УДК 515.12

ГІПЕРСИМЕТРИЧНІ СТЕПЕНІ І АСИМПТОТИЧНО НУЛЬВИМІРНІ ПРОСТОРИ

Оксана ШУКЕЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Доведено, що функтор гіперсиметричного степеня у категорії Рое власних метричних просторів та грубих відображень зберігає грубі вкладення і асимптотично нульвимірні простори. Крім того, цей функтор можна розглядати і в асимптотичній категорії Дранішнікова. Розглянуто задачі існування грубих вкладень деяких асимптотично нульвимірних просторів та їхніх гіперсиметричних степенів.

Ключові слова: асимптотичний вимір, грубе вкладення, гіперсиметричний степінь.

1. Предметом асимптотичної топології є дослідження "великомасштабних" властивостей метричних просторів і деяких більш загальних структур (грубих множин, грубих топологічних просторів тощо), тобто властивостей в "нескінченності", на відміну від класичної топології, яка вивчає "локальні" властивості.

Основи асимптотичної топології викладено в статті Дранішнікова [4], де, зокрема, наведено низку означень і результатів, потрібних для подальшого викладення.

Аналогом вкладень топологічних просторів в асимптотичній топології є так звані грубі вкладення. Результатам про існування чи неіснування грубих вкладень присвячено багато праць (наприклад, [1, 2, 3]) і такі результати часто мають важливі застосування. Ю (Yu) довів [3], що кожен дискретний метричний простір, який допускає грубе вкладення в гільбертовий простір, задовольняє грубу аксіому Баума-Конна.

У цій статті ми розглядаємо задачу існування грубих вкладень для деяких нульвимірних просторів та їхніх гіперсиметричних степенів. Також запроваджено деякі асимптотично нульвимірні об'єкти асимптотичної топології.

1.1. Термінологія і позначення.

Через $O_\varepsilon(A)$ позначаємо ε-окіл множини A в метричному просторі, $\varepsilon \geqslant 0$. Замкнену кулю радіуса ε з центром в точці x позначають здебільшого $\overline{O}_\varepsilon(x)$, де $x \in X$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Метричний простір (X, d) називаємо *власним*, якщо кожна замкнена куля в X компактна.

Нехай (X, d) і (Y, ρ) — власні метричні простори. Відображення $f : X \to Y$ називаємо (λ, s)-*ліпшицевим* (тут $\lambda > 0,\ s \geqslant 0$), якщо

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\ d(x, y) + s, \qquad x, y \in X.$$

Кажуть, що відображення $f\colon X \to Y$ є *асимптотично ліпшицевим*, якщо воно є (λ, s)-ліпшицевим для деяких λ, s.

Відображення $f\colon X \to Y$ називають *власним*, якщо прообраз кожної компактної множини є компактним. Відображення $f\colon X \to Y$ називають *грубо власним*, якщо прообраз кожної обмеженої множини є обмеженим. Множину в метричному просторі називають *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій кулі. Для підмножини A в метричному просторі (X, d) приймемо $\mathrm{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Нехай $C > 0$. Множину M в метричному просторі X називаємо C-*зв'язною*, якщо для кожних $x, y \in M$ існують $x_0 = x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = y \in M$ такі, що $d(x_i, x_{i-1}) \leqslant C,\ i = 1, ..., n$. Максимальну (щодо включення) C-зв'язну множину називаємо *компонентою C-зв'язності.*

2. Асимптотична категорія. В [4] введено асимптотичну категорію $\mathcal{A}$. Об'єктами цієї категорії є власні метричні простори, а морфізмами — власні асимптотично ліпшицеві відображення.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\exp_n X$ множину $\{A \subset X \mid 1 \leqslant |A| \leqslant n\}$. Метрика d на X породжує метрику Гаусдорфа d_H на $\exp_n X$

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Є. В.Щепін [9] запропонував термін *n-гіперсиметричний степінь* для просторів вигляду $\exp_n X$. В [9] зауважено, що $\exp_n$ — функтор в категорії компактів (компактних гаусдорфових просторів) і неперервних відображень.

Покажемо, що конструкція $\exp_n$ визначає функтор в категорії $\mathcal{A}$. Це випливатиме з тверджень 1, 2, 3.

Твердження 1. *Якщо (X, d) — власний метричний простір, то $(\exp_n X, d_H)$ — теж власний метричний простір.*

Доведення. Нехай $A = \{x_1, ...x_k\} \in \exp_n X$ і $\varepsilon > 0$. Множина $C = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{O}_\varepsilon(x_i)$ є скінченним об'єднанням компактів, тому є компактним простором. Позначимо через $\overline{N}_\varepsilon(A)$ замкнену кулю з центром в точці A в просторі $\exp_n X$

$$\overline{N}_\varepsilon(A) = \{B \in \exp_n X \mid d_H(A, B) \leqslant \varepsilon\} \subseteq \exp_n \overline{O}_\varepsilon(A).$$

Легко бачити, що $\overline{N}_\varepsilon(A)$ є замкненою підмножиною в $\exp_n C$. Оскільки конструкція $\exp_n$ зберігає компактність, то звідси випливає, що підмножина $\overline{N}_\varepsilon(A)$ є компактною як замкнена підмножина в компакті $\exp_n C$.

Для кожного відображення $f : X \to Y$ метричних просторів означимо через $\exp_n f : \exp_n X \to \exp_n Y$ відображення, що діє за формулою

$$\exp_n f(A) = f(A) \ \subset Y, \ A \in \exp_n X.$$

Іншими словами, якщо $A = \{x_1, ..., x_k\} \in \exp_n X$, тоді

$$\exp_n f(A) = \{f(x_1), ..., f(x_k)\} \in \exp_n Y.$$

Твердження 2. *Нехай $f : X \to Y$ — (λ, s)-ліпшицеве відображення. Тоді відображення $\exp_n f$ теж (λ, s)-ліпшицеве.*

Доведення. Необхідно показати, що

$$\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \lambda \cdot d_H(A, B) + s$$

для кожних $A, B \in \exp_n X$.

Нехай $d_H(A, B) = c$. Тоді для кожного $x \in A$ знайдеться $y \in B$ таке, що $d(x, y) \leqslant c$ і для кожного $y \in B$ знайдеться $x \in A$ таке, що $d(y, x) \leqslant c$.

Оскільки відображення f є (λ, s)-ліпшицевим, то для довільного $x \in A$ знайдеться $y \in B$ таке, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda \cdot c + s$, і для довільного $y \in B$ знайдеться $x \in A$ таке, що $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \lambda \cdot c + s$, тобто $f(A) \subset O_\varepsilon(f(B))$ і $f(B) \subset O_\varepsilon(f(A))$, де $\varepsilon = \lambda \cdot c + s$.

Це означає, що

$$\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \lambda \cdot c + s,$$

або

$$\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \lambda \cdot d_H(A, B) + s.$$

Означення 1. *Відображення $f \colon X \to Y$ метричних просторів (X, d), (Y, ρ) називається грубо рівномірним, якщо існує неспадна функція $\varphi \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ така, що $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$ і $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y))$ для всіх $x, y \in X$.*

Відображення f називається *грубим відображенням*, якщо воно є грубо рівномірним і грубо власним.

Твердження 3. *Нехай $f \colon X \to Y$ — власне відображення. Тоді $\exp_n f \colon \exp_n X \to \exp_n Y$ — власне відображення.*

Доведення. Нехай $A \subset \exp_n Y$ — компакт. Тоді множина $K = \bigcup\{C | \ C \in A\}$ також є компакт [5].

Оскільки відображення f власне, то $f^{-1}(K)$ — компакт, а отже, $(\exp_n f)^{-1}(A) \subset \exp_n(f^{-1}(K))$ — компакт як замкнена підмножина компакту.

Твердження 4. *Якщо $f \colon X \to Y$ — грубо власне відображення, то відображення $\exp_n f \colon \exp_n X \to \exp_n Y$ теж грубо власне.*

Доведення. Нехай $G \subset \exp_n Y$ — обмежена множина. Тоді існують $A \in \exp_n Y$ і $r > 0$ такі, що $G \subset N_r(A)$ (куля радіуса r з центром у точці A в $\exp_n Y$). Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $A = \{y_0\}$ для деякої точки $y_0 \in Y$. Тоді

$$(\exp_n f)^{-1}(G) \subset (\exp_n f)^{-1}(N_r(\{y_0\}) = \exp_n(f^{-1}(O_r(y_0)),$$

тобто множина $(\exp_n f)^{-1}(G)$ обмежена. Звідси випливає груба властість відображення $\exp_n f$.

Твердження 5. *Якщо f — грубе відображення, то $\exp_n f$ — грубе відображення.*

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ — грубе відображення. Тоді воно є грубо рівномірним, а отже, існує неспадна функція $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ така, що $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, і маємо

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y)),\ \ x, y \in X.$$

Розглянемо довільні $A, B \in \exp_n X$. Нехай $d_H(A, B) = c$.

Тоді для кожної точки $x \in A$ існує, принаймні, одна точка $y \in B$ така, що $d(x, y) \leqslant c$. Аналогічно, для кожної точки $y \in B$ існує, принаймні, одна точка $x \in A$ така, що $d(y, x) \leqslant c$. Тоді, за означенням грубого відображення, для довільної точки $f(x) \in f(A)$ знайдеться хоча б одна точка $f(y) \in f(B)$ така, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(c)$, і, аналогічно, для довільної точки $f(y) \in f(B)$ знайдеться хоча б одна точка $f(x) \in f(A)$ така, що $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \varphi(c)$.

Тобто, для кожного $\delta > 0$ маємо

$$f(A) \subset O_{\varphi(c)+\delta}(f(B)),\ \ f(B) \subset O_{\varphi(c)+\delta}(f(A)),$$

звідки випливає, що $\rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \varphi(c)$. Враховуючи попереднє твердження 4, одержуємо, що $\exp_n f$ — грубе відображення.

3. Категорія Рое. Одна з важливих категорій в асимптотичній топології введена в [6]. Ми називаємо цю категорію категорією Рое і позначаємо $\mathcal{R}$. Об'єктами категорії $\mathcal{R}$ є власні метричні простори, а морфізмами — грубі відображення. Як наслідок тверджень 1, 4, 5 одержуємо, що конструкція $\exp_n$ визначає функтор в категорії $\mathcal{R}$ (функтор n-гіперсиметричного степеня).

Означення 2. *Відображення $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ називається грубим вкладенням, якщо існують неспадні функції $\varphi_1, \varphi_2\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\to\infty} \varphi_2(t) = \infty$$

і

$$\varphi_1(d(x, y)) \leqslant \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varphi_2(d(x, y))$$

для будь-яких $x, y \in X$.

Твердження 6. *Функтор $\exp_n$ зберігає грубі вкладення.*

Доведення. Достатньо показати, що виконується ліва частина нерівності з означення грубого вкладення. (Твердження 5 забезпечує виконання правої частини нерівності).

Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неспадні функції з означення грубого вкладення і $\rho_H(f(A), f(B)) = \varepsilon$ для деяких $A, B \in \exp_n X$. Це означає, що для довільної точки $x \in A$ існує деяка точка $y \in B$ така, що $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$ і для довільної точки $y \in B$ існує деяка точка $x \in A$ така, що $\rho(f(y), f(x)) \leqslant \varepsilon$.

За означенням грубого вкладення

$$\varphi_1(d(x,y)) \leqslant \ \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon \quad \text{для кожного } x \in A \text{ і для деякого } y \in B,$$

а також

$$\varphi_1(d(y,x)) \leqslant \ \rho(f(y), f(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{для кожного } y \in B \text{ і для деякого } x \in A.$$

Отож, існує $m > 0$ таке, що

$$\varphi_1(m) \leqslant \varepsilon, \text{ де } O_m(A) \supset B \text{ і } O_m(B) \supset A.$$

Оскільки φ_1 — неспадна функція, то $\varphi_1(m) \geqslant \varphi_1(c)$, де

$$c = \min\{m|\ A \subset O_m(B),\ B \subset O_m(A)\}.$$

Отже,

$$\varphi_1(d_H(A,B)) \leqslant \rho_H(f(A), f(B)) \leqslant \varphi_2(d_H(A,B)).$$

Звідси випливає, що $\exp_n f$ є грубим вкладенням.

4. Асимптотичний вимір. Означення асимптотичного виміру належить М. Громову [7]. Тут ми розглядаємо лише випадок асимптотично нульвимірних просторів.

Нехай (X, d) — метричний простір.

Означення 3. *Кажуть, що асимптотичний вимір метричного простору X дорівнює нулю (позначається $\operatorname{asdim} X = 0$), якщо для довільного $D > 0$ існує сім'я множин $\mathcal{U}$ така, що:*

1) $\mathcal{U}$ покриває X;

2) $\mathcal{U}$ рівномірно обмежена (існує $C > 0$ таке, що $\operatorname{diam} U < C$ для кожної $U \in \mathcal{U}$);

3) сім'я $\mathcal{U}$ є D-дискретною, тобто для довільних $U, V \in \mathcal{U}$ таких, що $U \neq V$, маємо $\inf\{d(u,v)|\ u \in U, v \in V\} > D$.

Іншими словами, $\operatorname{asdim} X = 0$, якщо для кожного $D > 0$ простір X можна зобразити у вигляді об'єднання D-диз'юнктних множин, діаметри яких обмежені згори деякою сталою.

Прикладом асимптотично нульвимірного простору є така конструкція, яку можна вважати аналогом класичного берівського простору в асимптотичній топології.

Нехай $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ — послідовність скінченних множин, $X_i \neq \varnothing$ для кожного i. Зафіксуємо точку $x_i \in X_i$.

Позначимо

$$X^* = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} |\ y_i \in X_i,\ y_i = x_i \text{ для всіх, крім скінченного числа, } i\}.$$

На множині X^* розглянемо метрику

$$d((y_i),(z_i)) = \min\{k|\ y_i = z_i \text{ для всіх } \ i > k\}.$$

Нескладну перевірку того, що d — метрика на X, залишаємо читачеві.

Твердження 7. *Метричний простір* (X^*, d) *власний і* $\operatorname{asdim} X^* = 0$.

Доведення. Справді, в просторі X^* замкнена куля радіуса ε з центром в точці (y_i) — це множина послідовностей (z_i) таких, що $d((z_i),(y_i)) \leqslant \varepsilon$, тобто

$$\overline{O}_\varepsilon((y_i)) = \{(z_i)|\ z_i = y_i \text{ для всіх } \ i > \varepsilon\}.$$

Оскільки множини X_i скінченні, то множина точок $z_i \in X_i$ таких, що $z_i \neq y_i$, скінченна. Тоді множина $\overline{O}_\varepsilon((y_i))$ є скінченним об'єднанням скінченних множин, отже, компактна.

Покажемо тепер, що асимптотичний вимір цього простору дорівнює нулю.

Задамо довільне $D \geqslant 1$ і нехай $n \in \mathbb{N}$ — максимальне натуральне число, що не перевищує D. Утворимо множину

$$A = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} |\ y_i = x_i \text{ для кожного } i > n\}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{diam} A = n \leqslant D$.

Виберемо довільну послідовність $(z_i)_{i=1}^{\infty} \in X^*$, $\ (z_i) = (z_1, ..., z_n, ...)$, для якої $z_i \neq x_i$ хоча б для одного номера $i > n$.

Позначимо $B_{n,z} = \{(y_i)_{i=1}^{\infty} |\ y_i = z_i \text{ для всіх } i > n\}$. Тоді $\operatorname{diam} B_{n,z} = n \leqslant D$.

Якщо $(z_i^{'})_{i=1}^{\infty} \neq (z_i^{''})_{i=1}^{\infty}$, то множини $B_{n,z'}$ та $B_{n,z''}$ містять, відповідно, послідовності, які відрізняються, принаймні, однією координатою $k > n$ (інакше б вони належали тій самій множині $B_{n,z}$). Оскільки n — максимальне натуральне число, що не перевищує D, то $k > D$. Тому $\inf d(B_{n,z'}, B_{n,z''}) > k > D$, а також $\inf d(A, B_{n,z}) > k > D$. Крім того, $A \cup \bigcup\limits_z \{B_{n,z}\} = X^*$, а це означає, що $\operatorname{asdim} X^* = 0$.

Твердження 8. *Нехай* $\operatorname{asdim} X = 0$, *тоді* $\operatorname{asdim}(\exp_n X) = 0$.

Доведення. Нехай $D > 0$. Оскільки $\operatorname{asdim} X = 0$, то існує рівномірно обмежена D-дискретна сім'я $\mathcal{U}$ підмножин множини X така, що покриває X.

Нехай $A \in \exp_n X$. Приймемо $A_\mathcal{U} = \{A' \in \exp_n X|\ A \cap U \neq \varnothing \iff A' \cap U \neq \varnothing$ для кожного $U \in \mathcal{U}\}$. Тоді $A_\mathcal{U} \subset \exp_n X$. Позначимо $\overline{\mathcal{U}} = \{A_\mathcal{U}|\ A \in \exp_n X\}$. Очевидно, що сім'я $\overline{\mathcal{U}}$ є покриттям простору $\exp_n X$.

Покажемо, що сім'я $\overline{\mathcal{U}}$ є рівномірно обмежена в метриці Гаусдорфа. Нехай $C = \max\{\operatorname{diam} U|\ U \in \mathcal{U}\}$. Оскільки $\mathcal{U}$ — рівномірно обмежена, то $C < \infty$.

Для кожної $A \in \exp_n X$ маємо, що $\operatorname{diam} A_\mathcal{U} = \max\{d_H(A^{'}, A^{''}|\ A^{'}, A^{''} \in A_\mathcal{U}\}$. Якщо $x^{'} \in A^{'}$, то, очевидно, існують $x^{''} \in A^{''}$ і елемент $U \in \mathcal{U}$, для яких $\{x^{'}, x^{''}\} \subset U$.

Оскільки diam $U < C$, то звідси випливає, що $A^{'} \subset O_C(A^{''})$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що $A^{''} \subset O_C(A^{'})$, звідки $d_H(A^{'}, A^{''}) < C$. Звідси одержуємо, що diam $A_{\mathcal{U}} \leqslant C$, а це й означає рівномірну обмеженість сім'ї $\overline{\mathcal{U}}$.

Покажемо тепер, що сім'я $\overline{\mathcal{U}}$ є D-дискретною. Нехай $A, B \in \exp_n X$ і $A_{\mathcal{U}} \neq B_{\mathcal{U}}$. Тоді існує $V \in \mathcal{U}$, що перетинає лише одну з множин A, B. Нехай для визначеності $A \cap V \neq \varnothing$ і $B \cap V = \varnothing$. Розглянемо довільні $A^{'} \in A_{\mathcal{U}}$ і $B^{'} \in B_{\mathcal{U}}$. Нехай $x \in A^{'} \cap V$. Оскільки сім'я $\mathcal{U}$ є D-дискретною, то одержуємо, що $O_D(x) \cap B^{'} = \varnothing$, звідки $d_H(A^{'}, B') > D$.

5. Приклади. Розглянемо два приклади, що стосуються задачі існування грубих вкладень гіперсиметричних степенів деяких асимптотично нульвимірних просторів.

1. Злічений метричний простір $\{x_i | \ i \in \mathbb{N}\}$ називаємо *узагальненою послідовністю*, якщо $\lim\limits_{i \to \infty} d(x_i, \{x_1, ..., x_{i-1}\}) = \infty$.

Теорема 1. *Нехай $S = \{x_i | \ i \in \mathbb{N}\}$ — узагальнена послідовність. При $n \geqslant 2$ не існує грубого вкладення $\exp_n S$ в S.*

Доведення. Припустимо, що таке $f : \exp_n S \to S$ існує. Тоді існують неспадні функції $\varphi_1, \varphi_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такі, що

$$\lim_{t \mapsto \infty} \varphi_1(t) = \lim_{t \mapsto \infty} \varphi_2(t) = \infty$$

і

$$\varphi_1(d_H(x, y)) \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi_2(d_H(x, y)) \text{ для будь-яких } x, y \in \exp_n S.$$

Очевидно, існує $t_0 > 0$ таке, що $\varphi_1(t_0) = c_1 > 0$.

Розглянемо довільні дві точки $x_i = y$ і $x_j = z$ в S такі, що $d(y, z) \geqslant t_0$. Приймемо $\varphi_2(d(y, z)) = c_2$. Нехай $k > \max i, j$. Тоді $d_H(\{x_k, y\}, \{x_k, z\}) = d(y, z)$.

Одержуємо

$$c_1 \leqslant d_H(\{x_k, y\}, \{x_k, z\}) \leqslant c_2 \ \text{ для довільного } k. \tag{1}$$

Оскільки $\lim\limits_{i \mapsto \infty} d(x_i, \{x_1, ..., x_{i-1}\}) = \infty$, то існує $i_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $i > i_o$ маємо

$$d_H(x_i, \{x_1, ..., x_{i-1}\}) > c_2.$$

Якщо $k > i_0$, то з нерівності (1) і з означення узагальненої послідовності випливає, що

$$f(\{x_k, y\}), f(\{x_k, z\}) \in \{x_1, ..., x_{i_0}\}.$$

Оскільки множина всіх впорядкованих пар елементів множини $\{x_1, ..., x_{i_0}\}$ скінченна, то існує нескінченна підмножина $M \subset \mathbb{N}$ і $a \in \{x_1, ... x_{i_0}\}$ такі, що $f(\{x_k, y\}) = a$ для кожного $k \in M$.

Розглянемо зростаючу послідовність $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ в M. Одержуємо

$$\lim_{i \mapsto \infty} d_H(\{x_{k_1}, y\}, \{x_{k_i}, y\}) = \infty,$$

тому

$$\lim_{i\mapsto\infty}\varphi_1(d_H(\{x_{k_1},y\},\{x_{k_i},y\}))=\infty,$$

що суперечить означенню грубого вкладення, адже

$$\varphi_1(d_H(\{x_{k_1},y\},\{x_{k_i},y\}))\leqslant d(f(\{x_{k_1},y\},f(\{x_{k_i},y\}))=0.$$

2. Розглянемо підмножину дійсної прямої $C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_i$, де $C_1=[0;1]$, $C_2=C_1\cup(C_1+2\cdot 3^0)$, ..., $C_n=C_{n-1}\cup(C_{n-1}+2\cdot 3^{n-2})$.

Множину C можна вважати аналогом стандартної канторової множини в асимптотичній топології.

Справді, будуючи стандартну канторову множину, послідовно видаляємо з одиничного відрізка сім'ї інтервалів довжини 3^{-n}, $n\in\mathbb{N}$, тоді як побудову множини C можна уявляти як видалення з множини $\mathbb{R}$ сімей інтервалів довжини 3^n, $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Існує грубе вкладення простору* $\exp_n C$ *в* C $(n\geqslant 2)$.

Доведення. Спочатку покажемо, що існує грубе вкладення простору C^n в C, $(n\geqslant 2)$.

Будуємо відображення f так, щоб виконувалась умова

$f((C_m)^n)\subset C_{mn-n+1}$ для кожного m.

Метрику в просторі C^n задаємо формулою $d(x,y)=\max\limits_i d(x_i,y_i)$, де $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$.

Позначимо через D_m компоненту 3^m-зв'язності простору C^n, що містить $0=(0,...,0)$, $(m\geqslant 0)$. Очевидно, що кожна компонента D_m — диз'юнктне об'єднання 2^n компонент D_{m-1}.

$D_m=\bigcup\limits_{j=1}^{2^n}(a_j+D_{m-1})$, де $a_j\in\mathbb{R}^n$ для $j=1,...,2^n$. Відображення f будуємо індуктивно. Приймемо $f(0,...,0)=0$. Припустимо, що відображення $f|_{D_i}$ вже побудоване для всіх $i<k$.

Побудуємо $f_k=f|_{D_k}$. Нехай $s:\{1,...,2^n\}\longrightarrow C_{n+1}$ — ін'єктивне відображення, що має властивість: якщо $i\neq j$, то $s(i)$ і $s(j)$ належать різним компонентам D_{kn+n-2}, що належать компоненті D_{kn+n-1}, і є мінімальними елементами в цих компонентах.

Тоді відображення $f|_{D_k}$ визначається умовою: якщо $x\in(a_j+D_{k-1})$, то $f_k(x)=s(j)+f_{k-1}(x-a_j)$.

Позначимо через D_{-1} множину C_1^n. Образом цієї множини при відображенні f є множина C_1, і для всіх x,y, що належать D_{-1}, виконуються нерівності

$$0\leqslant d(f(x),f(y))\leqslant 1.$$

Нехай точки x і y належать тій самій компоненті D_m простору C^n, але різним множинам 3^{m-1}-зв'язності, де m мінімальне, тобто $x\in a_i+D_{m-1}, y\in a_j+D_{m-1}, i\neq j$. При такому відображенні f, заданому вище, будуть виконуватись нерівності

$$3^m\leqslant d(x,y)\leqslant 3^{m+1}, \tag{2}$$

і

$$3^{mn+n-1} \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant 3^{nm+n}. \quad (3)$$

Тоді як функції з означення грубого вкладення можна вибрати функції $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = 3^t k(m)$, де $k(m)$ буде означено нижче. Легко бачити, що виконуються нерівності: $d(x,y) \leqslant d(f(x), f(y))$ і $d(f(x), f(y)) \leqslant 3^{d(x,y)} k(m)$. Перша нерівність означає, що $3^{m+1} \leqslant 3^{mn+n-1} + 1$, звідки одержуємо, що $n \geqslant 2$ для будь-якого m. Друга нерівність означає, що $3^{mn+n} \leqslant 3^{3^{m+1}} k(m)$, звідки маємо: $n(m+1) \leqslant 3^{m+1} + k_1(m)$, де $k(m) = 3^{k_1(m)}$, $m+1 \leqslant \frac{3^{m+1}+k_1(m)}{n}$. Ця нерівність виконується для довільного $m \in \mathbb{N}$ при $k_1(m) = (n-1)\cdot 3^{m+1}$. Тоді $k(m) = 3^{k_1(m)} = 3^{(n-1)\cdot 3^{m+1}}$.

Маючи значення $k(m)$, число $k(m+1)$ знаходимо за рекурентною формулою $k(m+1) = 3^{(n-1)\cdot 3^{m+2}} = 3^{(n-1)\cdot 3^{m+1}\cdot 3} = (3^{(n-1)\cdot 3^{m+1}})^3 = (k(m))^3$.

Якщо ж точки x і y належать тій самій компоненті M 3^p-зв'язності компоненти D_m $(p < m)$, то виконуються нерівності (2) і (3) за умови $m = p$ (компонента M відображається у компоненту 3^{pn+n+1}-зв'язності).

Тобто, функції $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t, & t > 1 \end{cases}$ і $\varphi_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3^t k(m), & t > 1 \end{cases}$ забезпечують виконання умов грубого вкладення.

Маючи грубе вкладення f простору C^n в C, можна побудувати грубе вкладення простору $\exp_n C$ в C.

Позначимо через $D_m^{'}$ компоненту 3^m-зв'язності в просторі $\exp_n C$, що містить $\{0\}$. Як і для простору C^n, маємо: $D_m^{'} = \bigcup_{j=1}^{k(n)} (a_j + D_{m-1}^{'})$, де $a_j \in \mathbb{R}^n$ для $j = 1, ..., k(n)$. Позначимо через $p:\ C^n \to \exp_n C$ факторвідображення. Тоді $p(D_m) = D_m^{'}$. Відображення g, як і відображення f, будуємо індуктивно. Маємо $g(\{0\}) = 0$. Нехай $D_{-1}^{'} = \exp_n C_1$. Означимо відображення $g|_{D_{-1}^{'}}$, приймаючи $g(x) = f(y)$, де $y \in C^n$ — довільна точка така, що $p(y) = x$.

Тепер застосуємо індукцію. Припустимо, що відображення $g|_{D_i^{'}}$ побудоване для всіх $i < k$. Маючи відображення s, визначене вище, означимо відображення $g|_{D_k^{'}}$ так: якщо $x \in (a_j + D_{k-1}^{'})$, то $g_k(x) = s(j) + g_{k-1}(x - a_j)$.

Для точок x і y, що належать компоненті $D_m^{'}$, але різним компонентам 3^{m-1}-зв'язності, образи $g(x)$ та $g(y)$ належатимуть компоненті D_{mn+n-1} і будуть виконуватись нерівності (2) і (3). Якщо ж точки x та y належать одній компоненті 3^p-зв'язності компоненти $D_m^{'}$, $p < m$, то виконуються ті самі нерівності при $m = p$.

Для такого відображення g виконуватимуться умови грубого вкладення, причому функції φ_1 і φ_2 будуть тими самими, що і для відображення f.

6. Зауваження і відкриті питання. Нехай X — множина. Введемо на n-му степені X^n множини X відношення еквівалентності $\sim$. При цьому $x = (x_1, ..., x_n) \sim y = (y_1, ..., y_n)$, якщо існує перестановка $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$, для кожного $i = 1, \ldots, n$. Позначимо через $[x_1, \ldots, x_n]$ клас еквівалентності, що містить $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Нехай $SP^n X$ — фактор-простір, елементами якого є класи еквівалентності $[x] = [x_1, ..., x_n]$.

Якщо X — метричний простір, то на множині SP^nX введемо метрику $\overline{d}([x],[y]) = \min_{\sigma} \max_{i} d(x_i, y_i)$.

Можна показати, що результати, доведені вище для конструкції $\exp_n$, справджуються і для конструкції SP^n. Більш загально ці результати розповсюджуються на клас нормальних функторів скінченного степеня в категорії $\mathcal{R}$, введений в [8].

На завершення сформулюємо гіпотезу: не існує грубого вкладення $\exp_n S$ в $\exp_m S$ при $n > m$, де S — узагальнена послідовність, означена в теоремі 1.

---

1. *Dranishnikov, A.N.; Gong, G.; Lafforgue, V.; Yu, G.* Uniform embeddings into Hilbert space and a question of Gromov. (English)// Can. Math. Bull.– 2002.– Vol. 45.– № 1.– P. 60-70.

2. *Nowak, Piotr W.* Coarse embeddings of metric spaces into Banach spaces. (English)// Proc. Am. Math. Soc.– 2005.– Vol. 133.– № 9.– P. 2589-2596.

3. *G. Yu.* The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. // Invent. Math.– 2000.– Vol. 139.–№ 1.– P. 201-240.

4. *A. Dranishnikov. Asymptotic topology. //* Russian Math. Surveys.– 2000.– Vol. 55.– №6.– P. 71–116.

5. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции.– М., 1986.

6. *Roe J.* Index Theory, Coarse Geometry, and Topology of Manifolds.// CBMS regional Conference Series in Mathematics.– 1996.– № 90.

7. *Gromov M. Asymptotic invariants for infinite groups.//* LMS Lecture Notes.– 1993.– Vol. 182.– № 2.

8. *Frider V.* Normal functors in coarse category.// Algebra and Discrete Mathematics.– 2005.– № 4.– P.16-27.

9. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов.// Успехи матем. наук.– 1981.– Т.36.– Вып. 3.– С. 3-62.

HYPERSYMMETRIC POWERS AND ASYMPTOTICALLY ZERO-DIMENSIONAL SPACES

Oksana Shukel

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

It is proved that the hypersymmetric power in the Roe category of the proper metric spaces and coarse proper maps preserves the coarse embeddings and asymptotically zero-dimensional spaces. This functor can also be considered in the Dranishnikov asymptotic category. We consider problems of existence of coarse embeddings of some asymptotically zero-dimensional spaces and their hypersymmetric powers.

Key words: asymptotic dimension, coarse embedding, hypersymmetric power.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006