УДК 517.537.72

ПРО НИЖНІЙ R-ПОРЯДОК МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДУ ДІРІХЛЕ

Мирослав ШЕРЕМЕТА, Оксана СУМИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Зазначено умови на коефіцієнти і показники цілого ряду Діріхле, за яких нижній R-порядок його максимального члена є додатним і, зокрема, нескінченним.

Ключові слова: цілі ряди Діріхле, максимальний член.

1. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), $S(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

а $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1). Нижнім R-порядком максимального члена називається $q_R = \varliminf\limits_{\sigma\to+\infty} \sigma^{-1} \ln\ln \mu(\sigma, F)$.

Ми зазначимо умови на a_n і λ_n, за яких $q_R > 0$ і, зокрема, $q_R = +\infty$. Зауважимо таке: якщо $\lambda_n \ln \lambda_n = o(\ln(1/|a_n|))$, $(n \to \infty)$, то, використовуючи формулу Рітта для знаходження R-порядку, отримуємо $q_R = 0$. Якщо ж $\lambda_n \ln \lambda_n = O(\ln(1/|a_n|))$, $(n \to \infty)$, то $q_R < +\infty$. Тому необхідною умовою додатності q_R (нескінченності q_R) є існування зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел такої, що $\ln(1/|a_{n_k}|) = O(\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k})$ (відповідно, $\ln(1/|a_{n_k}|) = o(\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k})$) при $k \to \infty$. Отже, задача зводиться до дослідження щільності послідовності (λ_{n_k}), для якої виконується те чи інше з наведених співвідношень для коефіцієнтів. Зауважимо, що з одного результату К. Рахмана [1] випливає таке: якщо $\ln \lambda_n \sim \ln \lambda_{n+1}$, $n \to \infty$, і $\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty} \dfrac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln|a_n|} > 0$, то $q_R > 0$. Дещо сильніший результат випливає з теореми.

Теорема 1. *Нехай $S^*(\Lambda)$ і $S^{**}(\Lambda)$ – класи цілих рядів Діріхле (1) такі, що, відповідно, $\ln(1/|a_n|) = O(\lambda_n \ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ і $\ln(1/|a_n|) = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$. Тоді умова*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_{n+1}}{\ln \lambda_n} < +\infty \tag{2}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб $q_R > 0$ для кожної функції $F \in S^*(\Lambda)$, а також необхідною і достатньою для того, щоб $q_R = +\infty$ для кожної функції $F \in S^{**}(\Lambda)$.

2. Доведення достатності. Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно-диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [2 - 3] функція Ψ неперервно-диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$, а функція φ неперервно-диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(0, +\infty)$.

Для $\Phi \in \Omega$ приймемо

$$G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = \frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt, \quad \varkappa_n = \varkappa(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \varphi(t) dt.$$

З теореми 3.1 із [3] випливає таке: якщо $\ln|a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ $(n \geq n_0)$, то для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varphi(\lambda_{n+1})]$ і $n \geq n_0$

$$\Phi^{-1}(\ln \mu(\sigma, F)) \geq \sigma \frac{\Phi^{-1}(G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi))}{\varkappa_n}.$$

Припустимо, що $\Phi(\sigma) = e^{q\sigma}$ $(0 < q < +\infty)$. Тоді $\varphi(x) = \dfrac{1}{q} \ln \dfrac{x}{q}$, $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{1}{q}$, $x\Psi(\varphi(x)) = \dfrac{x}{q} \ln \dfrac{x}{eq}$, $\varkappa_n = \dfrac{\lambda_{n+1} \ln \lambda_{n+1} - \lambda_n \ln \lambda_n}{q(\lambda_{n+1} - \lambda_n)} - \dfrac{\ln(eq)}{q}$, $G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = \dfrac{1}{q} \dfrac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \ln \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ і $\Phi^{-1}(G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)) = \dfrac{1}{q} \ln \left(\dfrac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \ln \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right) - \dfrac{\ln q}{q}$.

Якщо $\ln|a_n| \geq -\dfrac{\lambda_n}{q} \ln \dfrac{\lambda_n}{eq}$ $(n \geq n_0)$, $\ln \lambda_n \leq q\sigma + \ln q \leq \ln \lambda_{n+1}$ і $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^{1+\beta}$ $(\beta > 0)$, враховуючи, що $\dfrac{\Phi^{-1}(G_1(a, x, \Phi))}{\varkappa(a, x, \Phi)}$ є спадною на $(a, +\infty)$, для всіх

$n \ge n_0$ одержимо

$$\begin{aligned}
&\ln\ln\mu(\sigma,F)\ge\\
&\ge q\sigma\left\{\ln\left(\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\ln\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)-\ln q\right\}\Big/\left\{\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_{n+1}-\lambda_n\ln\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}-\ln(eq)\right\}\ge\\
&\ge q\sigma\left\{\ln\left(\frac{\lambda_n\lambda_n^{1+\beta}}{\lambda_n^{1+\beta}-\lambda_n}\ln\frac{\lambda_n^{1+\beta}}{\lambda_n}\right)-\ln q\right\}\Big/\left\{\frac{\lambda_n^{1+\beta}\ln\lambda_n^{1+\beta}-\lambda_n\ln\lambda_n}{\lambda_n^{1+\beta}-\lambda_n}-\ln(eq)\right\}=\\
&=\frac{q\sigma}{1+\beta}\left\{1+\frac{\ln\ln\lambda_n}{\ln\lambda_n}-\frac{\ln(q/\beta)}{\ln\lambda_n}+\frac{\ln(eq)}{(1+\beta)\ln\lambda_n}+o\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}\right)\right\}\ge\\
&\ge\frac{q\sigma}{1+\beta}\left\{1+\frac{\ln\sigma+\ln q}{q\sigma+\ln q}+\left(\frac{\ln(eq)}{1+\beta}-\ln\frac{q}{\beta}\right)\frac{1}{q\sigma+\ln q}+o\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\}=\\
&=\frac{q\sigma}{1+\beta}\left\{1+\frac{\ln\sigma}{q\sigma}+\frac{1}{q\sigma}\left(\frac{\ln(eq)}{1+\beta}-\ln\frac{1}{\beta}\right)+o\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\}=\\
&=\frac{1}{1+\beta}\left\{q\sigma+\ln\sigma+\frac{\ln(eq)}{1+\beta}-\ln\frac{1}{\beta}\right\}+o(1),\quad \sigma\to+\infty. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Припустимо, що виконується умова (2) і $F\in S^*(\Lambda)$. Тоді для деяких чисел $\beta>0$ і $q>0$ маємо $\lambda_{n+1}\le\lambda_n^{1+\beta}$ і $\ln|a_n|\ge-\dfrac{\lambda_n}{q}\ln\dfrac{\lambda_n}{eq}$ $(n\ge n_0)$. Тому з (3) отримуємо нерівність $q_R\ge q/(1+\beta)>0$. Якщо ж $F\in S^{**}(\Lambda)$, то нерівність $\ln|a_n|\ge-\dfrac{\lambda_n}{q}\ln\dfrac{\lambda_n}{eq}$ правильна для будь-якого $q>0$ і всіх $n\ge n_0(q)$. Тоді з нерівності $q_R\ge q/(1+\beta)$ отримуємо $q_R=+\infty$. Достатність умови (2) доведено.

3. Доведення необхідності. В класі $S^*(\Lambda)$ необхідність умови (2) доведемо, використовуючи методику Дж. Уайтекера [4]. Нехай ϱ_R — R-порядок максимального члена ряду Діріхле (1) і $\nu(\sigma,F)$ — його центральний індекс. Тоді

$$q_R=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\sigma^{-1}\ln\lambda_{\nu(\sigma,F)},\quad \varrho_R=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\sigma^{-1}\ln\lambda_{\nu(\sigma,F)}$$

і, якщо $\lambda_{n_j}\le\lambda_{n_{j+1}}^{\omega}$ для деяких підпослідовності (λ_{n_j}) і числа $\omega>0$, то вибираючи точку σ_j стрибка центрального індексу так, щоб $\lambda_{\nu(\sigma_j-0,F)}\le\lambda_{n_j}\le\lambda_{n_{j+1}}\le\lambda_{\nu(\sigma_j+0,F)}$, маємо

$$q_R\le\varliminf_{j\to\infty}\frac{\ln\lambda_{\nu(\sigma_j-0,F)}}{\sigma_j}\le\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\ln\lambda_{n_j}}{\sigma_j}\le\omega\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\ln\lambda_{n_{j+1}}}{\sigma_j}\le\omega\varlimsup_{j\to\infty}\frac{\ln\lambda_{\nu(\sigma_j+0,F)}}{\sigma_j}\le\omega\varrho_R,$$

тобто $q_R\le\varrho_R\varliminf_{n\to\infty}\dfrac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}$. Якщо тепер виберемо коефіцієнти ряду (1) так, щоб $\ln|a_n|=-\lambda_n\ln(\lambda_n/e)$, то $F\in S^*(\Lambda)$, $\varrho_R=1$ і $q_R=0$ за умови, що (2) не виконується.

Необхідність умови (2) в класі $S^*(\Lambda)$ доведено.

Доведемо, що умова (2) є необхідною і в класі $S^{**}(\Lambda)$. Припустимо, що вона не виконується, тобто існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$\ln\lambda_{n_k+1}/\ln\lambda_{n_k}\to\infty$, $k\to\infty$. Виберемо повільно зростаючу до $+\infty$ неперервно-диференційовну функцію α так, щоб $\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})\le\ln\lambda_{n_k+1}/\ln\lambda_{n_k}$ для всіх k і функція $\Phi(\sigma)=\exp\{\sigma\alpha(\sigma)\}$ належала до класу Ω, а коефіцієнти ряду Діріхле (1) виберемо так, щоб $\ln|a_n|=-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$. Тоді $\Phi'(\sigma)=\exp\{\sigma\alpha(\sigma)\}(\alpha(\sigma)+\sigma\alpha'(\sigma))=$ $=(1+o(1))\alpha(\sigma)\exp\{\sigma\alpha(\sigma)\}$ $(\sigma\to+\infty)$ і для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння $\sigma\alpha(\sigma)+\ln(\alpha(\sigma)+\sigma\alpha'(\sigma))=\ln x$. Розв'язок $\sigma=\varphi(x)$ цього рівняння задовольняє умову $\sigma\alpha(\sigma)+\ln\alpha(\sigma)+o(1)=\ln x$ $(x\to+\infty)$ і, отже,

$$\ln\sigma+\ln\alpha(\sigma)+o(1)=\ln\ln x,\quad x\to+\infty. \tag{4}$$

Оскільки $\ln\alpha(\sigma)=o(\ln\sigma)$, $\sigma\to+\infty$, то розв'язок рівняння (4) будемо шукати у вигляді

$$\ln\sigma=\ln\ln x-\beta,\quad \beta=\beta(x)=o(\ln\ln x)\,(x\to+\infty). \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (4), одержуємо $\beta=\ln\alpha(e^{\ln\ln x-\beta})+o(1)=\ln\alpha(\ln x)+o(1)$ $(x\to+\infty)$, тобто $\ln\sigma=\ln\ln x-\ln\alpha(\ln x)+o(1)\,(x\to+\infty)$ і

$$\varphi(x)=\frac{(1+o(1))\ln x}{\alpha(\ln x)},\quad x\to+\infty. \tag{6}$$

Оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))'=\varphi(x)$, то, використовуючи правило Лопіталя і співвідношення (6), бачимо, що ряд Діріхле (1) з вибраними коефіцієнтами належить до класу $S^{**}(\Lambda)$. З (6) випливає також, що

$$\varkappa_{n_k}=\frac{1+o(1)}{\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}}\int\limits_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_k+1}}\frac{\ln x}{\alpha(\ln x)}dx\ge\frac{1+o(1)}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})}\frac{\lambda_{n_k+1}\ln\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}}=$$
$$=\frac{(1+o(1))\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})},\quad k\to\infty. \tag{7}$$

З іншого боку, оскільки [3]

$$\ln\mu(\varkappa_n,F)=-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))+\varkappa_n\lambda_n=G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\Psi(\varphi(x))\Big|_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}},$$

а з огляду на (6)

$$\Psi(\varphi(x))=\frac{1+o(1)}{x}\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt=\frac{(1+o(1))\ln x}{\alpha(\ln x)},\quad x\to+\infty,$$

то

$$\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)=\frac{\lambda_{n_k+1}\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}}\left((1+o(1))\frac{\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})}-(1+o(1))\frac{\ln\lambda_{n_k}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k})}\right)=$$
$$=(1+o(1))\lambda_{n_k}\frac{\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})},\quad k\to\infty. \tag{8}$$

З нерівностей (7) і (8) випливає, що

$$\frac{\ln\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}{\varkappa_{n_k}} \le \frac{\ln\lambda_{n_k} + \ln\dfrac{\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})} + o(1)}{(1+o(1))\dfrac{\ln\lambda_{n_k+1}}{\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})}} =$$

$$= \frac{\ln\lambda_{n_k}\alpha(\ln\lambda_{n_k+1})}{\ln\lambda_{n_k+1}} + o(1) \le 1 + o(1), \quad k\to\infty,$$

тобто $q_R < 1$. Необхідність умови (2) в класі $S^{**}(\Lambda)$ доведено.

Оскільки $\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\} \ge \max\{|a_{n_k}|\exp(\sigma\lambda_{n_k}) : k \ge 0\}$, то з теореми випливає таке: якщо для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел $\ln\lambda_{n_k+1} = O(\ln\lambda_{n_k})$ і $\ln(1/|a_{n_k}|) = O(\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k})$ при $k\to\infty$, то $q_R > 0$, а якщо $\ln\lambda_{n_k+1} = O(\ln\lambda_{n_k})$ і $\ln(1/|a_{n_k}|) = o(\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k})$ при $k\to\infty$, то $q_R = +\infty$.

1. *Rahman Q.I.* On the lower order of entire functions defined by Dirichlet series // Quart. J. Math. Oxsford.– 1956.– Vol. 7.– P.96-99.

2. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн.– 1998.– Т. 39, N 1.– С.206-223.

3. *Шеремета М.М., Сумик О.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій // Матем. студії.– 1999.– Т.11, N 1.– С.41-47.

4. *Whittaker J.M.* The lower order of integral functions // J. Lond. Math. Soc.– 1933.– Vol. 8.– P.20-27.

ON THE LOWER R-ORDER OF THE MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Myroslav Sheremeta, Oksana Sumyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The conditions on the coefficients and exponents of an entire Dirichlet series under which the lower R-order of its maximal term is positive and, in particular, infinite are found.

Key words: entire Dirichlet series, maximal term.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.2006

Прийнята до друку 02.11.2006