ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 61–84
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 61–84

УДК 517.95

ПРО ІСНУВАННЯ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ЄВРОПЕЙСЬКИМ ОПЦІОНОМ

Олег БУГРІЙ, Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Розглянуто нелінійні вироджені рівняння конвекції-дифузії, збурені стрибкоподібним дифузійним оператором, які пов'язані з теорією ціноутворення опціонів європейського стилю виконання. Досліджено мішані задачі для таких рівнянь. Доведено теорему існування їхніх розв'язків.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, стрибкоподібний процес Леві, європейський опціон.

1. Вступ. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ – деякі числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область класу $C^{0,1}$ (див. [1, с. 48]) з межею $\partial\Omega$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $\Sigma_{t_1,t_2} = \partial\Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. Розглянемо таку задачу:

$$u_t - a\,\Delta(|u|^{\gamma-2}u) + Gu + \phi(Eu) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{3}$$

де $a > 0$, $\gamma \in [2,3)$ – деякі числа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа,

$$(Gu)(x,t) = g(x,t)|u(x,t)|^{q(x)-2}u(x,t), \tag{4}$$

$$(Eu)(x,t) = \int\limits_\Omega \epsilon(x,t,z)\Big(u(x+z,t) - u(z,t)\Big)\,dz, \tag{5}$$

$g, q, \phi, \epsilon, f, u_0$ – деякі функції. В (5) вважаємо функцію u продовженою нулем при $x \notin \Omega$, $t \in [0,T]$.

Задачу Коші для рівняння типу (1) з $q(x) \equiv 2$ досліджено у [2] при $\gamma = 2$, і у [3] при $\gamma = 3$. Як ми доведемо, ці задачі мають прикладне значення в фінансовій математиці. Вибираючи функцію ϵ в (5), отримаємо, що лінійний аналог (1) виникає в моделях Мертона [4], Коу [5] та інших (див. [6]), які описують біржові коливання вартості опціонів. Відповідні до (1) півлінійні інтегро-диференціальні параболічні варіаційні нерівності розглянуто у [7], [8]. Нелінійні рівняння типу

$$-u_t + H(x,t,u,\nabla u,\Delta u,Eu) = 0,$$

з ліпшиць-неперервною функцією $(u,v,w)\mapsto H(x,t,u,v,w,z)$ вивчено у [9]-[11].

Задачі для параболічних рівнянь зі сталими показниками нелінійності й інтегральним доданком іншого, ніж (5), вигляду вивчали в [12]-[16].

В [17] розглянуто мішану задачу для рівняння

$$u_t - \Delta u - |u|^{\alpha(x)} = \int\limits_{\Omega} |u(z,t)|^{\beta(z)}\, dz \tag{6}$$

зі змінними показниками нелінійності $\alpha=\alpha(x)>1$, $\beta=\beta(x)>1$. Доведено існування локального та неіснування глобального розв'язку.

Мішану задачу для нелінійного рівняння (1) з інтегральним доданком вигляду (5) і змінним показником нелінійності ($q(x)\not\equiv \mathrm{const}$) розглянуто вперше.

Структура праці така. У другому пункті сформульовано розглядувану задачу і основний результат – теорему існування її розв'язку. Третя частина статті містить економічну модель обчислення вартості опціону європейського стилю виконання, в якій виникає лінійний аналог нашого рівняння. У четвертому пункті наведено основні позначення та допоміжні факти, які використано у п'ятому пункті статті для доведення основної теореми. Статтю завершує список літератури.

2. Формулювання задачі. Нехай $G\subset\mathbb{R}^N$, $N\in\mathbb{N}$, – деяка область (наприклад, $G=\Omega$, $G=Q_{0,T}$ і т.д.), $\mathcal{L}(G)$ – множина всіх вимірних за Лебегом підмножин G, $\mathcal{ML}(G)$ – множина всіх функцій $v: G\to\mathbb{R}^1$, вимірних стосовно $\mathcal{L}(G)$,

$$\mathcal{MLB}_+(G) = \{p\in\mathcal{ML}(G)\ \mid\ \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} p(y)>0,\ \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G} p(y)<+\infty\}.$$

Далі для кожної функції $p\in\mathcal{MLB}_+(G)$ через p_0, p^0 позначатимемо такі числа, а через S_p – таку функцію:

$$p_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} p(y),\quad p^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G} p(y),\qquad S_p(s) := \max\{s^{p_0},\, s^{p^0}\},\quad s\geq 0. \tag{7}$$

Нехай $\mathrm{Lip}\,(G)$ – множина функцій $\phi\in\mathcal{ML}(G)$, які задовольняють на області G умову Ліпшиця; $L^r(G)$, де $r\geq 1$, – простір Лебега; $L^r(0,T;B)$, де B – нормований простір, – простір з [1, с. 155]; $W^{m,r}(G)$, $W_0^{m,r}(G)$, де $m\in\mathbb{N}$, – простори Соболєва, $H^m(G)=W^{m,2}(G)$, $H_0^m(G)=W_0^{m,2}(G)$.

Нехай $L_+^\infty(G) = \{p\in L^\infty(G)\ \mid\ \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} p(y)>1\}$. Зрозуміло, що виконується вкладення $L_+^\infty(G)\subset\mathcal{MLB}_+(G)$. Крім позначень p_0, p^0, S_p, для кожного $p\in L_+^\infty(G)$ означимо функцію $p'\in L_+^\infty(G)$ так: $\frac{1}{p(y)}+\frac{1}{p'(y)}=1$ майже для всіх $y\in G$.

Нехай $p\in L_+^\infty(G)$. Визначимо функціонал $\rho_p(\cdot;G)$ за допомогою рівності $\rho_p(v;G) := \int_G |v(y)|^{p(y)}\,dy$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{p(y)}(G)$ називають множину таких функцій $v\in\mathcal{ML}(G)$, для яких $\rho_p(v;G)<+\infty$. В [18, с. 599, 600] доведено, що $L^{p(y)}(G)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою Люксембурга $||v;L^{p(y)}(G)|| := \inf\{\lambda>0\mid \rho_p(v/\lambda;G)\leq 1\}$.

Нехай $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, $V = H^1_0(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$,

$$U(Q_{0,T}) = \{u \in L^{q(x)}(Q_{0,T}) \ \mid \ |u|^{\gamma-2}u \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega))\}.$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A): $a > 0$, $2 \le \gamma < 3$;
(E): $\epsilon \in \mathcal{ML}(Q_{0,T} \times \Omega)$, $|\epsilon(x,t,y)| \le \epsilon^0$ майже для всіх $(x,t,y) \in Q_{0,T} \times \Omega$, де $\epsilon^0 > 0$ – деяке число;
(Φ): $\phi \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R})$, $|\phi(\xi)| \le \phi^0|\xi|$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $\phi^0 > 0$ – деяке число;
(Q): $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, $q^0 \le \gamma$;
(G): $g \in \mathcal{MLB}_{+}(Q_{0,T})$, $g_t \in \mathcal{ML}(Q_{0,T})$, $|g_t(x,t)| \le g^1 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(F): $f \in L^{\gamma}(Q_{0,T})$;
(U): $u_0 \in L^{\gamma}(\Omega)$, $|u_0|^{\gamma-2}u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Подамо означення узагальненого розв'язку нашої задачі.

Означення 1. *Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), якщо u задовольняє умову (3) і рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-uv_t + a(\nabla(|u|^{\gamma-2}u), \nabla v) + G(u)v + \phi(Eu)v\Big]\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\,dxdt \qquad (8)$$

для всіх $v \in H^1_0(Q_{0,T})$.

Тут і далі $\nabla v = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ – градієнт функції v, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо таке: якщо $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, то $u \in L^2(Q_{0,T})$ і ми доведемо, що тоді $Eu, Gu \in L^2(Q_{0,T})$. Отже, в (8) інтеграли мають сенс. Зауважимо таке: якщо $\gamma \ge 2$, то правильні нерівності $1 < \frac{4(\gamma-1)}{3\gamma-4} \le 2$.

Основний результат статті – така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\partial\Omega \in C^4$, виконуються умови **(A)**-**(U)**. Тоді задача (1)-(3) має узагальнений розв'язок u і, крім того, правильні такі включення:*
$u \in C\big([0,T]; L^{\frac{4(\gamma-1)^2}{3\gamma-4}}(\Omega)\big)$, $|u|^{\gamma-2}u \in W^{1,\frac{4(\gamma-1)}{3\gamma-4}}(Q_{0,T})$.

3. Узагальнення моделі Блека-Шоулса обчислення премії опціонів європейського стилю виконання. Нагадаємо результати з [4]. Розглянемо стандартизований біржовий контракт, який надає право його власнику в деякий момент часу $T > 0$ в майбутньому (термін виконання контракту) купити за договірною ціною $K > 0$ (strike-ціна базового активу контракту на момент виконання контракту) обумовлений об'єм цього базового активу. Поточна ринкова ціна базового активу (spot-ціна) постійно змінюється. Залежно від співвідношення між strike і spot цінами базового активу виконання контракту може бути вигідним або збитковим.

Сьогодні на фондових біржах активно торгують трьома основними видами фінансових контрактів: форвардами – "твердими" контрактами, обов'язковими до виконання; ф'ючерсами – контрактами "майже обов'язковими" до виконання (якщо базовий актив купувати невигідно, то ф'ючерсна позиція закривається офсетною угодою); опціонами – "необов'язковими" до виконання контрактами. Оскільки в основу контрактів лежить певний фінансовий актив, то вони природно мають ринкову вартість і є предметом торгів на біржі. Особливо привабливими на біржах є опціони американського та європейського стилів виконання. Опціон американського стилю виконання передбачає можливість виконання контракту в будь-який момент часу $\tau \in [0, T]$, а європейського – лише в час $\tau = T$.

Мета цього пункту – в рамках моделі Блека-Шоулса обговорити деякі узагальнення класичної методики обчислення ринкової вартості (премії) опціону купівлі (call-option) європейського стилю виконання на акції.

Класична теорія Блека-Шоулса оцінки опціонних контрактів передбачає, що операції з контрактами проводять на (B, S) ринку, який складається з безризикового активу B (банківський рахунок, банківські облігації) і ризикового активу S (акції). Відсоткова ставка μ банківського рахунку, а також волатильність (мінливість) акції σ є відомими сталими параметрами. Математична модель цього ринку описує еволюцію активів на скінченному інтервалі часу $[0, T]$. Банківський рахунок змінюється за законом $B(\tau) = B(0)e^{\mu\tau}$, $\tau \in [0, T]$, з невипадковим диференціалом

$$dB(\tau) = \mu B(\tau)\, d\tau, \quad B(0) > 0.$$

Ціна базового активу опціону мінлива, вона залежить від багатьох чинників, є випадковим процесом $\{S(\tau)\}_{\tau\in[0,T]}$ і справджує стохастичне диференціальне рівняння

$$dS(\tau) = \mu\, S(\tau)\, d\tau + \sigma\, S(\tau)\, dW_\tau, \tag{9}$$

де $\{W_\tau\}_{\tau\in[0,T]}$ – стандартний вінерівський процес, тобто процес броунівського руху (див. [19]). Використовуючи методику праці [20], розв'язуємо рівняння (9) і отримуємо, що формула

$$S(\tau) = S(0)\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W_\tau} = \frac{S(0)}{B(0)}\, B(\tau)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W_\tau}, \quad \tau \in [0, T], \tag{10}$$

визначає значення spot-ціни акції в довільний момент часу $\tau \in [0, T]$.

Випадкова величина

$$H(S_T) = (S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$$

називається функцією виплат call-опціону європейського стилю виконання, вона визначає внутрішню вартість опціону в момент його експірації: чим більше значення $H(S_T)$, тим більшу вигоду матимемо від реалізації опціону в час $\tau = T$. В момент $\tau = T$ значення $H(S_T)$ є максимально можливою ринковою ціною call-опціону європейського стилю виконання. Оскільки $H(S_T)$ є випадковою величиною, то для характеристики поточного значення ринкової ціни цього опціону природно прийняти "теперішню" вартість опціону в будь-який момент часу $\tau \in [0, T]$ за умови, що spot-ціна акції дорівнює S

$$v(S, \tau) = e^{-\mu(T-\tau)}\mathbb{M}\{H(S_T)\, |S(\tau) = S\}, \quad S \in [0, +\infty), \quad \tau \in [0, T]. \tag{11}$$

Тут $\mathbb{M}$ – умовне математичне сподівання випадкової величини $H(S_T)$, а терміни "теперішня" і "майбутня" вартість вживаються у класичному з погляду фінансової математики сенсі (див., наприклад, [21], [22]). Зокрема, $v(S_T, 0) = e^{-\mu T}\mathbb{M}\{H(S_T)\}$ – вартість опціону на момент його підписання, а $v(S_T, T) = \mathbb{M}\{H(S_T)\}$ – найочікуваніше значення функції виплат у час виконання опціону.

У рамках моделі (B, S) ринку значення $v(S_T, 0)$ має бути таким, щоб подальше інвестування цієї суми в фондовий портфель, який складається з акцій і облігацій, на момент часу $\tau = T$ дало прибуток, не менший за значення $H(S_T)$. Вибір оптимальної стратегії інвестування (хедж-стратегії) продавцем опціону передбачає, що детермінована величина $v(S,\tau)$ за умови, що за акцією не виплачуються дивіденти та інші платежі, ціна акції є неперервною випадковою величиною та деяких інших додаткових умовах (див. [23], [2]), повинна бути розв'язком крайової задачі для рівняння Блека-Шоулса

$$v_\tau + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2\, v_{SS} + \mu S\, v_S - \mu v = 0, \quad S \in [0,+\infty), \quad \tau \in [0,T], \tag{12}$$

$$v(0,\tau) = 0, \quad v(S,T) = H(S_T), \tag{13}$$

де $v_\tau = \frac{\partial v}{\partial \tau}$, $v_S = \frac{\partial v}{\partial S}$, $v_{SS} = \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}$.

Однак модель Блека-Шоулса не враховує миттєві стрибкоподібні зміни ціни акції. Вони відбуваються, наприклад, під час неочікуваної терористичної атаки, стихійного лиха, отримання компанією великого державного замовлення тощо. Логарифмічна ціна активу у цьому випадку описується (див., наприклад, [24], [25], [26]) процесом Леві зі стрибкоподібною дифузією (Levy jump-diffusion). Цей процес має три незалежні складові: невипадкову – лінійний зсув (linear drift); випадкову неперервну – броунівський рух (Brownian motion); випадкову стрибкоподібну – складений пуассонівський процес (compound Poisson process), тобто

$$\ln \frac{S(\tau)}{S(0)} = \widetilde{a}\,\tau + \widetilde{b}\,W_\tau + \widetilde{c}\,Q_\tau. \tag{14}$$

де $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ – деякі сталі. У випадку (14) рівняння (12) набуде вигляду (див. [4, с. 132])

$$u_t - \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2\, u_{xx} - (\mu - \lambda k) x\, u_x + g(x,t)u - \lambda \mathbb{M}[u(xY,t) - u(x,t)] = 0, \tag{15}$$

де $u(x,t) = v(S,\tau)$ – премія європейського опціону, $x = S$ – spot-ціна акції, $t = T - \tau$ – час до виконання опціону, $(Y-1)$ – випадкова величина, яка продукує стрибкоподібну зміну ціни акції з x до xY, $k = \mathbb{M}[Y-1]$ – математичне сподівання $(Y-1)$, $g(x,t)$ – дохідність опціону, λ – середня кількість стрибків за одиницю часу.

Перетворимо останній доданок зліва в (15). Якщо D – щільність розподілу випадкової величини Y, то

$$\mathbb{M}[u(xY,t) - u(x,t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(u(xy,t) - u(x,t)\Big) D(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(u(x+z,t) - u(x,t)\Big) \frac{D(\frac{z}{x}+1)}{x} dz.$$

Доповнивши рівняння крайовими умовами, після перепозначень отримаємо задачу

$$u_t - a(x)\, u_{xx} + b(x,\lambda)\, u_x + g(x,t)u + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x,z)\Big(u(x+z,t) - u(x,t)\Big)\, dz = 0, \tag{16}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{17}$$

Після процедури "обрізання" рівняння (див. у одновимірному випадку, наприклад, [27, с. 39], у багатовимірному – [28, с. 14]), матимемо задачу в обмеженій області.

Розглядуване в цій праці рівняння (1) є певним нелінійним аналогом (16).

4. Допоміжні позначення і твердження. Норму банахового простору B позначимо $||\cdot;B||$, а спряжений до B простір – B^*. Скалярний добуток між B^* і B позначатимемо $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Символ $\circlearrowleft$ означає неперервне, $\overline{\circlearrowleft}$ – неперервне та щільне, а $\overset{K}{\subset}$ – компактне вкладення одного банахового простору в інший.

Нехай $\alpha \in \mathcal{ML}(\Omega)$

$$\phi_{\alpha(x)}(s) := \begin{cases} s^{\alpha(x)}, & s > 0, \\ 0, & s \le 0, \end{cases} \quad x \in \Omega. \tag{18}$$

Легко переконатися, що для будь-яких $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ виконуються (див., наприклад, [29, с. 82]) нерівності (тут $u^+ = \max\{u, 0\}$)

$$s^+ \le |s|, \qquad |s_1^+ - s_2^+| \le |s_1 - s_2|. \tag{19}$$

Нехай X – деякий простір. Розглянемо простір

$$W^{1,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X) \mid u_t \in L^p(0,T;X)\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

зі стандартно введеною нормою (див., наприклад, [30, с. 286]). Зрозуміло, що $C^1([0,T];X) \circlearrowleft W^{1,p}(0,T;X)$.

Твердження 1. *(Теорема 2* [30, с. 286]*). Якщо X – банахів простір, $1 \le p \le \infty$, то $W^{1,p}(0,T;X) \circlearrowleft C([0,T];X)$ і виконується формула інтегрування частинами*

$$\int\limits_s^\tau u_t(t)\,dt = u(\tau) - u(s), \qquad 0 \le s < \tau \le T, \quad u \in W^{1,p}(0,T;X). \tag{20}$$

Як і в теоремі A.1 [31, с. 47] матимемо таке: якщо $v \in W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega))$, де $1 \le p \le \infty$, то $v^+ \in W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega))$ та $(v^+)_t = \widetilde{\chi}(v)v_t$ майже скрізь в $Q_{0,T}$, де

$$\widetilde{\chi}(s) := \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \le 0. \end{cases} \tag{21}$$

Аналогічне твердження правильне і для $v^- = \max\{-v, 0\}$.

Далі користуватимемося такими твердженнями.

Лема 1. *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область класу $C^{0,1}$. Тоді формула*

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} w_t\, z\, dxdt = \int\limits_{\Omega_t} w\, z\, dx\Big|_{t=s}^{t=\tau} - \int\limits_{Q_{s,\tau}} w\, z_t\, dxdt, \quad 0 \le s < \tau \le T, \tag{22}$$

виконується для всіх функцій w та z, які задовольняють одну з таких умов:
(i) $w \in L^{q(x)}(Q_{0,T})$, де $q \in L_+^\infty(\Omega)$, $w_t \in L^1(Q_{0,T})$,
$z \in L^\infty(Q_{0,T})$, $z_t \in L^{q'(x)}(Q_{0,T})$;
(ii) $w, w_t \in L^1(Q_{0,T})$, $z, z_t \in L^\infty(Q_{0,T})$.

Доведення. Доведемо пункт *(i)*. Нехай $W = \{w \in L^{q(x)}(Q_{0,T}) \mid w_t \in L^1(Q_{0,T})\}$, $Z = \{z \in L^\infty(Q_{0,T}) \mid z_t \in L^{q'(x)}(Q_{0,T})\}$. Для $\varphi \in C^1([0,T])$ та $z \in Z$ маємо включення $\varphi z \in W^{1,1}(0,T;L^{\frac{q^0}{q^0-1}}(\Omega))$. Тому з формули (20) для $u = \varphi(t)z(x,t)$ випливає, що

$$\int\limits_s^\tau \varphi_t(t)z(x,t)\,dt = \varphi(\tau)z(x,\tau) - \varphi(s)z(x,s) - \int\limits_s^\tau \varphi(t)z_t(x,t)\,dt, \quad x \in \Omega. \tag{23}$$

Нехай $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Тоді з (23) отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{s,\tau}} \varphi_t v\, z\, dxdt = \int\limits_{\Omega_t} \varphi v\, z\, dx\Big|_{t=s}^{t=\tau} - \int\limits_{Q_{s,\tau}} \varphi v\, z_t\, dxdt. \tag{24}$$

Зрозуміло, що $C^1([0,T]; C^1(\overline{\Omega})) \circlearrowleft W \circlearrowleft W^{1,1}(0,T; L^1(\Omega))$. Тому множина функцій $\Big\{\sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(t) v_i(x) \;\big|\; m \in \mathbb{N},\ \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1([0,T]),\ v_1, \dots, v_m \in C^1(\overline{\Omega})\Big\}$ є всюди щільна в просторі W і з (24) випливає (22).

Доведення *(ii)* цілком аналогічне до доведення *(i)*. $\square$

Твердження 2. *Нехай $q \in L^\infty_+(G)$. Тоді (див.* [32, с. 168]*) для кожного $v \in \mathcal{ML}(G)$ виконуються такі нерівності:*

1) $||v; L^{q(x)}(G)|| \le S_{1/q}(\rho_q(v;G))$ при $\rho_q(v;G) < +\infty$;

2) $\rho_q(v;G) \le S_q(||v; L^{q(x)}(G)||)$ при $||v; L^{q(x)}(G)|| < +\infty$.

Лема 2. *Нехай $\alpha \in \mathcal{MLB}_+(G)$ та $p, q \in L^\infty_+(G)$ – такі функції, що $p(y) \ge \alpha(y)$ і $q(y) \le \frac{p(y)}{\alpha(y)}$ майже для всіх $y \in G$; $\phi_{\alpha(y)}$ – функція, визначена в (18) з $\alpha(y)$ замість $\alpha(x)$. Тоді, якщо $u \in L^{p(y)}(G)$, то $\phi_{\alpha(y)}(u) \in L^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}(G)$ і правильні такі твердження:*

1) виконуються оцінки

$$\rho_{p/\alpha}(\phi_{\alpha(y)}(u); G) \le \rho_p(u;G); \tag{25}$$

$$||\phi_{\alpha(y)}(u); L^{q(y)}(G)|| \le C_1 S_{\alpha/p}\big(\rho_p(u;G)\big), \tag{26}$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від u;

2) для всіх $v \in L^{p(y)}(G)$ виконується оцінка

$$\rho_{p/\alpha}\big(\phi_{\alpha(y)}(u) - \phi_{\alpha(y)}(v); G\big) \le C_2\Big(\rho_p(u-v; G_0) +$$

$$+ S_{1/\alpha'}\big(\rho_p(u;G_1) + \rho_p(v;G_1)\big) \cdot S_{1/\alpha}\big(\rho_p(u-v;G_1)\big)\Big), \tag{27}$$

де $G_0 = \{y \in G \mid 0 < \alpha(y) \le 1\}$, $G_1 = \{y \in G \mid 1 < \alpha(y)\}$, $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від u;

3) якщо $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^{p(y)}(G)$, то

$$\phi_{\alpha(y)}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(y)}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{q(y)}(G). \tag{28}$$

Доведення. 1) Зрозуміло, що $\frac{p(y)}{\alpha(y)} \ge 1$ майже для всіх $y \in G$. З оцінок (19) випливає таке: $|\phi_{\alpha(y)}(u)|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}} = |u^+|^{p(y)} \le |u|^{p(y)} \in L^1(G)$. Тому з [33, с. 297] отримаємо включення $\phi_{\alpha(y)}(u) \in L^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}(G)$, а з отриманої нерівності – оцінка (25). Крім того,

$$||\phi_{\alpha(y)}(u); L^{q(y)}(G)|| \le C_3 ||\phi_{\alpha(y)}(u); L^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}(G)|| \le C_3 S_{\alpha/p}\Big(\rho_{p/\alpha}(\phi_{\alpha(y)}(u); G)\Big).$$

Звідси і з (25) випливає нерівність (26).

2) Використовуючи теорему 2.1 [34, с. 2], доводимо, що для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\big| |\eta_1|^{r(y)-2}\eta_1 - |\eta_2|^{r(y)-2}\eta_2 \big| \le C_4(r_0, r^0)(|\eta_1| + |\eta_2|)^{r(y)-1-\beta(y)}|\eta_1 - \eta_2|^{\beta(y)}, \qquad (29)$$

де $r \in L^\infty_+(G)$, $0 \le \beta(y) \le \min\{1, r(y) - 1\}$ майже для всіх $y \in G$, $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від y, η_1, η_2. Нехай тут $r = \alpha + 1$, $\eta_1 = s_1^+$, $\eta_2 = s_2^+$, де $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Отримаємо таке:

$$|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5(s_1^+ + s_2^+)^{\alpha(y)-\beta(y)}|s_1^+ - s_2^+|^{\beta(y)},$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка не залежить від y, s_1, s_2. Використавши оцінки (19), одержимо

$$|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5(|s_1| + |s_2|)^{\alpha(y)-\beta(y)}|s_1 - s_2|^{\beta(y)}, \qquad (30)$$

де $0 \le \beta(y) \le \min\{1, \alpha(y)\}$, $y \in G$.

Нехай спершу $y \in G_0$. Тоді з (30) при $\beta = \alpha$ матимемо виконання такої нерівності: $|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5|s_1 - s_2|^{\alpha(y)}$. Звідси випливає оцінка

$$\rho_{p/\alpha}\big(\phi_{\alpha(y)}(u) - \phi_{\alpha(y)}(v); G_0\big) \le C_6\rho_p(u - v; G_0). \qquad (31)$$

Якщо $y \in G_1$, то з оцінки (30) при $\beta \equiv 1$ випливає правильність такої нерівності: $|\phi_{\alpha(y)}(s_1) - \phi_{\alpha(y)}(s_2)| \le C_5(|s_1| + |s_2|)^{\alpha(y)-1}|s_1 - s_2|$. Тому

$$\rho_{p/\alpha}\big(\phi_{\alpha(y)}(u) - \phi_{\alpha(y)}(v); G_1\big) \le C_7 \int\limits_{G_1} (|u| + |v|)^{\frac{(\alpha(y)-1)p(y)}{\alpha(y)}} |u - v|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}\, dy \le$$

$$\le C_8 ||\, (|u| + |v|)^{\frac{p(y)}{\alpha'(y)}}; L^{\alpha'(y)}(G_1)|| \cdot ||\, |u - v|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}; L^{\alpha(y)}(G_1)|| \le$$

$$\le C_8 S_{1/\alpha'}\Big(\rho_{\alpha'}\big((|u| + |v|)^{\frac{p(y)}{\alpha'(y)}}; G_1\big)\Big) \cdot S_{1/\alpha}\Big(\rho_\alpha\big(|u - v|^{\frac{p(y)}{\alpha(y)}}; G_1\big)\Big) \le$$

$$\le C_9 S_{1/\alpha'}\big(\rho_p(u; G_1) + \rho_p(v; G_1)\big) \cdot S_{1/\alpha}\big(\rho_p(u - v; G_1)\big). \qquad (32)$$

де $\alpha'(y) = \frac{\alpha(y)}{\alpha(y)-1}$, $y \in G_1$. Додавши (32) до (31), отримаємо (27).

3) Збіжність (28) відразу випливає з оцінки (27). □

Лема 3. *Нехай $p \in L^\infty_+(\Omega)$ та $\theta \in \mathcal{ML}(\Omega \times \mathbb{R})$; майже для всіх $x \in \Omega$ функція $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \theta(x, \xi) \in \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною; існує таке число $M > 0$, що майже для всіх $x \in \Omega$ і для всіх $\zeta, \eta, \xi \in \mathbb{R}$ виконуються оцінки*

$$|\theta(x, \zeta) - \theta(x, \eta)| \le M|\zeta - \eta|, \qquad |\theta_\xi(x, \xi)| \le M. \qquad (33)$$

Тоді, якщо $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то $\theta(x, u), \big(\theta(x, u)\big)_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і, крім того,

$$\big(\theta(x, u)\big)_t = \theta_\xi(x, u)\, u_t\,. \qquad (34)$$

Доведення. Оскільки $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то існує послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{Q_{0,T}})$ така, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ та $u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_t$ сильно в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і майже скрізь в $Q_{0,T}$. Зрозуміло, що для $(x, t) \in Q_{0,T}$ і $m \in \mathbb{N}$ правильна рівність

$$\big(\theta(x, u^m(x, t))\big)_t = \lim_{h\to 0} \frac{\theta(x, u^m(x, t + h)) - \theta(x, u^m(x, t))}{u^m(x, t + h) - u^m(x, t)} \, \frac{u^m(x, t + h) - u^m(x, t)}{h} =$$

$$= \theta_\xi(x, u^m(x, t))\, u_t^m(x, t).$$

Крім того, $|\theta(x,u^m)-\theta(x,u)| \le M|u^m-u|$, а тому $\theta(x,u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta(x,u)$ сильно в просторі $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, зокрема, $\theta(x,u)\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$.

Розглянемо вираз $\theta_\xi(x,u^m)u_t^m - \theta_\xi(x,u)u_t = A_m + B_m$, де

$$A_m = \theta_\xi(x,u^m)(u_t^m - u_t), \quad B_m = (\theta_\xi(x,u^m)-\theta_\xi(x,u))u_t.$$

Зрозуміло, що $|A_m|^{p(x)} \le M^{p(x)}|u_t^m - u_t|^{p(x)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^1(Q_{0,T})$. Тому $A_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$. Крім того, $|B_m|^{p(x)} \le (2M|u_t|)^{p(x)} \in L^1(Q_{0,T})$ і $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Тому $B_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$. Отже, $\theta_\xi(x,u^m)u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \theta_\xi(x,u)u_t$ сильно в просторі $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, зокрема $\theta_\xi(x,u)u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$.

Доведемо тепер (34). Нехай $\varphi\in C_0^\infty(Q_{0,T})$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \theta_\xi(x,u)u_t\,\varphi\,dxdt = \lim_{m\to\infty}\int\limits_{Q_{0,T}} \theta_\xi(x,u^m)u_t^m\,\varphi\,dxdt = \lim_{m\to\infty}\int\limits_{Q_{0,T}} \big(\theta(x,u^m)\big)_t\,\varphi\,dxdt =$$

$$= -\lim_{m\to\infty}\int\limits_{Q_{0,T}} \theta(x,u^m)\,\varphi_t\,dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \theta(x,u)\,\varphi_t\,dxdt.$$

Отже, в сенсі простору розподілів $\mathcal{D}^*(Q_{0,T})$ матимемо (34). □

Зауважимо, що лема 3 узагальнює результати леми 3 [35, с. 18], де було розглянуто випадок функції θ, яка не залежала від x.

Наслідок 1. *Нехай $I=[a,b]$, або $I=[a,+\infty)$, або $I=(-\infty,b]$, де виконується умова $-\infty<a<b<+\infty$. Припустимо також, що $p\in L_+^\infty(\Omega)$; $\theta\in\mathcal{ML}(\Omega\times I)$; майже для всіх $x\in\Omega$ функція $I\ni\xi\mapsto\theta(x,\xi)\in\mathbb{R}$ є неперервно диференційовною; існує таке число $M>0$, що майже для всіх $x\in\Omega$ і для всіх $\zeta,\eta,\xi\in I$ виконуються оцінки (33). Тоді, якщо $u,u_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $u(x,t)\in I$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$, то $\theta(x,u),\big(\theta(x,u)\big)_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і правильна формула (34).*

Доведення. Розглянемо лише випадок $I=(-\infty,b]$. Ідею доведення запозичимо з [36, с. 98]. Продовжимо функцію θ поза I так:

$$\Theta(x,\xi)=\begin{cases}\theta(x,\xi), & \xi\le b,\\ \theta_\xi(x,b)\xi+\theta(x,b)-\theta_\xi(x,b)b, & \xi>b,\end{cases}\qquad x\in\Omega.$$

Тоді Θ задовольняє всі умови леми 3 і, крім того, $\Theta(x,u(x,t))=\theta(x,u(x,t))$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$. Звідси і випливає доведення твердження нашого наслідку. □

Лема 4. *Нехай $p\in L_+^\infty(\Omega)$, $\theta\in\mathcal{ML}(\Omega\times\mathbb{R})$, $N\in\mathbb{N}$, $\xi_1,\dots,\xi_N\in\mathbb{R}$; майже для всіх $x\in\Omega$ функція $\mathbb{R}\ni\xi\mapsto\theta(x,\xi)\in\mathbb{R}$ є неперервною, а функція $\mathbb{R}\setminus\{\xi_1,\dots,\xi_N\}\ni\xi\mapsto\theta(x,\xi)\in\mathbb{R}$ є диференційовною; майже для всіх $x\in\Omega$, для всіх $\zeta,\eta\in\mathbb{R}$ та для всіх $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\xi_1,\dots,\xi_N\}$ виконуються (33). Тоді, якщо $u,u_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то $\theta(x,u),\big(\theta(x,u)\big)_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ і правильна формула (34).*

Доведення. Розглянемо лише випадок $N=1$, $\xi_1=0$. Ідею доведення запозичимо з [36, с. 100]. Зрозуміло, що правильна формула

$$\theta(x,u)=\theta(x,u^+)+\theta(x,-u^-)-\theta(x,0). \tag{35}$$

Оскільки $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T}) \subset L^{p_0}(Q_{0,T})$, то ми зазначали, що $(u^{\pm})_t \in L^{p_0}(Q_{0,T})$ і виконується формула $(u^{\pm})_t = \pm\widetilde{\chi}(u)u_t$, де $\widetilde{\chi}$ взято з (21). Тому з наслідку 1 матимемо виконання формули типу (34) для кожного доданка в (35). Тому (34) правильна в сенсі розподілів. Включення $\big(\theta(x,u)\big)_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ випливає з (33_2), (34). $\square$

Лема 5. *Нехай $\beta \in \mathcal{MLB}_+(\Omega)$, $\phi_{\beta(x)}$ – функція, визначена в (18) з β замість α,*

$$\chi_k(s) = \begin{cases} 1, & s > \dfrac{1}{k}, \\ 0, & s \le \dfrac{1}{k}, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Тоді, якщо $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$ та $v, v_t \in L^1(Q_{0,T})$, то виконується рівність

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \chi_k(u)\,\beta(x)\,\phi_{\beta(x)-1}(u)u_t\,v\,dxdt =$$
$$= \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\beta(x)}(u)\,v\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\beta(x)}(u)\,v_t\,dxdt. \tag{37}$$

Доведення. Нехай

$$\phi_{\beta(x),k}(s) = \begin{cases} k^{\beta(x)}, & s \ge k, \\ s^{\beta(x)}, & \dfrac{1}{k} < s < k, \\ \dfrac{1}{k^{\beta(x)}}, & s \le \dfrac{1}{k}, \end{cases} \quad \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(s) = \begin{cases} \beta(x)\,s^{\beta(x)-1}, & \dfrac{1}{k} < s < k, \\ 0, & s \le \dfrac{1}{k} \text{ або } s \ge k, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}_2$, $x \in \Omega$. Зрозуміло, що $\phi_{\beta(x),k}(s) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\beta(x)}(s)$ для $s \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Крім того, для $k \in \mathbb{N}_2$ та $x \in \Omega$ функція $s \mapsto \phi_{\beta(x),k}(s)$ задовольняє умову Ліпшиця на $\mathbb{R}$ і є недиференційовною лише в точках $s = \frac{1}{k}$ і $s = k$, де $\frac{\partial}{\partial s}\phi_{\beta(x),k}(s) = \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(s)$ при $s \ne \frac{1}{k}$ і $s \ne k$. Тому з леми 4 випливає, що

$$\big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t = \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(u)u_t \quad \text{майже всюди на} \quad Q_{0,T}. \tag{38}$$

Отже, $\phi_{\beta(x),k}(u), \big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$. Тоді з пункту *(ii)* леми 1 з $z = \phi_{\beta(x),k}(u)$, $w = v$ матимемо рівність (22) у вигляді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t\,v\,dxdt = \int\limits_{\Omega} \phi_{\beta(x),k}(u)\,v\,dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\beta(x),k}(u)\,v_t\,dxdt. \tag{39}$$

Нехай $M = \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_{0,T}}} |u(x,t)|$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \ge \max\{2, M\}$. Оскільки $|u| \le M \le k_0 \le k$, то з (38) отримаємо $\big(\phi_{\beta(x),k}(u)\big)_t = \widetilde{\xi}_{\beta(x),k}(u)u_t = \chi_k(u)\,\beta(x)\,\phi_{\beta(x)-1}(u)u_t$ при $k \ge k_0$. З оцінки $|\phi_{\beta(x),k}(u(x,t))| \le M^{\beta(x)}$ $\forall\ (x,t) \in \overline{Q_{0,T}}$ і теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (теорема 6 [33, с. 302]) випливає, що

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\beta(x),k}(u)\,v\,dx = \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\beta(x)}(u)\,v\,dx \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{і} \quad t = T,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{Q_{0,T}}\phi_{\beta(x),k}(u)\,v_t\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}}\phi_{\beta(x)}(u)\,v_t\,dxdt.$$

Звідси випливає існування границі справа в (39) при $k\to\infty$, а тому і границі зліва в (39). Отже, виконується (37) і лему доведено. □

Твердження 3. *(Теорема Обена, див.* [37] *і* [38, с. 393]*). Якщо $s,h>1$ – деякі числа, $\mathcal{W},\mathcal{L},\mathcal{B}$ – банахові простори, $\mathcal{W}\overset{K}{\subset}\mathcal{L}\circlearrowleft\mathcal{B}$, то*

$$\{u\in L^s(0,T;\mathcal{W})\ \mid\ u_t\in L^h(0,T;\mathcal{B})\}\overset{K}{\subset}L^s(0,T;\mathcal{L})\cap C([0,T];\mathcal{B}).$$

Лема 6. *Якщо $p\in\mathcal{ML}(\Omega)$, $1\le p_0\le p(x)\le p^0<+\infty$ майже для всіх $x\in\Omega$, $z,z_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, то виконується оцінка*

$$\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau)|^{p(x)}\,dx\le C_{10}\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[|z(x,t)|^{p(x)}+|z_t(x,t)|^{p(x)}\Big]\,dxdt,\quad \tau\in[0,T],\tag{40}$$

де $C_{10}>0$ – стала, яка не залежить від z, τ.

Доведення. Доведемо (40) лише при $p_0>1,\tau>0$. Оскільки $z\in W^{1,p_0}(0,T;L^{p_0}(\Omega))$, то з твердження 1 випливає, що $z(\tau)-z(s)=\int_s^\tau z_t(t)\,dt$, $0\le s<\tau\le T$. Тому

$$\int\limits_{\Omega}|z(x,\tau)|^{p(x)}\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big|z(x,s)+\int\limits_s^\tau z_t(x,t)\,dt\Big|^{p(x)}\,dx\le C_{11}(p)\Big(\int\limits_{\Omega}|z(s)|^{p(x)}\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_s^\tau z_t(t)\,dt\Big|^{p(x)}dx\Big)\le C_{11}(p)\Big(\int\limits_{\Omega}|z(s)|^{p(x)}dx+\int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_s^\tau dt\Big|^{p(x)-1}\times$$
$$\times\Big|\int\limits_s^\tau|z_t(t)|^{p(x)}dt\Big|dx\Big)=C_{12}(p,T)\Big(\int\limits_{\Omega}|z(s)|^{p(x)}\,dx+\int\limits_{\Omega}\int\limits_s^\tau|z_t(t)|^{p(x)}\,dtdx\Big).\tag{41}$$

Зінтегрувавши (41) за s після нескладних перетворень, отримаємо (40). □

Використаємо ці твердження для доведення таких теорем.

Теорема 2. *Нехай $\alpha\in L^\infty_+(\Omega)$, $\phi_{\alpha(x)}$ – функція з (18). Тоді правильні твердження:*

1) якщо $u\in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, то $\phi_{\alpha(x)}(u),\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\in L^\infty(Q_{0,T})$ і

$$\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t=\alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)\,u_t;\tag{42}$$

2) якщо $u,u_t\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, де $p\in L^\infty_+(\Omega)$ і $p(x)\ge\alpha(x)$ майже для всіх $x\in\Omega$, то $\phi_{\alpha(x)}(u),\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\in L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T})$, виконується рівність (42) і оцінка

$$\rho_{p/\alpha}\Big(\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t;Q_{0,T}\Big)\le C_{13}S_{1/\alpha'}\Big(\rho_p(u;Q_{0,T})\Big)S_{1/\alpha}\Big(\rho_p(u_t;Q_{0,T})\Big),\tag{43}$$

де $C_{13}>0$ – стала, яка не залежить від u.

Доведення. Доведемо пункт 1. Нехай $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$. Якщо $v, v_t \in C(\overline{Q_{0,T}})$, функцію χ_k взято з (36), $k \in \mathbb{N}$, то $|\chi_k(u)\,\alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v| \le C_{14}$, де $C_{14} > 0$ – стала, яка не залежить від k, x, t. Тому з теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла випливає, що

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} \chi_k(u)\,\alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\;dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\;dxdt.$$

Тоді з рівності (37), записаної для $\beta = \alpha > 1$, отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\;dxdt = \int\limits_{\Omega_t} \phi_{\alpha(x)}(u)\,v\;dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\alpha(x)}(u)\,v_t\;dxdt. \qquad (44)$$

Приймаючи в (44) $v \in C_0^\infty(Q_{0,T})$, одержимо (тут $\alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, бо $\alpha_0 > 1$)

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\;dxdt = -\int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\alpha(x)}(u)\,v_t\;dxdt.$$

Отже, згідно з означенням похідної функції в сенсі Соболєва маємо виконання (42).

Оскільки $\alpha_0 > 1$, то з (18) матимемо включення $\phi_{\alpha(x)} \in L^\infty(Q_{0,T})$, а з (42) – включення $\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$.

Доведемо пункт 2. Нехай $u \in U := \{u \in L^{p(x)}(Q_{0,T}) \mid u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})\}$. Зрозуміло, що $C^1([0,T];C^1(\overline{\Omega})) \overline{\circlearrowright} W^{1,p^0}(0,T;L^{p(x)}(\Omega)) \overline{\circlearrowright} U \overline{\circlearrowright} W^{1,p_0}(0,T;L^{p(x)}(\Omega))$, а тому існує послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{Q_{0,T}})$ така, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$, $u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_t$ сильно в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $C([0,T];L^{p(x)}(\Omega))$.

Нехай $v, v_t \in C(\overline{Q_{0,T}})$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ з (44) отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\,\phi_{\alpha(x)-1}(u^m)u_t^m\,v\;dxdt = \int\limits_{\Omega} \phi_{\alpha(x)}(u^m)\,v\;dx\Big|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{\alpha(x)}(u^m)\,v_t\;dxdt. \quad (45)$$

Оскільки $1 < \alpha(x) \le p(x)$, то $\frac{p(x)}{\alpha(x)-1} > 1$, $x \in \Omega$. Тоді на підставі пункту 3 леми 2 для $G = Q_{0,T}$ і з $\alpha - 1$ замість α та $q = \frac{p}{\alpha-1}$ матимемо, що

$$\phi_{\alpha(x)-1}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)-1}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)-1}}(Q_{0,T}).$$

Зрозуміло, що $[L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)-1}}(Q_{0,T})]^* \cong L^{\frac{p(x)}{p(x)-(\alpha(x)-1)}}(Q_{0,T})$. Оскільки $p(x) \ge (\alpha(x)-1)+1$, то $p(x) \ge \frac{p(x)}{p(x)-(\alpha(x)-1)}$, $x \in \Omega$. Тому з вибору $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ випливає, що

$$u_t^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_t \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{p(x)-(\alpha(x)-1)}}(Q_{0,T}).$$

Тоді з леми 5.2 [1, с. 19] матимемо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u^m)u_t^m\,v\;dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\,v\;dxdt \qquad (46)$$

і $\alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \in L^1(Q_{0,T})$. На підставі пункту 3 леми 2 для $q = \frac{p}{\alpha}$ та $G = \Omega$, $G = Q_{0,T}$, відповідно, отримаємо, що

$$\phi_{\alpha(x)}(u^m(t)) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)}(u(t)) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(\Omega) \quad \text{для} \quad t=0 \quad \text{та} \quad t=T, \tag{47}$$

$$\phi_{\alpha(x)}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T}). \tag{48}$$

Спрямувавши в (45) $m\to\infty$ і використавши (46)-(48), одержимо рівність (44). Далі як і для доведення першого пункту цієї теореми доводимо правильність (42).

З леми 2 матимемо, що $\phi_{\alpha(x)}(u) \in L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T})$. З (42), (19) і нерівності Юнга для $\alpha'(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}, \alpha(x) > 1$ одержимо, що

$$\left|\left(\phi_{\alpha(x)}(u)\right)_t\right|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} \le \alpha(x)^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}|u|^{\frac{p(x)}{\alpha'(x)}}|u_t|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} \le C_{15}(|u|^{p(x)} + |u_t|^{p(x)}) \in L^1(Q_{0,T}).$$

Тому $\left(\phi_{\alpha(x)}(u)\right)_t \in L^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}(Q_{0,T})$.

З (42) і узагальненої нерівності Гельдера для $\alpha'(x), \alpha(x)$ матимемо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|\left(\phi_{\alpha(x)}(u)\right)_t\right|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} dxdt \le \int\limits_{Q_{0,T}} \alpha(x)^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}|u|^{\frac{p(x)}{\alpha'(x)}}|u_t|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}} dxdt \le$$

$$\le C_{16}||\,|u|^{\frac{p(x)}{\alpha'(x)}}; L^{\alpha'(x)}(Q_{0,T})|| \cdot ||\,|u_t|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}; L^{\alpha(x)}(Q_{0,T})|| \le$$

$$\le C_{17}S_{1/\alpha'}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u|^{p(x)}\,dxdt\Big)S_{1/\alpha}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u_t|^{p(x)}\,dxdt\Big),$$

звідки і випливає (43) та доведення пункту 2 нашої теореми. Теорему 2 доведено. $\square$

Теорема 3. *Нехай* $r \in \mathcal{MLB}_+(\Omega)$, $\phi_{r(x)-2}$ *– функція, визначена в (18) з* $r-2$ *замість* α. *Тоді правильні такі твердження.*

1) Якщо $r_0 > 1$, *то формула*

$$\left(|u|^{r(x)}\right)_t = r(x)\phi_{r(x)-2}(u)u\,u_t \tag{49}$$

правильна при виконанні однієї з таких умов:
i) $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, *і тоді* $|u|^{r(x)}, \left(|u|^{r(x)}\right)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$;
ii) $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ *та* $p(x) \ge r(x)$ *для* $x \in \Omega$, *і тоді* $|u|^{r(x)}, \left(|u|^{r(x)}\right)_t \in L^{\frac{p(x)}{r(x)}}(Q_{0,T})$.

2) Якщо $r_0 > 2$, *то формула*

$$\left(|u|^{r(x)-2}u\right)_t = (r(x)-1)\phi_{r(x)-2}(u)\,u_t \tag{50}$$

правильна при виконанні однієї з таких умов:
i) $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, *і тоді* $|u|^{r(x)-2}u, \left(|u|^{r(x)-2}u\right)_t \in L^\infty(Q_{0,T})$;
ii) $u, u_t \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ *та* $p(x) \ge r(x)-1$ *для* $x \in \Omega$, *і тоді виконуються включення* $|u|^{r(x)-2}u, \left(|u|^{r(x)-2}u\right)_t \in L^{\frac{p(x)}{r(x)-1}}(Q_{0,T})$.

Доведення. цієї теореми відразу ж випливає з теореми 2 і таких рівностей:

$$|s|^{r(x)}=\phi_{r(x)}(s)+\phi_{r(x)}(-s), \quad |s|^{r(x)-2}s=\phi_{r(x)-1}(s)-\phi_{r(x)-1}(-s), \quad x\in\Omega, \quad s\in\mathbb{R}. \ \square$$

$\square$

Зауваження 1. Оскільки $\phi_{r(x)-2}(u)=|u|^{r(x)-2}$ при $u>0$, то часто (щоб не вводити додаткових позначень) формули (49) і (50) використовують у такому вигляді:

$$\big(|u|^{r(x)}\big)_t=r(x)|u|^{r(x)-2}u\,u_t\,, \qquad \big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t=(r(x)-1)|u|^{r(x)-2}u_t\,. \tag{51}$$

У цьому випадку вважають праві частини цих рівностей такими, що дорівнюють нулю на множині
$E=\{(x,t)\in Q_{0,T}\mid u(x,t)=0\}$.

Теорема 4. *Нехай $\alpha\in\mathcal{ML}(\Omega)$, $\frac{1}{2}<\alpha_0\le\alpha(x)\le\alpha^0\le 1$ майже для всіх $x\in\Omega$, $\phi_{\alpha(x)}$ – функція з (18). Тоді правильні такі твердження.*

1. *Якщо $u\in C^2(\overline{Q_{0,T}})$, то $\phi_{\alpha(x)}(u)\in L^\infty(Q_{0,T})$, $\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\in L^2(Q_{0,T})$. Крім того, виконується (42).*
2. *Якщо $u,u_t,u_{tt}\in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, де $p\in L^\infty_+(\Omega)$ та $p(x)\ge 2\alpha(x)$ майже для всіх $x\in\Omega$, то $\phi_{\alpha(x)}(u)\in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$. Крім того, виконується (42) і оцінки*

$$||\phi_{\alpha(x)}(u);L^2(Q_{0,T})||\le C_{18}S_{\alpha/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T})\big), \tag{52}$$

$$||\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t;L^2(Q_{0,T})||\le C_{19}S_{\alpha/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T})+\rho_p(u_t;Q_{0,T})+\rho_p(u_{tt};Q_{0,T})\big), \tag{53}$$

де $C_{18},C_{19}>0$ – сталі, які не залежать від u.

Доведення. Доведемо пункт 1. Нехай $u\in C^2(\overline{Q_{0,T}})$. Взявши в рівності (37) $\beta=2\alpha-1>0$ і $v=u_t$, що законно, бо $u_t,u_{tt}\in L^1(Q_{0,T})$, отримаємо, що

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{Q_{0,T}} f_k\,dxdt=\int\limits_{\Omega_t}\phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_t\,dx\Big|_{t=0}^{t=T}-\int\limits_{Q_{0,T}}\phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_{tt}\,dxdt, \tag{54}$$

де $f_k=\chi_k(u)(2\alpha(x)-1)\phi_{2\alpha(x)-2}(u)|u_t|^2$, χ_k взято з (36), $k\in\mathbb{N}$. Зрозуміло, що

$$f_k(x,t)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}f(x,t)\quad\text{для}\quad(x,t)\in Q_{0,T}, \tag{55}$$

де $f=(2\alpha(x)-1)\phi_{2\alpha(x)-2}(u)|u_t|^2=(2\alpha(x)-1)|\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t|^2$. З існування границі (54) випливає, що існує стала $C_{20}>0$ така, що для всіх $k\in\mathbb{N}$ правильна оцінка $\int_{Q_{0,T}}f_k\,dxdt\le C_{20}$. Очевидно, що $f_{k_1}\le f_{k_2}$ при $k_1\le k_2$. Тому з теореми Леві про монотонну збіжність (теорема 7 [33, с. 303]) та збіжності (55) матимемо, що $f\in L^1(Q_{0,T})$ (а тому $\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t\in L^2(Q_{0,T})$) і

$$\int\limits_{Q_{0,T}} f_k\,dxdt\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{Q_{0,T}} f\,dxdt. \tag{56}$$

Тоді з (54) отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}(2\alpha(x)-1)|\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t|^2\,dxdt=\int\limits_{\Omega_t}\phi_{2\alpha(x)-1}(u)u_t\,dx\Big|_{t=0}^{t=T}-$$

$$- \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{2\alpha(x)-1}(u) u_{tt}\, dxdt. \qquad (57)$$

З (56) також одержимо збіжність

$$||\chi_k(u)\sqrt{2\alpha-1}\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t; L^2(Q_{0,T})|| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} ||\sqrt{2\alpha-1}\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t; L^2(Q_{0,T})||. \qquad (58)$$

Тому, використавши (55), можна довести, що

$$\chi_k(u)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_{0,T}). \qquad (59)$$

Нехай в (37) $\beta = \alpha$, $v \in L^2(Q_{0,T})$, $v_t \in L^1(Q_{0,T})$. Використавши (59), отримаємо (44). Далі як і при доведенні теореми 2 одержимо (42). Тому матимемо включення $(\phi_{\alpha(x)}(u))_t \in L^2(Q_{0,T})$, а з вигляду $\phi_{\alpha(x)}$ – включення $\phi_{\alpha(x)}(u) \in L^\infty(Q_{0,T})$. Пункт 1 доведено.

Доведемо пункт 2. Перш за все доведемо (52) і (53) для $u \in C^2(\overline{Q_{0,T}})$. Оскільки $p \geq 2\alpha$, то $2 \leq \frac{p}{\alpha}$ і з оцінки (26) для $G = Q_{0,T}$ і $q \equiv 2$ одержимо (52). Використавши рівність (42), яка виконується згідно з вже доведеним, з (57) одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|\big(\phi_{\alpha(x)}(u)\big)_t\right|^2 dxdt \leq \frac{|\alpha^0|^2}{2\alpha_0 - 1}\Big(\int\limits_{\Omega_0} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_t|\, dx + \int\limits_{\Omega_T} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_t|\, dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_{0,T}} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_{tt}|\, dxdt\Big). \qquad (60)$$

Оцінимо наявні тут вирази. Для всіх $r \in L^\infty_+(\Omega)$ матимемо, що

$$J_1 = \int\limits_{\Omega_0} \phi_{2\alpha(x)-1}(u)|u_t|\, dx \leq ||\phi_{2\alpha(x)-1}(u(0)); L^{r'(x)}(\Omega)|| \cdot ||u_t(0); L^{r(x)}(\Omega)||.$$

Оскільки $p \geq 2\alpha > 1$, то при $r = 2\alpha$ маємо такі оцінки: $1 < r \leq p$, $2\alpha - 1 < p$ та $1 < r' = \frac{r}{r-1} = \frac{r}{2\alpha-1} \leq \frac{p}{2\alpha-1}$. Тому з оцінки (26) при $G = \Omega$ і $q = r'$ одержимо, що $||\phi_{2\alpha(x)-1}(u(0)); L^{r'(x)}(\Omega)|| \leq C_{21}S_{(2\alpha-1)/p}(\rho_p(u(0);\Omega))$. Крім того, з твердження 2 отримаємо таке: $||u_t(0); L^{r(x)}(\Omega)|| \leq C_{22}||u_t(0); L^{p(x)}(\Omega)|| \leq C_{22}S_{1/p}(\rho_p(u_t(0);\Omega))$. Тому з (40) і очевидної рівності $S_a(z)S_b(z) = S_{a+b}(z)$, $a, b, z \geq 0$ отримаємо, що

$$J_1 \leq C_{23}S_{(2\alpha-1)/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u(0)|^{p(x)}\, dx\Big) S_{1/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_t(0)|^{p(x)}\, dx\Big) \leq$$
$$\leq C_{24}S_{2\alpha/p}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|u(x,t)|^{p(x)} + |u_t(x,t)|^{p(x)} + |u_{tt}(x,t)|^{p(x)}\Big]\, dxdt\Big),$$

де $C_{24} > 0$ – стала, яка не залежить від u. Аналогічну оцінку зробимо для другого і третього інтегралів у правій частині нерівності (60) і з (60) отримаємо (53).

Нехай тепер $u, u_t, u_{tt} \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, $p \geq 2\alpha$, $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^2(\overline{Q_{0,T}})$ – послідовність така, що $u^\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u$, $u^\ell_t \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u_t$ $u^\ell_{tt} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u_{tt}$ сильно в $L^{p(x)}(Q_{0,T})$. З (52), (53) одержимо обмеженість послідовності $\{\phi_{\alpha(x)}(u^\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ в просторі $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$. Тому існує підпослідовність $\{u^{\ell_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ така, що

$$\phi_{\alpha(x)}(u^{\ell_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{слабко в} \quad W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Тоді, зокрема,

$$\alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u^{\ell_k})u_t^{\ell_k} = \big(\phi_{\alpha(x)}(u^{\ell_k})\big)_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}).$$

Також з вибору послідовності $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ матимемо (можливо у разі переходу до нової підпослідовності) збіжності

$$u^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad u_t^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_t, \quad \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u^{\ell_k})u_t^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha(x)\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t$$

майже скрізь в $Q_{0,T}$. Тому $\chi = \phi_{\alpha(x)}(u)$ і $\zeta = \alpha\,\phi_{\alpha(x)-1}(u)u_t$. Отже, виконується (44) з $v \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, а тому правильна рівність (42). Використовуючи лему 5.3 [1, с. 20], з (52), (53), записаних для u^{ℓ_k}, одержимо (52), (53) для нашого u. □

Використавши теорему 4, аналогічно як теорему 3 (див. також зауваження 1) доводимо таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $r \in \mathcal{MLB}_+(\Omega)$. Тоді правильні такі твердження.*

1. Якщо $\frac{1}{2} < r_0 \le r^0 \le 1$, то формула (49) правильна у разі виконання однієї з таких умов:

i) $u \in C^2(\overline{Q_{0,T}})$, і тоді $|u|^{r(x)} \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\big(|u|^{r(x)}\big)_t \in L^2(Q_{0,T})$;

ii) $u, u_t, u_{tt} \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $p(x) \ge 2r(x)$ майже для всіх $x \in \Omega$, і тоді правильні включення $|u|^{r(x)} \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ та оцінка

$$||\,|u|^{r(x)}; W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))|| \le C_{25}S_{r/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T}) + \rho_p(u_t;Q_{0,T}) + \rho_p(u_{tt};Q_{0,T})\big), \quad (61)$$

де $C_{25} > 0$ – стала, яка не залежить від u.

2. Якщо $\frac{3}{2} < r_0 \le r^0 \le 2$, то формула (50) правильна у разі виконання однієї з таких умов:

i) $u \in C^2(\overline{Q_{0,T}})$, і тоді $|u|^{r(x)-2}u \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\big(|u|^{r(x)-2}u\big)_t \in L^2(Q_{0,T})$;

ii) $u, u_t, u_{tt} \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$ та $p(x) \ge 2(r(x)-1)$ майже для всіх $x \in \Omega$, і тоді правильні включення $|u|^{r(x)-2}u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ та оцінка

$$||\,|u|^{r(x)-2}u; W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))|| \le$$

$$\le C_{26}S_{(r-1)/p}\big(\rho_p(u;Q_{0,T}) + \rho_p(u_t;Q_{0,T}) + \rho_p(u_{tt};Q_{0,T})\big), \quad (62)$$

де $C_{26} > 0$ – стала, яка не залежить від u.

Зауваження 2. Як і в зауваженні 1 зазначимо, що за умов теореми 5 формули (49) і (50) вживатимемо у вигляді (51).

Лема 7. *Якщо $a > 0$, то визначений рівністю*

$$\langle Av, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega a(\nabla v(x), \nabla w(x))\,dx, \quad v, w \in H_0^1(\Omega), \quad (63)$$

оператор $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ є лінійним обмеженим неперервним і монотонним.

Доведення леми 7 опустимо.

Лема 8. *Якщо виконуються умови **(Q)** і **(G)**, то визначений в (4) оператор Немицького $G : L^{q(x)}(Q_{0,T}) \to L^{q'(x)}(Q_{0,T})$ є обмеженим неперервним і монотонним.*

Доведення. Обмеженість і неперервність G випливає з [40]. Монотонність оператора G випливає з такої числової нерівності (див. теорему 2.2 [34, с. 3]):

$$\forall\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}: \quad (|\xi_1|^{r-2}\xi_1 - |\xi_2|^{r-2}\xi_2)(\xi_1 - \xi_2) \geq C_{27}(r)(|\xi_1| + |\xi_2|)^{r-\beta}|\xi_1 - \xi_2|^{\beta}, \quad (64)$$

де $r > 1$, $\max\{r, 2\} \leq \beta < \infty$, $C_{27}(r) = \min\{2^{2-r}, (r-1)2^{2-r}\} > 0$. Лему доведено. □

Лема 9. *Якщо виконується умова* ***(E)****, то визначений в (5) інтегральний оператор $E : L^r(Q_{0,T}) \to L^r(Q_{0,T})$, де $r > 1$, є лінійним обмеженим неперервним оператором і задовольняє оцінку*

$$||Eu; L^r(Q_{0,\tau})|| \leq C_{28}||u; L^r(Q_{0,\tau})||, \quad u \in L^r(Q_{0,T}), \quad \tau \in (0, T], \quad (65)$$

де $C_{28} > 0$ – стала, яка не залежить від u, τ.

Доведення. Лінійність нашого оператора очевидна. Доведемо оцінку (65), з якої і випливатимуть інші твердження леми. Продовжимо кожну функцію $u \in L^r(Q_{0,T})$ нулем поза $Q_{0,T}$. Використавши нерівність Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} |(Eu)(x,t)|^r \,dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big|\int\limits_{\Omega} \epsilon(x,t,y)\Big(u(x+y,t) - u(x,t)\Big)\,dy\Big|^r \,dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(\int\limits_{\Omega} |\epsilon(x,t,y)|^{r'}\,dy\Big)^{\frac{r}{r'}} \int\limits_{\Omega} |u(x+y,t) - u(x,t)|^r \,dy\,dxdt \leq$$

$$\leq C_{29} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \int\limits_{\Omega} (|u(x+y,t)|^r + |u(x,t)|^r)\,dy\,dxdt = 2C_{29}|\Omega| \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u(x,t)|^r \,dxdt,$$

де $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $|\Omega|$ – міра Лебега Ω. З цієї оцінки і випливає (65). □

5. Доведення теореми 1. Нехай $\gamma \in [2, 3)$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1$. Тоді $\gamma' \in (\frac{3}{2}, 2]$. У випадку $\gamma = 2$ задача (1)–(3) значно спрощується. Тому нехай далі $\gamma > 2$.

Крок 1. Зробимо заміну $u \rightsquigarrow \mathsf{u}$, де $\mathsf{u} = |u|^{\gamma-2}u$. Тоді $u = |\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}$. Тому (1)–(3) еквівалентна такій задачі:

$$(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})_t - a\,\Delta\mathsf{u} + G(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}) + \phi\big(E(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})\big) = f(x,t), \quad (66)$$

$$\mathsf{u}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad \mathsf{u}|_{t=0} = |u_0|^{\gamma-2}u_0. \quad (67)$$

Для доведення існування розв'язку задачі (66), (67) використаємо метод еліптичної регуляризації. Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо задачу Діріхле-Неймана

$$-\varepsilon\,\mathsf{u}^{\varepsilon}_{tt} + \big(|\mathsf{u}^{\varepsilon}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon}\big)_t - a\,\Delta\mathsf{u}^{\varepsilon} + G(|\mathsf{u}^{\varepsilon}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon}) + \phi\big(E(|\mathsf{u}^{\varepsilon}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon})\big) = f(x,t), \quad (68)$$

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad \mathsf{u}^{\varepsilon}|_{t=0} = |u_0|^{\gamma-2}u_0, \qquad \mathsf{u}^{\varepsilon}_t|_{t=T} = 0. \quad (69)$$

Нехай $U_0(Q_{0,T}) = \{v \in H^1(Q_{0,T}) \;\;|\;\; v|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \;\; v|_{t=0} = 0\}$. Використовуючи умови $\partial\Omega \in C^4$, $2 \leq \gamma < 3$ і $q^0 \leq \gamma$ вибираємо в просторі V досить гладку базу. Тоді для виконання умов теореми 1 методом Гальоркіна доводимо, що існує розв'язок

$\mathsf{u}^\varepsilon \in H^2(Q_{0,T}) \cap W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))$ крайової задачі (68), (69) такий, що $|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, $G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon) \in L^2(Q_{0,T})$, $\phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big) \in L^2(Q_{0,T})$,

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\varepsilon \mathsf{u}^\varepsilon_t v_t - |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon v_t + a(\nabla \mathsf{u}^\varepsilon, \nabla v) + G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)v + \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)v\Big]\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} |\mathsf{u}^\varepsilon(T)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(T)v(T)\, dx = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\, dxdt \qquad \forall\, v \in U_0(Q_{0,T}). \tag{70}$$

Крок 2. Зауважимо таке: оскільки $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$ і $1 < \gamma' \le 2$, то з пункту 1.ii теореми 3 для $p(x) \equiv 2$, $r(x) \equiv \gamma'$ і з зауваження 1 матимемо таке:

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'} \in W^{1,\frac{2}{\gamma'}}(0,T;L^{\frac{2}{\gamma'}}(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\big)_t = \gamma'\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\, \mathsf{u}^\varepsilon_t. \tag{71}$$

Аналогічно з включення $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$ і пункту 1.ii теореми 3 одержимо, що

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^2\big)_t = 2\,\mathsf{u}^\varepsilon\,\mathsf{u}^\varepsilon_t. \tag{72}$$

Крім того, з нерівності Гельдера для показників $\gamma, \gamma' > 1$, умови **(Φ)** та оцінки (65) випливає таке:

$$\Big|\int\limits_{Q_{0,T}} \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)\mathsf{u}^\varepsilon\, dxdt\Big| \le \phi^0 \Big|\Big|E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big); L^\gamma(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot ||\mathsf{u}^\varepsilon; L^{\gamma'}(Q_{0,T})|| \le$$

$$\le C_{30}||\mathsf{u}^\varepsilon; L^{\gamma'}(Q_{0,T})||^{\frac{1}{\gamma-1}+1} = C_{30} \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\, dxdt, \tag{73}$$

де $C_{30} > 0$ – стала, яка не залежить від ε. Нехай в (70) $v = \mathsf{u}^\varepsilon$. Використавши (71), (73), після нескладних перетворень одержимо оцінку

$$\varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2\, dxdt + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|\nabla \mathsf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathsf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'} + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big]\, dxdt \le C_{31}. \tag{74}$$

Тому

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big||\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\Big|^{2(\gamma-1)}\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^2\, dxdt \le C_{32}. \tag{75}$$

З умови **(Φ)**, (65) і (75) випливає, що

$$||\phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big); L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T})|| \le C_{33}||\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon; L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T})|| \le C_{34}. \tag{76}$$

Якщо $q^0 \le \gamma$, то майже для всіх $x \in \Omega$ одержимо таке:

$$\frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1} \ge 2, \qquad \frac{q(x)-1}{q(x)+\gamma-2} + \frac{\gamma-1}{q(x)+\gamma-2} = 1, \qquad 2 \ge \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1} > 1. \tag{77}$$

Тому з оцінок (74) матимемо, що

$$\Big|\Big|G\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big); L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1}}(Q_{0,T})\Big|\Big| \le C_{35} S_{1/\widehat{q}}\Big(S_{\widehat{\widehat{q}}}\Big(\Big|\Big|\mathsf{u}^\varepsilon; L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}(Q_{0,T})\Big|\Big|\Big)\Big) \le C_{36}, \tag{78}$$

де $\widehat{q}(x) = \frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1}$, $\widehat{\widehat{q}}(x) = \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}$, $x \in \Omega$. Тут $C_{31} - C_{36} > 0$ не залежать від ε.

Оцінки (74)–(78) дадуть існування послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ такої, що $\varepsilon_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\varepsilon_j > 0$ для всіх $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{\gamma'}(Q_{0,T}) \cap L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}(Q_{0,T}), \tag{79}$$

$$|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T}), \tag{80}$$

$$G\big(|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon_j}\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_2 \quad \text{слабко в} \quad L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{q(x)-1}}(Q_{0,T}), \tag{81}$$

$$\phi\big(E(|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^{\varepsilon_j})\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_3 \quad \text{слабко в} \quad L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T}), \tag{82}$$

$$\sqrt{\varepsilon_j}\,\mathsf{u}_t^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_4 \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}). \tag{83}$$

Крок 3. Отримаємо додаткові оцінки. Зауважимо таке: оскільки $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^2(Q_{0,T})$ і $\frac{3}{2} < \gamma' \le 2$, то з пункту 2.ii теореми 5 для $r(x) \equiv \frac{\gamma'}{2} + 1$ і $p(x) \equiv 2$ випливає, що

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon\big)_t = \frac{\gamma'}{2}\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}_t^\varepsilon, \tag{84}$$

а з пункту 2.ii теореми 5 для $r(x) \equiv \gamma'$ і $p(x) \equiv 2$ маємо, що

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big)_t = \frac{1}{\gamma-1}\,|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}_t^\varepsilon. \tag{85}$$

Крім того, оскільки $\mathsf{u}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$, то з пункту 1.ii теореми 3 для $r(x) = \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}$, $p(x) \equiv 2$ (згідно з (77) $p(x) \ge r(x) > 1$ для $x \in \Omega$) матимемо таке:

$$|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}},\ \Big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big)_t \in L^{\frac{2(\gamma-1)}{q(x)+\gamma-2}}(Q_{0,T}),$$

$$\Big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big)_t = \frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)-\gamma}{\gamma-1}}\mathsf{u}^\varepsilon\mathsf{u}_t^\varepsilon. \tag{86}$$

Аналогічно ($\mathsf{u}_t^\varepsilon, \mathsf{u}_{x_1}^\varepsilon, \ldots, \mathsf{u}_{x_n}^\varepsilon \in H^1(Q_{0,T})$) з пункту 1.ii теореми 3 одержимо, що

$$|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)), \qquad \big(|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\big)_t = 2\,\mathsf{u}_t^\varepsilon\,\mathsf{u}_{tt}^\varepsilon, \tag{87}$$

$$|\nabla\mathsf{u}^\varepsilon|^2 \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)), \qquad \big(|\nabla\mathsf{u}^\varepsilon|^2\big)_t = 2\,(\nabla\mathsf{u}^\varepsilon, \nabla\mathsf{u}_t^\varepsilon). \tag{88}$$

Зінтегрувавши частинами, що законно згідно з (85), з (70), отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\varepsilon\mathsf{u}_{tt}^\varepsilon v + \big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big)_t v + a(\nabla\mathsf{u}^\varepsilon, \nabla v) +$$

$$+ G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)v + \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)v - fv\Big]\,dxdt = 0, \tag{89}$$

де $v \in U_0(Q_{0,T})$. Звідси одержимо таку рівність в просторі $H^{-1}(\Omega)$:

$$-\varepsilon\mathsf{u}_{tt}^\varepsilon(t) + \big(|\mathsf{u}^\varepsilon(t)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(t)\big)_t + A\mathsf{u}^\varepsilon(t) +$$

$$+ G\big(|\mathsf{u}^\varepsilon(t)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(t)\big) + \phi\big(E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon(t)|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon(t)\big)\big) = f(t), \quad t \in (0,T). \tag{90}$$

Оскільки $\mathsf{u}_t^\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, то можна подіяти рівністю (90) на $\mathsf{u}_t^\varepsilon(t)$. Використавши (85) і зінтегрувавши отриману рівність за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$, матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[-\varepsilon \mathsf{u}_{tt}^\varepsilon \mathsf{u}_t^\varepsilon + \frac{1}{\gamma-1}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 + a(\nabla \mathsf{u}^\varepsilon, \nabla \mathsf{u}_t^\varepsilon) +$$

$$+ G(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\mathsf{u}_t^\varepsilon + \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)\mathsf{u}_t^\varepsilon\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f\mathsf{u}_t^\varepsilon\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{91}$$

Перетворимо наявні тут вирази. Зінтегрувавши частинами (див. (87)) і використавши (69_3), одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} -\varepsilon \mathsf{u}_{tt}^\varepsilon \mathsf{u}_t^\varepsilon\, dxdt = -\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega |\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dx\Big|_{t=0}^{t=T} = -0 + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega |\mathsf{u}_t^\varepsilon(0)|^2\, dx \ge 0.$$

З умови **(Φ)**, нерівностей Гельдера (тут $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-2}{2\gamma} + \frac{1}{2} = 1$), Юнга і (74) маємо:

$$\Big|-\int\limits_{Q_{0,T}} \phi\big(E(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon)\big)\mathsf{u}_t^\varepsilon\, dxdt\Big| \le \phi^0 \int\limits_{Q_{0,T}} \Big|E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big)\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{1-\frac{\gamma'}{2}}\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\, |\mathsf{u}_t^\varepsilon|\, dxdt \le$$

$$\le \phi^0 \Big|\Big|E\big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}\mathsf{u}^\varepsilon\big); L^\gamma(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{1-\frac{\gamma'}{2}}; L^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}_t^\varepsilon; L^2(Q_{0,T})\Big|\Big| \le$$

$$\le C_{37}||\mathsf{u}^\varepsilon; L^{\gamma'}(Q_{0,T})||^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}}; L^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}(Q_{0,T})\Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}_t^\varepsilon; L^2(Q_{0,T})\Big|\Big| =$$

$$= C_{37}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \le \varkappa_1 \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dxdt + C_{38}(\varkappa_1),$$

де $\varkappa_1 > 0$, $C_{38}(\varkappa_1) > 0$ – стала, яка не залежить від ε. З нерівності Юнга (тут знову $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-2}{2\gamma} + \frac{1}{2} = 1$), отримаємо оцінку

$$|f\mathsf{u}_t^\varepsilon| = |f|\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{1-\frac{\gamma'}{2}}\, |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\, |\mathsf{u}_t^\varepsilon| \le C_{39}(\varkappa_2)(|f|^\gamma + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{(1-\frac{\gamma'}{2})\,\frac{2\gamma}{\gamma-2}}) + \varkappa_2|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 =$$

$$= \varkappa_2|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2 + C_{39}(\varkappa_2)(|f|^\gamma + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}),$$

де $\varkappa_2 > 0$, $C_{39}(\varkappa_2) > 0$ – стала, яка не залежить від ε.

Врахувавши ці перетворення і використавши (86) та (88), з (91) матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\Big(\frac{1}{\gamma-1} - \varkappa_1 - \varkappa_2\Big)|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon|^2 + \frac{a}{2}\big(|\nabla \mathsf{u}^\varepsilon|^2\big)_t + \frac{g(x,t)(\gamma-1)}{q(x)+\gamma-2}\Big(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}\Big)_t\Big]\, dxdt \le$$

$$\le C_{38}(\varkappa_1,\varkappa_2)\Big(1 + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|f|^\gamma + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\Big]\, dxdt\Big). \tag{92}$$

Вибравши $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$ малими і зінтегрувавши частинами, звідси отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}_t^\varepsilon|^2\, dxdt \le C_{40}. \tag{93}$$

Тому з (84) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|\left(|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon\right)_t\right|^2 dxdt = \frac{|\gamma'|^2}{4}\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2\, dxdt \le C_{41}. \tag{94}$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left||\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^\varepsilon\right|^2 dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'}\, dxdt \le C_{42}, \tag{95}$$

Нехай $\widehat{\gamma} = \frac{4(\gamma-1)}{3\gamma-4}$. Тоді з припущення $\gamma > 2$ матимемо, що $\widehat{\gamma} \in (1,2)$. Тому з нерівності Юнга для параметрів $\frac{2}{2-\widehat{\gamma}}, \frac{2}{\widehat{\gamma}} > 1$ отримаємо оцінку

$$|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^{\widehat{\gamma}} = |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\widehat{\gamma}(2-\gamma')}{2}}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\frac{\widehat{\gamma}(\gamma'-2)}{2}}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^{\widehat{\gamma}} \le C_{43}|\mathsf{u}^\varepsilon|^{\varkappa} + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2,$$

де $\varkappa = \frac{\widehat{\gamma}(2-\gamma')}{2}\,\frac{2}{2-\widehat{\gamma}} = 2$. Звідси, з (93) і (74) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\mathsf{u}^\varepsilon_t|^{\widehat{\gamma}}\, dxdt \le \int\limits_{Q_{0,T}} \left[C_{43}|\mathsf{u}^\varepsilon|^2 + |\mathsf{u}^\varepsilon|^{\gamma'-2}|\mathsf{u}^\varepsilon_t|^2\right] dxdt \le C_{44}. \tag{96}$$

Тут $C_{40} - C_{44} > 0$ – сталі, які не залежать від ε.

З оцінок (74), (93)–(96) випливає, що

$$|\mathsf{u}^{\varepsilon_j}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_5 \quad \text{слабко в} \quad W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{97}$$

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{слабко в} \quad W^{1,\widehat{\gamma}}(Q_{0,T}). \tag{98}$$

Тому з теореми Релліха-Кондрашова (див. лему 1.28 [1, с. 47]) і з леми 1.18 [1, с. 39] отримаємо, що

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{сильно в} \quad L^{\widehat{\gamma}}(Q_{0,T}) \quad \text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}. \tag{99}$$

Тому $\chi_1 = |\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}$, $\chi_2 = G(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})$, $\chi_5 = |\mathsf{u}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u}$.

З (98) і теореми Обена (твердження 3) матимемо збіжність

$$\mathsf{u}^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{u} \quad \text{в просторі} \quad C([0,T];L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)). \tag{100}$$

Оскільки $\widehat{\gamma} \in (1,2)$, то $\widehat{\gamma} > 1 \ge \gamma' - 1$, тобто $\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1} = \frac{4(\gamma-1)^2}{3\gamma-4} > 1$. Отож, використавши (29), отримаємо оцінку

$$||\,|z_1|^{\gamma'-2}z_1 - |z_2|^{\gamma'-2}z_2; L^{\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1}}(\Omega)|| \le C_{45}||z_1 - z_2; L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)||^{\gamma'-1}, \tag{101}$$

де $C_{45} > 0$ – стала, яка не залежить від $z_1, z_2 \in L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)$. Враховуючи умову **(Φ)**, (100) і (101), доводимо рівність $\chi_3 = \phi\big(E(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})\big)$.

Крок 4. Нехай в (70) $\varepsilon = \varepsilon_j$, $v \in H^1_0(Q_{0,T})$ і спрямуємо $j \to \infty$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left[-|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u}\, v_t + a(\nabla \mathsf{u}, \nabla w) + G(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})v + \phi\big(E(|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u})\big)v - fv\right] dxdt = 0. \tag{102}$$

Зі збіжності (98) і умов (69) випливає, що функція u задовольняє умови (67). Отже, u – розв'язок (66), (67), причому $\mathsf{u} \in W^{1,\widehat{\gamma}}(Q_{0,T}) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C\big([0,T];L^{\widehat{\gamma}}(\Omega)\big) \cap L^{\frac{q(x)+\gamma-2}{\gamma-1}}(Q_{0,T})$, $|\mathsf{u}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u} \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, $|\mathsf{u}|^{\gamma'-2}\mathsf{u} \in L^{2(\gamma-1)}(Q_{0,T})$. Оскільки $\mathsf{u} = |u|^{\gamma-2}u$, то $|\mathsf{u}|^{\frac{\gamma'}{2}-1}\mathsf{u} = |u|^{\frac{\gamma}{2}-1}u$. Отже,

$$|u|^{\frac{\gamma}{2}-1}u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)).$$

З оцінки (101) випливає вкладення

$$u \in C\big([0,T];L^{\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1}}(\Omega)\big) \subset C([0,T];L^2(\Omega)),$$

бо $\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma'-1} = 2 + \frac{4(\gamma-2)(\gamma-\frac{3}{2})}{3\gamma-4} > 2$. Крім того, рівність (102) при нашій заміні відразу перейде в (8). Теорему 1 доведено. $\square$

Список використаної літератури

1. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения — М.: Мир. — 1978. — 336 с.
2. *Briani M., Natalini R., and Russo G.* Implicit-explicit numerical schemes for jump-diffusion processes // Calcolo. — 2007. — Vol. 44, №1. — P. 33–57.
3. *Cifani S., Jakobsen E.R., and Karlsen K.H.* The discontinuous Galerkin method for fractional degenerate convection-diffusion equations // BIT. — 2011. — Vol. 51, №4. — P. 809–844.
4. *Merton R.C.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 125–144.
5. *Kou S.G.* A jump-diffusion model for option pricing // Management Science. — 2002. — Vol. 48. — P. 1086-–1101.
6. *Carr P., Wu L.* Time-changed Levy processes and option pricing // J. of Financial Economics. — 2004. — Vol. 71. — P. 113—141.
7. *Mastroeni L., Matzeu M.* Nonlinear variational inequalities for jump-diffusion processes and irregular obstacles with a financial application // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. — 1998. — Vol. 34, №6. — P. 889–905.
8. *Sun Yu., Shi Yi., and Wu M.* Second order integro-differential parabolic variational inequalities arising from the valuation of American option // J. of Inequal. and Appl. — 2014. — Vol. 2014, №8. — P. 1–14.
9. *Alvarez O., Tourin A.* Viscosity solutions of nonlinear integro-differential equations // Annales de l'I. H. P., Section C. — 1996. — Vol. 13, №3. — P. 293–317.
10. *la Chioma C.* Integro-differential problems arising in pricing derivatives in jump-diffusion markets. — Ph. D. Thesis. — Roma, 2003–2004. — 206 p.
11. *Amadori A.L., Karlsen K.H., la Chioma C.* Nonlinear degenerated integro-partial differential evolution equations related to geometric Levy processes and applications to backward stochastic differential equations // Pure Mathematics. — 2004. — №14. — P. 1–27.
12. *Chipot M., Rougirel A.* On some class of problems with nonlocal source and boundary flux // Adv. Differential Equations. — 2001. — Vol. 6, №9. — P. 1025—1048.
13. *Chipot M., Chang N.-H.* On some model diffusion problems with a nonlocal lower order term // Chin. Ann. Math. — 2003. — Vol. 24, №2. — P. 147–166.
14. *Chipot M., Chang N.-H.* Nonlinear nonlocal evolution problems // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. — 2003. — Vol. 97, №3. — P. 423—445.
15. *Souplet Ph.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source // J. Diff. Equations. — 1999. — Vol. 153. — P. 374–406.

16. *Rougirel A.* Blow-up rate for parabolic problems with nonlocal source and boundary flux // Electronic J. of Diff. Eq. — Vol. 2003, No. 98. — P. 1—18.
17. *Pinasco J.P.* Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents // Nonlinear Analysis. — 2009. — Vol. 71. — P. 1094–1099.
18. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. — 1991. — 41 (116). — P. 592–618.
19. *Evans L.C.* An introduction to stochastic differential equations. Lecture Notes, Department of Math, UC Berkeley. — 139 p.
20. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — К.: Наукова думка, 1968. — 354 с.
21. *Бугрій М.І.* Основи фінансово-кредитного аналізу: Текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2006. — 375 с.
22. *Нікбахт Е., Гроппеллі А.* Фінанси. — К.: Основи, 1993. — 383 с.
23. *Black F., Scholes M.* The pricing of option and corporate liabilities // J. Political Econom. — 1973. — Vol. 72. — P. 637-659.
24. *Papapantoleon A.* An introduction to Levy processes with applications to finance. – Lecture notes. University of Leipzig. — 2005. — 50 p.
25. *Ковтун С.* Узагальнення моделі Блека-Шоулса // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2006. — Вип. 66. — С. 75-87.
26. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст. — К., 2001. — 826 с.
27. *Timsina T.P.* Sensitivities in option pricing models // PhD thesis in Mathematics. — Blacksberg, Virginia, USA, 2007. — 109 p.
28. *Clift S.S.* Linear and non-linear monotone methods for valuing financial options under two-factor, jump-diffusion models // PhD thesis in Computer Science. — Waterloo, Ontario, Canada, 2007. — 144 p.
29. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа: Изд. 2-е. — М., 1973. — 576 с.
30. *Evans L.C.* Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. — Vol. 19. — 662 p.
31. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введения в вариационные неравенства и их приложения — М.: Мир, 1983. — 256 с.
32. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності // Мат. студії. — 2005. — Т. 24, №2. — С. 167–172.
33. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
34. *Byström J.* Sharp Constants for Some Inequalities Connected to the p-Laplace Operator // Jour. of Ineq. in Pure and Appl. Math. — 2005. – Vol. 6, Issue 2. — Article 56.
35. *Бокало Т., Бугрій О.* Деякі формули інтегрування частинами в просторах функцій зі змінним показником нелінійності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2009. — Вип. 71. — С. 13–26.
36. *Михайлов В.П., Гущин А.К.* Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики" — М., 2007. — 144 с.
37. *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. — 1963. — Vol. 256, №24 — P. 5042–5044.
38. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. — 1988. — Vol. 279. — P. 373–394.
39. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976. — 391 с.

40. *Galewski M.* On the continuity of the Nemytskij operator between the spaces $L^{p_1(x)}$ and $L^{p_2(x)}$ // Georgian Math. J. — 2006. — Vol. 13, №2. — P. 261–265.

Стаття: надійшла до редколегії 22.04.2016
прийнята до друку 08.06.2016

ON EXISTENCE IN GENERALIZED SOBOLEV SPACES SOLUTIONS OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING FROM THEORY OF EUROPEAN OPTION

Oleh BUHRII, Mykola BUHRII

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

We consider nonlinear degenerate convection-diffusion equations perturbed by a jump-diffusion operator arising from theory of European option. The initial-boundary value problems for these equation are investigated and the existence theorem for the problems are proved.

Key words: nonlinear parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, Levy jump-diffucion process, European option.