ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.208–213 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.208–213*

УДК 517.5

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖЕНИХ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

Зоряна ШЕРЕМЕТА[1], **Мирослав ШЕРЕМЕТА**[2]

[1]*Інститут прикладних проблем математики і механіки НАН України, вул. Дудаєва, 15, 79050 Львів, Україна*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Знайдено умови на коефіцієнти степеневого розвинення аналітичної в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функції f, за яких f є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) = \beta/(R-r)$ для всіх $r \in [0, R)$ і деякого $\beta \geqslant 1$. Досліджено обмеженість l-індексу виродженої гіпергеометричної функції.

Ключові слова: аналітичні функції обмеженого індексу, степеневе розвинення, гіпергеометрична функція.

Нехай
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$
– аналітична в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функція (радіус збіжності ряду (1) може бути більшим, ніж R), а l – додатна неперервна на $[0, R)$ функція. Функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1] в $\mathbb{D}_R$, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}_R$
$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$
Найменше з таких чисел N називається l-індексом функції f в $\mathbb{D}_R$ і позначається через $N(f, l; \mathbb{D}_R)$. Означення l-індексу цілої функції отримуємо заміною $\mathbb{D}_R$ на $\mathbb{C}$.

Мета нашої праці — визначити умови на коефіцієнти a_n, за яких функція (1) є обмеженого l-індексу з $l(r) = \beta/(R-r)$, де $\beta \geqslant 1$ – деяке число, а також дослідження обмеженості l-індексу виродженої гіпергеометричної функції.

Теорема 1. *Якщо* $a_0 \neq 0$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_0|} R^n \leqslant \alpha(R) < 1$, *то* $N(f, l; \mathbb{D}_R) = 0$ *з* $l(r) = \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{1}{R-r}$ *для всіх* $r \in [0,\, R)$.

Доведення. З означення (2) випливає, що $N(f, l; \mathbb{D}_R) = N(\varphi, l; \mathbb{D}_R)$, де $\varphi(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n$. Але для всіх $z \in \mathbb{D}_R$

$$1 - \alpha(R) \leqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_0|} |z|^n \leqslant |\varphi(z)| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|a_0|} |z|^n \leqslant 1 + \alpha(R).$$

Тому для кожного $z \in \mathbb{D}_R$ і всіх $k \geqslant 1$

$$\frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{k!} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z| = R - |z|} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^{k+1}} d\tau \right| \leqslant \frac{\max\{|\varphi(z)| : z \in \mathbb{D}_R\}}{(R - |z|)^k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{1-\alpha(R)}{(R-|z|)^k} \leqslant \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{|\varphi(z)|}{(R-|z|)^k},$$

тобто

$$\frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{k!} \left(\frac{(R-|z|)(1-\alpha(R))}{1+\alpha(R)} \right)^k \leqslant \left(\frac{1-\alpha(R)}{1+\alpha(R)} \right)^{k-1} |\varphi(z)| \leqslant |\varphi(z)|,$$

звідки випливає, що $N(f, l; \mathbb{D}_R) = 0$ з $l(r) = \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)} \frac{1}{R-r}$. Теорему 1 доведено.

З теореми 1 випливають два твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ *– аналітична в одиничному крузі функція і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \alpha < 1$. *Тоді* f *– функція обмеженого* l*-індексу* $N(f, l; \mathbb{D}_1) = 0$ *з* $l(r) = \frac{\beta}{1-r}$, *де* $\beta = (1+\alpha)/(1-\alpha)$.

Наслідок 2. *Нехай* $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ *– ціла функція, а* $R > 0$ *– довільне число таке, що* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| R^n \leqslant \alpha(R) < 1$. *Тоді* $N(f, l; \mathbb{D}_{R/2}) = 0$ *з* $l(r) \equiv \frac{2}{R} \frac{1+\alpha(R)}{1-\alpha(R)}$.

Наступна теорема може бути корисною як у випадку, коли $a_0 = 0$, так і у випадку, коли $a_0 \neq 0$.

Теорема 2. *Нехай функція (1) аналітична в крузі* $\mathbb{D}_R$, $j = \min\{n \geqslant 1 : a_n \neq 0\}$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+j)!}{j!n!} \frac{|a_{n+j}|}{|a_j|} R^n \leqslant \alpha_j(R) < 1$. *Тоді* $N(f, l; \mathbb{D}_R) \leqslant j + J(R)$, *де* $l(r) = \frac{1}{R-r}$ *для всіх* $r \in [0,\, R)$ *і* $J(R) = \min\left\{ k \geqslant j : \frac{1+\alpha_j(R)}{1-\alpha_j(R)} \leqslant \frac{(k+j)!}{k!j!} \right\}$.

Доведення. Оскільки $a_j \neq 0$ і

$$f^{(j)}(z) = j!a_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-j+1)a_n z^{n-j} = j!a_j\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+j)!}{j!n!}\frac{a_{n+j}}{a_j}z^n\right),$$

то $N(f^{(j)}, l; \mathbb{D}_R) = N(\varphi, l; \mathbb{D}_R)$, де тепер $\varphi(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+j)!}{j!n!}\frac{a_{n+j}}{a_j}z^n$ і, як у доведенні теореми 1, $1 - \alpha_j(R) \leqslant |\varphi(z)| \leqslant 1 + \alpha_j(R)$ для всіх $z \in \mathbb{D}_R$.

Далі, як у доведенні теореми 1, для кожного $z \in \mathbb{D}_R$ і всіх $k \geqslant 1$ маємо

$$\frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{k!} \leqslant \frac{1 + \alpha_j(R)}{1 - \alpha_j(R)}\frac{|\varphi(z)|}{(R - |z|)^k},$$

і, оскільки $\varphi^{(k)}(z) = f^{(j+k)}(z)/j!a_j$, то для кожного $z \in \mathbb{D}_R$ і всіх $k \geqslant J(R)$

$$\frac{|f^{(j+k)}(z)|}{(k+j)!} \leqslant \frac{k!j!}{(k+j)!}\frac{1 + \alpha_j(R)}{1 - \alpha_j(R)}\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!(R - |z|)^k} \leqslant \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!(R - |z|)^k},$$

тобто для всіх $k \geqslant J(R)$

$$\frac{|f^{(j+k)}(z)|}{(k+j)!}(R - |z|)^{k+j} \leqslant \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!}(R - |z|)^j,$$

звідки випливає нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}(R - |z|)^n \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!}(R - |z|)^m : 0 \leqslant m \leqslant j + J(R)\right\}.$$

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 легко отримати відповідні аналоги наслідків 1 і 2. Розглянемо тільки аналітичні в одиничному крузі функції.

Наслідок 3. *Нехай $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ – аналітична в одиничному крузі функція і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|f_n| \leqslant \alpha < 1$. Тоді f – функція обмеженого l-індексу $N(f, l; \mathbb{D}_1) \leqslant 1 + J$, де $l(r) = \dfrac{1}{1-r}$ і $J = \min\left\{k \geqslant 1 : \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} \leqslant k + 1\right\}$.*

Зауважимо, що умова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|f_n| \leqslant \alpha < 1$ є достатньою для того, щоб функція $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ була близькою до опуклої в одиничному крузі [2].

Теореми 1 і 2 та їхні наслідки можна застосовувати до дослідження обмеженості l-індексу спеціальних функцій. Розглянемо тут лише вироджену гіпергеометричну функцію. Так називається [3, с. 78] функція

$$F(z) = F(\alpha, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\frac{j+\alpha}{j+\gamma}\right)\frac{z^k}{k!}, \quad \gamma \neq 0, -1\ -2, \dots.$$

Функція $F(\alpha, \gamma; z)$ є цілою і задовольняє [3, с. 78] диференціальне рівняння

$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0. \tag{3}$$

З теореми 1 з [4] випливає таке: якщо $0 < \alpha \leqslant \gamma$, то вироджена гіпергеометрична функція та всі її похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і $\ln M_F(r) \sim r$ при $r \to +\infty$, де $M_F(r) = \max\{|F(z)| : |z| = r\}$.

Обмеженість l-індексу функції F будемо досліджувати також за умови $0 < \alpha \leqslant \gamma$.

Якщо через a_k позначимо тейлорові коефіцієнти функції F, то

$$F^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} z^k$$

і, отже, $F^{(n)}$ є обмеженого l-індексу в G тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$F_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!n!} \frac{a_{k+n}}{a_n} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=n}^{n+k-1} \frac{j+\alpha}{j+\gamma} \right) \frac{z^k}{k!}. \tag{4}$$

Якщо позначимо $F_0 = F$, то і F_0 має розвинення в степеневий ряд (4). Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \prod_{j=n}^{n+k-1} \frac{j+\alpha}{j+\gamma} \right| \frac{1}{k!2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!2^k} = \sqrt{e} - 1 < 1,$$

то, використовуючи наслідок 2 з $R = 1/2$, отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $0 < \alpha \leqslant \gamma$, *то* $N(F^{(n)}, l; \mathbb{D}_{1/4}) = 0$ $(n \geqslant 0)$ *з* $l(r) = 4\sqrt{e}/(2 - \sqrt{e})$, $0 \leqslant r \leqslant 1/4$.

Перейдемо до обмеженості l-індексу функції F в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/4}$. Підставляючи F у рівняння (3), для $|z| \geqslant 1/4$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{|F''(z)|}{2!(4\gamma+4)^2} &\leqslant \frac{\gamma/|z|+1}{2(4\gamma+4)} \frac{|F'(z)|}{1!(4\gamma+4)} + \frac{\alpha/|z|}{2(4\gamma+4)^2} |F(z)| \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{4\gamma+1}{8(\gamma+1)} + \frac{4\gamma}{32(\gamma+1)^2} \right) \max\left\{ \frac{|F'(z)|}{1!(4\gamma+4)}, |F(z)| \right\} < \\ &< \max\left\{ \frac{|F'(z)|}{1!(4\gamma+4)}, |F(z)| \right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо підставимо F у (3) і продиференціюємо $m \geqslant 1$ раз, то отримаємо

$$zF^{(m+2)}(z) + (m + \gamma - z)F^{(m+1)}(z) - (m+\alpha)F^{(m)}(z) \equiv 0, \tag{6}$$

звідки, як вище, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{|F^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!(4\gamma+4)^{m+2}} &\leqslant \left(\frac{4(m+\gamma)+1}{(m+2)(4\gamma+4)} + \frac{4(m+\gamma)}{(m+2)(m+1)(4\gamma+4)^2} \right) \times \\ &\times \max\left\{ \frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!(4\gamma+4)^{m+1}}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!(4\gamma+4)^m} \right\} < \\ &< \max\left\{ \frac{|F^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!(4\gamma+4)^{m+1}}, \frac{|F^{(m)}(z)|}{m!(4\gamma+4)^m} \right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

З (5) і (7) легко випливає, що $N(F,l;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4})\leqslant 1$ з $l(r)\equiv 4(\gamma+1)$ $(r\geqslant 1/4)$.

Для кожного фіксованого $n\geqslant 1$ і всіх $j\geqslant 0$ з тотожності (6) одержуємо

$$zF^{(n+j+2)}(z)+(n+j+\gamma-z)F^{(n+j+1)}(z)-(n+j+\alpha)F^{(n+j)}(z)\equiv 0,$$

звідки, як вище, отримуємо

$$\frac{|F^{(n+j+2)}(z)|}{(j+2)!(4\gamma+4n+4)^{j+2}}\leqslant\left(\frac{4(n+j+\gamma)+1}{(j+2)(4\gamma+4n+4)}+\frac{4(n+j+\gamma)}{(j+2)(j+1)(4\gamma+4n+4)^2}\right)\times$$
$$\times\max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!(4\gamma+4n+4)^{j+1}},\frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!(4\gamma+4n+4)^{j}}\right\}<$$
$$<\max\left\{\frac{|F^{(n+j+1)}(z)|}{(j+1)!(4\gamma+4n+4)^{j+1}},\frac{|F^{(n+j)}(z)|}{j!(4\gamma+4n+4)^{j}}\right\}.$$

Звідси випливає, що $N(F^{(n)},l_n;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4})\leqslant 1$ $(n\geqslant 1)$ з $l_n(r)\equiv 4(\gamma+n+1)$ $(r\geqslant 1/4)$.

Отже, доведено твердження.

Твердження 2. *Якщо* $0<\alpha\leqslant\gamma$, *то* $N(F^{(n)},l_n;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/4})\leqslant 1$ *для кожного* $n\geqslant 0$, *де* $l_n(r)\equiv 4(\gamma+n+1)$ $(r\geqslant 1/4)$.

Неважко показати [1, с.23] таке: якщо $l_*(r)\leqslant l^*(r)$ і $N(f,l_*;G)\leqslant N$, то $N(f,l^*;G)\leqslant N$. Тому з тверджень 1 і 2 випливає теорема.

Теорема 3. *Якщо параметри виродженої гіпергеометричної функції* $F(z)=F(\alpha,\gamma;z)$ *задовольняють умову* $0<\alpha\leqslant\gamma$, *то* $N(F^{(n)},l_n;\mathbb{C})\leqslant 1$ *для кожного* $n\geqslant 0$, *де* $l_n(r)\equiv 4\max\{\sqrt{e}/(2-\sqrt{e}),\ \gamma+n+1\}$.

---

1. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index.– Lviv, 1999.

2. *Шеремета З.М.* Про функції, близькі до опуклих // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2003.– Вип. 62.– С.144-146.

3. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции.– М., 1965.

4. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differerntial equation, II // J. Math. Anal. and Appl.– 1989.– Vol.142.– P.422-430.

BOUNDEDNESS OF L-INDEX OF ANALYTIC FUNCTIONS REPRESENTED BY POWER SERIES

Zoryna Sheremeta[1], **Myroslav Sheremeta**[2]

[1] *Instytut of Applied Problems of Mechanic and Mathematic, Dudayeva str., 15, 79050 Lviv, Ukraine*
[2] *Ivan Franko National University of Lviv, Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Conditions on the coefficients of the power development of an analytic function f in the disk $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ are found, under which f is of bounded l-index with $l(r) = \beta/(R-r)$ for all $r \in [0, R)$ and some $\beta \geqslant 1$. The boundedness of l-index of degenerated hypergeomitric function is investigated.

Key words: analytic functions of bounded index, power development, hypergeomitric function.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.2005

Прийнята до друку 02.11.2006