 \leqslant 2^s \cdot (\gamma - 1), \tag{8}$$

при $1<\gamma<2$ та $s \in \mathbb{N}$, оцінимо суми з правої частини (7). Маємо

$$\begin{gathered}\left| \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right| \leqslant \frac{1}{2k}\frac{\gamma^{2k}-1}{\gamma^{2k}} n_0^{(1)}(r,f) = \\ = \frac{1}{2k}\frac{(\gamma^k+1)(\gamma^k-1)}{\gamma^{2k}} n_0^{(1)}(r,f) < \frac{\gamma^k-1}{2k} n_0^{(1)}(r,f) < 2^k(\gamma-1)A\lambda(r),\end{gathered} \tag{9}$$

а також, використовуючи зображення сум інтегралами Стілтьєса (див. Зауваження 3) та інтегруючи частинами

$$\begin{gathered}\frac{1}{2k}\left| \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \frac{1}{\gamma^{2k}} \sum_{r<|a_j|\leqslant \gamma r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right| = \\ = \frac{1}{2k}\left| r^k \int_r^{\gamma r} \frac{dn_k^{(1)}(r,f)}{t^k} - \frac{1}{r^k\gamma^{2k}} \int_r^{\gamma r} t^k dn_k^{(1)}(r,f) \right| = \\ = \frac{1}{2k}\left| r^k \left(\frac{n_k^{(1)}(t,f)}{t^k}\Big|_r^{\gamma r} + k\int_r^{\gamma r} \frac{n_k^{(1)}(r,f)}{t^{k+1}} dt \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^k\gamma^{2k}} \left(t^k n_k^{(1)}(t,f)\Big|_r^{\gamma r} - k\int_r^{\gamma r} t^{k-1} n_k^{(1)}(r,f) dt \right) \right| \leqslant\end{gathered}$$

$$\leqslant \frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)n_0^{(1)}(r,f)+\frac{r^k}{2k}n_0^{(1)}(\gamma r,f)\left(\frac{1}{r^k}-\frac{1}{(\gamma r)^k}\right)+\frac{1}{2k}n_0^{(1)}(\gamma r,f)\frac{\gamma^k-1}{\gamma^{2k}}=$$
$$=\frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)n_0^{(1)}(r,f)+\frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{k}}\right)n_0^{(1)}(\gamma r,f)+\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^k}-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)n_0^{(1)}(\gamma r,f)=$$
$$=\frac{1}{2k}\left(1-\frac{1}{\gamma^{2k}}\right)(n_0^{(1)}(r,f)+n_0^{(1)}(\gamma r,f))\leqslant\frac{1}{k}n_0^{(1)}(\gamma r,f)\frac{\gamma^{2k}-1}{\gamma^{2k}}<2^k(\gamma-1)A\lambda(r). \quad (10)$$

Нарешті,

$$\left|\frac{k\overline{\alpha}_{-k}-n_k(\mathbb{T},f)}{2kr^k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}}-1\right)\right|\leqslant\frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2}2^k(\gamma-1)\leqslant\frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2\lambda(1)}2^k(\gamma-1)\lambda(r). \quad (11)$$

Тоді з (7), зважаючи на (9) – (11), отримуємо

$$\frac{1}{\gamma^k}\left|c_k(\gamma r,f)-\gamma^k c_k(r,f)\right|\leqslant\left(2A+\frac{|\alpha_{-k}|}{2\lambda(1)}\right)2^k(\gamma-1)A\lambda(r).$$

Оскільки

$$|c_k(\gamma r,f)-c_k(r,f)|\leqslant(\gamma^k-1)|c_k(r,f)|+|c_k(\gamma r,f)-\gamma^k c_k(r,f)|,$$

то

$$|c_k(\gamma r,f)-c_k(r,f)|\leqslant 2^k(\gamma-1)A\lambda(r)+$$
$$+\left(2A+\frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2\lambda(1)}\right)2^{2k}(\gamma-1)A\lambda(r)=(\gamma-1)A_k\lambda(r),$$

де $A_k=2^kA+\left(2A+\frac{|\alpha_{-k}|+n_0(\mathbb{T},f)}{2\lambda(1)}\right)2^{2k}$.

При $k\in\mathbb{Z}$ використовуємо властивість $c_{-k}(r,f)=\overline{c_k(r,f)}$.

□

4. Доведення Леми 4. Доведення цієї леми за своєю структурою нагадує доведення Леми 3 із використанням відповідних співвідношень і результатів для випадку $|z|<1$.

Оскільки $f\in\Lambda_H$, то $(\exists A>0)$ $(\forall r>1)$ $(\forall k\in\mathbb{Z})$: $|c_k(\frac{1}{\gamma r},f)|\leqslant A\lambda(r)$, $n_0(\gamma r,f)\leqslant A\lambda(r)$.

Для випадку $k=0$ використаємо таке співвідношення, яке можна знайти в доведенні аналога формули Єнсена для кільця з [3]

$$N_0^{(2)}(r,f)-\frac{1}{2}n_0(\mathbb{T},f)\log r=c_0\left(\frac{1}{r},f\right)-c_0(1,f)-\alpha_f\log r,\quad r>1, \quad (12)$$

де α_f – стала, яка не залежить від r. Аналогічно до (6) одержуємо

$$N_0^{(2)}(\gamma r,f)-N_0^{(2)}(r,f)=\int_r^{\gamma r}\frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt\leqslant A(\gamma-1)\lambda(r).$$

З (12) отримуємо

$$\left|c_0\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-c_0\left(\frac{1}{r},f\right)\right|\leq A(\gamma-1)\lambda(r)+\frac{1}{2}(n_0(\mathbb{T},f)+|\alpha_f|)\log\gamma\leq B(\gamma-1)\lambda(r),$$

де $B=A+\frac{n_0(\mathbb{T},f)+|\alpha_f|}{2\lambda(1)}$.

При $k \in \mathbb{N}$, використовуючи вирази для коефіцієнтів Фур'є [4]

$$c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k) + \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left((\overline{a}_j r)^k - \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k\right) - \frac{n_k(\mathbb{T}, f)}{2kr^{-k}}, \quad r > 1,$$

отримуємо

$$\frac{c_k(\frac{1}{\gamma r}, f)}{\gamma^k} - c_k(\frac{1}{r}, f) = \frac{\alpha_k(\gamma r)^{-k} + \overline{\alpha}_{-k}(\gamma r)^k}{2\gamma^k} + \frac{1}{2k\gamma^k} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < 1} \left((\overline{a}_j \gamma r)^k - \left(\frac{1}{a_j \gamma r}\right)^k\right) -$$

$$-\frac{n_k(\mathbb{T}, f)}{2kr^{-k}} - \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k) - \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left((\overline{a}_j r)^k - \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k\right) + \frac{n_k(\mathbb{T}, f)}{2kr^{-k}} - =$$

$$= \frac{\alpha_k r^{-k}}{2}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) + \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} (\overline{a}_j r)^k +$$

$$+\frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{\gamma^{2k}}\right) \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k - \frac{1}{2k\gamma^{2k}} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k. \tag{13}$$

Оцінимо суми з правої частини (13). Використовуючи (8), а також скінченність λ-типу, маємо

$$\left|\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}} - 1\right) \sum_{\frac{1}{r} \leqslant |a_j| < 1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k\right| \leqslant \frac{1}{2k} \frac{\gamma^{2k} - 1}{\gamma^{2k}} n_0^{(2)}(r, f) < 2^k(\gamma - 1)A\lambda(r). \tag{14}$$

Зображуючи суми інтегралами Стільтьєса, користуючись Зауваженням 3 та застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$\frac{1}{2k}\left| \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} (\overline{a}_j r)^k - \frac{1}{\gamma^{2k}} \sum_{\frac{1}{\gamma r} \leqslant |a_j| < \frac{1}{r}} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right| =$$

$$= \frac{1}{2k}\left| r^k \int_r^{\gamma r} \frac{dn_k^{(2)}(r, f)}{t^k} - \frac{1}{r^k \gamma^{2k}} \int_r^{\gamma r} t^k dn_k^{(2)}(r, f) \right| =$$

$$= \frac{1}{2k}\left| r^k \left(\frac{n_k^{(2)}(t, f)}{t^k}\Bigg|_r^{\gamma r} + k \int_r^{\gamma r} \frac{n_k^{(2)}(r, f)}{t^{k+1}} dt \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{r^k \gamma^{2k}} \left(t^k n_k^{(2)}(t, f)\Bigg|_r^{\gamma r} - k \int_r^{\gamma r} t^{k-1} n_k^{(2)}(r, f) dt \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{\gamma^{2k}}\right) n_0^{(2)}(r, f) + \frac{r^k}{2k} n_0^{(2)}(\gamma r, f)\left(\frac{1}{r^k} - \frac{1}{(\gamma r)^k}\right) + \frac{1}{2k} n_0^{(2)}(\gamma r, f) \frac{\gamma^k - 1}{\gamma^{2k}} \leqslant$$

$$= \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{\gamma^{2k}}\right)(n_0^{(2)}(r, f) + n_0^{(2)}(\gamma r, f)) \leqslant \frac{1}{k} n_0^{(2)}(\gamma r, f) \frac{\gamma^{2k} - 1}{\gamma^{2k}} < 2^k(\gamma - 1)A\lambda(r). \tag{15}$$

Нарешті,

$$\left|\frac{\alpha_k r^{-k}}{2}\left(\frac{1}{\gamma^{2k}}-1\right)\right| \le \frac{|\alpha_k|}{2r^k}\frac{\gamma^{2k}-1}{\gamma^{2k}} \le \frac{|\alpha_k|}{2\lambda(1)}2^k(\gamma-1)\lambda(r). \tag{16}$$

Тоді з (14) – (16) отримуємо $\frac{1}{\gamma^k}\left|c_k(\frac{1}{\gamma r},f)-\gamma^k c_k(\frac{1}{r},f)\right| \leqslant (2A+\frac{|a_k|}{2\lambda(1)})2^k(\gamma-1)A\lambda(r)$. Але оскільки

$$\left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| \leqslant (\gamma^k-1)\left|c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| + \left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-\gamma^k c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right|,$$

то

$$\left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r},f\right)-c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| \leqslant 2^k(\gamma-1)A\lambda(r)+$$

$$+\left(2A+\frac{|a_k|}{2\lambda(1)}\right)2^{2k}(\gamma-1)A\lambda(r) = A_k(\gamma-1)\lambda(r),$$

де $A_k = 2^kA + (2A+\frac{|a_k|}{2\lambda(1)})2^{2k}$.

Для отримання бажаного результату для від'ємних цілих k використовуємо рівність $c_{-k}(\frac{1}{r},f)=\overline{c_k(\frac{1}{r},f)}$.

□

5. Доведення Теореми 5. Нехай $z = re^{i\varphi}$. За теоремою про одностайну неперервність [1, Теорема 3], маємо $(\forall\eta>0)$ $(\exists E_\eta) : \overline{m}_0^*(E_\eta) \leqslant \eta$ таке, що при $r \notin E_\eta$, $r>1$ сім'я функцій $h_r^{(1)}(\varphi) := \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)}$ є одностайно неперервною. Враховуючи неперервність індикатора h_1 [1, Теорема 1], отримуємо, що $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall\eta>0)$ $(\forall r\notin E_\eta)$ $(\forall\theta,\varphi)$:

$$|\theta-\varphi|<\delta \to \left||h_r^{(1)}(\varphi)-h_1(\varphi)|-|h_r^{(1)}(\theta)-h_1(\theta)|\right| < |h_r^{(1)}(\varphi)-h_r^{(1)}(\theta)|+|h_1(\varphi)-h_1(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси

$$|h_r^{(1)}(\varphi)-h_1(\varphi)| < |h_r^{(1)}(\theta)-h_1(\theta)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Інтегруючи останню нерівність стосовно θ на $[\varphi,\varphi+\delta]$, одержимо

$$|h_r^{(1)}(\varphi)-h_1(\varphi)| < \frac{1}{\delta}\int_{\varphi}^{\varphi+\delta}|h_r^{(1)}(\theta)-h_1(\theta)|d\theta + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{\delta}\int_0^{2\pi}|h_r^{(1)}(\theta)-h_1(\theta)|d\theta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Оскільки $f \in \Lambda_H^\circ$, то, зважаючи на ([5], Теорема 1, $p=1$), робимо висновок, що правильна рівність

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)}-h_1(\theta)\right|d\theta = 0,$$

тому

$$(\exists r_\varepsilon>1) \quad (\forall r\in(r_\varepsilon,+\infty)\setminus E_\eta) \quad : \quad \frac{1}{\delta}\int_0^{2\pi}|h_r^{(1)}(\theta)-h_1(\theta)|d\theta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_\eta}} h_r^{(1)}(\varphi) = h_1(\varphi)$ для кожного $\varphi \in [0, 2\pi]$. Використовуючи міркування наведені у [12, с.185-186, п.3], отримуємо існування E_0-множини $E_0^{(1)}$ такої, що $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(1)}}} h_r^{(1)}(\varphi) = h_1(\varphi)$ рівномірно стосовно $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Нехай тепер $z = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$. Застосовуючи лему про одностайну неперервність для цього випадку [1, Теорема 4], маємо $(\forall\mu > 0)$ $(\exists E_\mu)$: $\overline{m}_0^*(E_\mu) \leqslant \mu$ таке, що при $r \notin E_\mu$, $r > 1$ сім'я функцій $h_r^{(2)}(\varphi) := \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)}$ буде одностайно неперервною. Далі міркуємо аналогічно як у випадку доведення першої частини теореми, використовуючи неперервність індикатора h_2 [1, Теорема 2], інтегруючи та застосовуючи результат з [2] (Теорема 2, $q = 1$)

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - h_2(\theta)\right|d\theta = 0$$

отримуємо спочатку, що $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_\mu}} h_r^{(2)}(\varphi) = h_2(\varphi, f)$ для кожного $\varphi \in [0, 2\pi]$, а потім й існування E_0-множини $E_0^{(2)}$ такої, що $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(2)}}} h_r^{(2)}(\varphi) = h_2(\varphi, f)$ рівномірно стосовно $\varphi \in [0, 2\pi]$, застосовуючи той самий метод з [12, с.185-186, п.3], що й у випадку $z = re^{i\theta}$.

$\square$

6. Доведення Теореми 6. Нехай $\lambda(r)$ – функція зростання, опукла стосовно $\log r$. Тоді за Лемою 1 клас Λ_H° є нетривіальним. Нехай $f \in \Lambda_H^\circ$. Припустимо, що виконується (3), тобто

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists r' > 1 \quad \forall r \in (r', +\infty) \setminus E_0^1 \quad \forall\varphi \in [0, 2\pi] : \quad \left|\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} - H_1(\varphi)\right| < \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists r'' > 1 \quad \forall r \in (r'', +\infty) \setminus E_0^2 \quad \forall\varphi \in [0, 2\pi] : \quad \left|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} - H_2(\varphi)\right| < \varepsilon.$$

Ці нерівності можна переписати у вигляді

$$H_1(\varphi) - \varepsilon < \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{\lambda(r)} < H_1(\varphi) + \varepsilon, \quad H_2(\varphi) - \varepsilon < \frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\varphi})|}{\lambda(r)} < H_2(\varphi) + \varepsilon.$$

Інтегруючи ці нерівності стосовно φ по $[0, 2\pi]$, матимемо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_1(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi - \varepsilon < \frac{1}{\lambda(r)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|e^{-ik\varphi}\,d\varphi < \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_1(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi + \varepsilon,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_2(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi - \varepsilon < \frac{1}{\lambda(r)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\left|f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right|e^{-ik\varphi}\,d\varphi < \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} H_2(\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\varphi + \varepsilon.$$

Звідси, позначивши коефіцієнти Фур'є функції $H_1(\varphi)$ через $b_k^{(1)}$, а коефіцієнти Фур'є функції $H_2(\varphi)$ через $b_k^{(2)}$, отримаємо

$$\left|\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} - b_k^{(1)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} - b_k^{(2)}\right| < \varepsilon.$$

А отже,

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(1)}}} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} = b_k^{(1)}, \qquad \lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0^{(2)}}} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} = b_k^{(2)}.$$

Зокрема,

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \gamma > 1 (\gamma r \notin E_0^{(1)})\ \forall r > r_1 = r_1(\varepsilon)\ \forall k \in \mathbb{Z}: \quad |c_k(\gamma r, f) - b_k^{(1)}\lambda(\gamma r)| < \varepsilon\lambda(r), \tag{18}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \gamma > 1 (\gamma r \notin E_0^{(2)})\ \forall r > r_2 = r_2(\varepsilon)\ \forall k \in \mathbb{Z}: \quad |c_k(\frac{1}{\gamma r}, f) - b_k^{(2)}\lambda(\gamma r)| < \varepsilon\lambda(r). \tag{19}$$

З означення E_0-множини випливає, що для довільного γ_0 такого, що $1 < \gamma_0 < 2$ знайдеться $r_3 = r_3(\gamma_0)$ таке, що при $E_0^{(1)} \ni r > r_3$ існує γ, $1 < \gamma \leqslant \gamma_0$, для якого $\gamma r \notin E_0^{(1)}$. Отже, при $E_0^{(1)} \ni r > r_0' := \max\{r_1, r_3\}$, використовуючи (18), Леми 2, 3, а також попереднє зауваження, для фіксованого $k \in \mathbb{Z}$ знаходимо

$$|c_k(r,f) - b_k^{(1)}\lambda(r)| \leqslant |c_k(\gamma r, f) - b_k^{(1)}\lambda(\gamma r)| + |c_k(\gamma r, f) - c_k(r,f)| + |b_k^{(1)}||\lambda(\gamma r) - \lambda(r)| \leqslant$$
$$\leqslant M\varepsilon\lambda(r) + A_k(\gamma_0 - 1)\lambda(r) + |b_k^{(1)}|M^3(\gamma_0 - 1)\lambda(r).$$

Звідси випливає, що $\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} = b_k^{(1)}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Аналогічно для довільного $\gamma_0 \in (1,2)$ знайдеться $r_4 = r_4(\gamma_0)$ таке, що при $E_0^{(2)} \ni r > r_4$ існує γ, $1 < \gamma \leqslant \gamma_0$, для якого $\gamma r \notin E_0^{(2)}$. А отже, при $E_0^{(2)} \ni r > r_0'' := \max\{r_2, r_4\}$, використовуючи (19), Леми 2, 4 для фіксованого $k \in \mathbb{Z}$ отримуємо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) - b_k^{(2)}\lambda(r)\right| \leqslant \left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - b_k^{(2)}\lambda(\gamma r)\right| + \left|c_k\left(\frac{1}{\gamma r}, f\right) - c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| +$$
$$+ |b_k^{(2)}||\lambda(\gamma r) - \lambda(r)| \leqslant M\varepsilon\lambda(r) + A_k(\gamma_0 - 1)\lambda(r) + |b_k^{(2)}|M^3(\gamma_0 - 1)\lambda(r).$$

Тому

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r}, f)}{\lambda(r)} = b_k^{(2)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пригадуючи означення функції цілком регулярного зростання, робимо висновок, що $f \in \Lambda_H^0$. На підставі неперервності H_1, H_2 отримуємо виконання (4).

□

Список використаної літератури

1. *Вишинський О.* Про властивості індикаторів голоморфних функцій цілком регулярного зростання у проколеній комплексній площині. I / О. Вишинський, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2015. — Вип. 80. — С. 10–26.
2. *Голдак М.* Голоморфні функції цілком регулярного зростання в проколеній площині / М. Голдак, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — С. 91–96.

3. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / A. Ya. Khrystiyanyn, A. A. Kondratyuk // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 23, №1. — P. 19–30.
4. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains. // Joensuu–L'viv, 2006. — 116 p. (A. Kondratyuk, I. Laine, Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series methods in complex analysis // Mekrijärvi, 2005, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. **10** (2006), 9–111.)
5. *Вишинський О.* Про одностайне цілком регулярне зростання модуля та аргумента голоморфної в проколеній комплексній площині функції / О. Вишинський, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. — С. 33–47.
6. *Натансон Н.П.* Теория функций вещественной переменной / Н. П. Натансон, — Москва, 1982.
7. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста II / А. А. Кондратюк // Мат. сб. — 1980. — 113. — №. 1. — С. 118–152.
8. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / А. А. Кондратюк, — Львів, 1988.
9. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста I / А. А. Кондратюк // Мат. сб. — 1978. — 106. — №. 1. — С. 386–408.
10. *Хейман У.* Мероморфные функции / У. Хейман — М.: Мир, 1966.
11. *Кондратюк А.А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста III / А. А. Кондратюк // Мат. сб. — 1983. — 120. — №. 3. — С. 331–343.
12. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин — М.:ГИТТЛ, 1956.

Стаття: надійшла до редколегії 12.05.2015.
доопрацьована 15.04.2016.
прийнята до друку 08.06.2016.

ON THE PROPERTIES OF THE INDICATORS OF COMPLETELY REGULARLY GROWING HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE PUNCTURED PLANE. II

Andriy KHRYSTIYANYN, Oleg VYSHYNS'KYI

Ivan Franko National University of Lviv,
79000, Lviv, Universytetska Str., 1
e-mail: khrystiyanyn@ukr.net, vyshynskyi@ukr.net

Using the results obtained in Part I we prove theorems describing asymptotic behaviour of a holomorphic function of completely regular growth in the punctured complex plane as $r \to +\infty$ and $r \to 0$ outside some E_0-sets.

Key words: function of completely regular growth, growth indicator, function of finite λ-type, upper relative measure, Fourier coefficients, holomorphic function.