УДК 517.95

СИЛЬНО ВИРОДЖЕНА ОБЕРНЕНА ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА З ЗАГАЛЬНОЮ ПОВЕДІНКОЮ КОЕФІЦІЄНТІВ

Наталія САЛДІНА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта в параболічному рівнянні. Коефіцієнт при старшій похідній подано у вигляді добутку двох функцій, залежних від часу, одна з яких перетворюється в нуль у початковий момент часу. Поведінка інших коефіцієнтів описується деякими заданими функціями загального вигляду. З'ясовано умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі.

Ключові слова: обернена задача, теорема Шаудера, сильне виродження, параболічне рівняння.

Оберненим задачам для параболічних рівнянь з виродженням присвячені праці [1]-[4]. В них припускалося, що залежний від часу старший коефіцієнт, який є невідомим, прямує до нуля при $t \to 0$ за степеневим законом. Випадок слабкого виродження досліджено для рівняння теплопровідності [2] та для повного параболічного рівняння, причому для існування розв'язку від молодших коефіцієнтів рівняння не вимагалося прямування їх до нуля при $t \to 0$ [4]. Аналогічний випадок для сильного виродження розглянули тільки для рівняння теплопровідності [1]. Мета нашої праці — дослідити обернену задачу для параболічного рівняння з довільним прямуванням до нуля старшого коефіцієнта і визначити залежність від нього поведінки молодших членів.

1. Формулювання задачі та позначення. В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + b(x,t)\psi_1(t)u_x + c(x,t)\psi_2(t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (1)$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0, t \in [0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)\psi_0(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Будемо вважати, що $\psi_i(t), i = \overline{0,2}-$ відомі монотонно зростаючі функції, $\psi_i(0) = 0, i = \overline{0,2}$. Під розв'язком задачі (1)-(4) розуміємо пару функцій $(a(t), u(x,t)) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T), u_x(0,t) \in C(0,T], a(t) > 0, t \in [0,T]$.

Означення. *Виродження називатимемо сильним, якщо при* $t \to +0$ *вираз* $\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}$ *прямує до нескінченності, де* $\theta_0(t) = \int\limits_0^t \psi_0(\sigma)d\sigma$.

Основні результати зазначено в теоремі.

Теорема існування та єдиності. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$; $\mu_3, \psi_i \in C[0,T], i = \overline{0,2}$; $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$; $b, c \in C(\overline{Q}_T)$ *та задовольняють умову Гельдера в області* $\overline{Q}_T$ *за змінною* x *з показником* $\alpha, 0 < \alpha < 1$, *рівномірно стосовно* $t, t \in [0,T]$;

2) $f(0,t) - \mu_1'(t) > 0, t \in [0,T]$; $\mu_3(t) > 0, t \in (0,T]$, *існує скінченна додатна границя* $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\mu_3(t)}{\sqrt{\psi_0(t)t}} \equiv M$, $\psi_i(t)-$ *монотонно зростаючі функції,* $\psi_i(t) > 0, t \in (0,T], \psi_i(0) = 0, i = 0,1,2$, $\lim\limits_{t\to+0} \int\limits_0^t \frac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}d\sigma = 0$; $\lim\limits_{t\to+0} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} = \infty$;

3) $\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(h) = \mu_2(0)$.

Тоді можна зазначити таке число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними задачі, що існує єдиний розв'язок* $(a(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4) при* $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$.

Введемо такі позначення. Через $u_0(x,t)$ позначимо розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\psi_0(t)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{5}$$

з умовами (2),(3), який має вигляд

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\psi_0(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\psi_0(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{6}$$

Через $G_k(x,t,\xi,\tau)$ позначено функції Гріна першої та другої крайових задач для рівняння (5), які мають вигляд

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\quad k=1,2,\quad \theta(t)=\int\limits_0^t a(\tau)\psi_0(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Припускаючи, що функція $a(t)$ відома, вводячи позначення $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$, задачу (1)-(4) замінимо еквівалентною системою рівнянь

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{8}$$

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{9}$$

$$a(t)=\frac{\mu_3(t)}{\psi_0(t)v(0,t)},\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

де вираз $v_0(x,t)$ отримується з (6) диференціюванням та інтегруванням частинами

$$v_0(x,t)=\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi+\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{11}$$

2. Доведення існування розв'язку. Існування розв'язку будемо доводити за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, тому з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків системи (8)-(10).

З принципу максимуму [5, с. 25], випливає

$$|u(x,t)|\leqslant U<\infty \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T. \tag{12}$$

Відсутність явного вигляду функції $v(x,t)$ вимагає дослідження поведінки цієї функції при $t\to+0$. З (11), за допомогою рівності $\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi=1$, робимо висновок про обмеженість першого та четвертого доданків

$$\left|\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi\right| \leqslant C_1, \quad \left|\int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \leqslant C_2. \tag{13}$$

Враховуючи явний вигляд функції Гріна з (7), для двох інших доданків отримаємо

$$\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau \leqslant C_3 + C_4\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

$$\left|\int_0^t G_2(x,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau\right| \leqslant C_5 + C_6\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{14}$$

Тоді остаточно для $v_0(x,t)$ маємо

$$|v_0(x,t)| \leqslant C_7 + C_8\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{15}$$

Вводячи позначення $V(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|$ та використовуючи відому оцінку $\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \leqslant \dfrac{C_9}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, з (9) отримаємо

$$V(t) \leqslant C_{10} + C_{11}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{12}\int_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{13}\int_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{16}$$

За допомогою позначень

$$a_{\min}(t) = \min_{0\leqslant\tau\leqslant t} a(\tau), \quad a_{\max}(t) = \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} a(\tau) \tag{17}$$

з (16) отримаємо

$$V(t) \leqslant C_{10} + \frac{C_{11}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} +$$

$$+ \frac{C_{13}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}. \tag{18}$$

Враховуючи те, що порядок особливості $V(t)$ не нижче, ніж $\int_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}$, та умови теореми, робимо висновок, що порядок особливості третього та четвертого доданків з (18) менша, ніж другого. Отже, функція $v(x,t)$ поводить себе як $C_{14}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}$ при $t\to +0$.

Визначимо оцінки $v(x,t)$ зверху та знизу при $x=0$. Враховуючи умови теореми та (13), (14), отримаємо

$$v(0,t)\geqslant \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau - C_{15} - C_{16}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,$$

або

$$v(0,t)\geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau - C_{15} - C_{16}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \tag{19}$$

оскільки

$$\int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)d\tau \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau.$$

Досліджуючи поведінку кожного доданка з (19) при $t\to +0$, робимо висновок, що особливість другого інтеграла менша, ніж особливість першого, а отже, існують такі значення $t_1, 0<t_1\leqslant T$, та $q, 0<q<1$, що

$$C_{16}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{15} \leqslant \frac{q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,t_1].$$

Тоді з (19) одержимо

$$v(0,t)\geqslant \frac{1-q}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau. \tag{20}$$

Підставимо отриману оцінку в рівняння (10)

$$a(t)\leqslant \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{(1-q)\psi_0(t)\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau} \quad \text{або} \quad a(t)\leqslant \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{a_{\max}(t)}}{(1-q)\psi_0(t)\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau}. \tag{21}$$

Введемо нову функцію

$$H(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\psi_0(t)\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau}.$$

Функція $H(t)$ неперервна та додатна на проміжку (0,T] і має скінченну додатну границю при $t \to +0$

$$\lim_{t\to+0} H(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\sqrt{\pi\psi_0(t^*)}\mu_3(t)}{\psi_0(t)(f(0,t^*)-\mu_1'(t^*))\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}} = \frac{\sqrt{\pi}M}{2(f(0,0)-\mu_1'(0))}, \quad t^* \in [0,T].$$

Продовжуючи оцінку $a(t)$ з використанням функції $H(t)$, з (21) маємо

$$a(t) \leqslant \frac{1}{1-q}H(t)\sqrt{a_{\max}(t)} \quad \text{або} \quad a_{\max}(t) \leqslant \frac{1}{1-q}H_{\max}(t)\sqrt{a_{\max}(t)},$$

де $H_{\max}(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} H(\tau)$. Звідси маємо

$$a(t) \leqslant A_1, \quad t \in [0,t_1], \quad \text{де} \quad A_1 = \frac{1}{(1-q)^2}H^2_{\max}(T). \tag{22}$$

Оцінка $v(0,t)$ зверху буде такою:

$$v(0,t) \leqslant C_{17} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{18}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{19}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Використаємо цю нерівність та (17) для оцінки функції $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{\mu_3(t)}{\psi_0(t)}\left(C_{17} + \frac{1}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{19}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\right)^{-1}.$$

Перетворимо цю нерівність до вигляду

$$a(t) \geqslant \sqrt{a_{\min}(t)}\left(\frac{C_{17}\sqrt{a_{\min}(t)}\psi_0(t)}{\mu_3(t)} + \frac{\psi_0(t)}{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{18}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \frac{C_{19}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau\right)^{-1}.$$

З означення функції $H(t)$ та умов теореми маємо

$$a(t) \geqslant \sqrt{a_{\min}(t)}\left(\frac{C_{17}\sqrt{a_{\min}(t)}\psi_0(t)}{\mu_3(t)} + \frac{1}{H(t)} + \frac{C_{18}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{19}\psi_0(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau\right)^{-1} \geqslant \sqrt{a_{\min}(t)}H(t)\left(C_{20}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + 1 + \right.$$

$$\left. + C_{21}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + C_{22}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau\right)^{-1}. \qquad (23)$$

З означення сильного виродження випливає, що відношення $\sqrt{\dfrac{\psi_0(t)}{t}}$ прямує до нуля при $t \to +0$. З поведінки функції $V(t)$ та умов теореми робимо висновок, що існує таке значення $t_2, 0 < t_2 \leqslant T$, що при $t \in [0, t_2]$ виконується нерівність

$$C_{20}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + C_{21}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau + C_{22}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau \leqslant q.$$

Тоді з нерівності (23) отримаємо

$$a(t) \geqslant \frac{\sqrt{a_{\min}(t)}H(t)}{1+q} \quad \text{або} \quad a_{\min}(t) \geqslant \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}, \quad t \in [0, t_2], \qquad (24)$$

де $H_{\min}(t) = \min\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant t} H(\tau)$. Остаточно маємо для $a(t)$

$$a(t) \geqslant A_0, \quad t \in [0, t_2], \quad \text{де} \quad A_0 = \frac{1}{(1+q)^2}H^2_{\min}(T) > 0. \qquad (25)$$

Продовжимо оцінювати (18), підставляючи (24) у (18)

$$V(t) \leqslant C_{10} + C_{23}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} + C_{24}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau +$$

$$+ C_{25}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}. \qquad (26)$$

Введемо позначення $\chi(t) \equiv \left(\int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\right)^{-1}$. Враховуючи зростання функції $\dfrac{\theta_0(t)}{t}$, маємо

$$\theta_0(t) - \theta_0(\tau) = \frac{\theta_0(t)}{t}\left(t - \frac{\theta_0(\tau)}{\theta_0(t)}t\right) \geqslant \frac{\theta_0(t)}{t}(t-\tau).$$

Тоді з (26) отримаємо

$$V(t) \leqslant C_{10} + \frac{C_{23}}{\chi(t)} + C_{24}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + C_{25}\frac{\psi_2(t)}{\chi(t)}. \qquad (27)$$

Помножимо обидві частини нерівності на $\chi(t)$ та введемо нову функцію $W(t) \equiv V(t)\chi(t)$

$$W(t) \leqslant C_{26} + C_{24}\chi(t)\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)d\tau}{\chi(\tau)\sqrt{t-\tau}} + C_{25}\psi_2(t). \qquad (28)$$

Приймемо $t=\sigma$, домножимо обидві частини нерівності на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ і проінтегруємо від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{W(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant 2C_{26}\sqrt{t} + C_{24}\int\limits_0^t \frac{\chi(\sigma)\sqrt{\sigma}d\sigma}{\sqrt{\theta_0(\sigma)(t-\sigma)}}\int\limits_0^\sigma \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)d\tau}{\chi(\tau)\sqrt{\sigma-\tau}} + 2C_{25}\psi_2(t)\sqrt{t}.$$

Поміняємо порядок інтегрування у правій частині нерівності, врахувавши, що функція $\chi(t)\sqrt{\dfrac{t}{\theta_0(t)}}$ – спадна та $\displaystyle\int\limits_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}} = \pi$. Матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{W(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant 2C_{26}\sqrt{t} + 2C_{25}\psi_2(t)\sqrt{t} + C_{27}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}d\tau. \qquad (29)$$

Оскільки функція $\dfrac{\psi_1(t)}{\chi(t)}$ – зростаюча, то перепишемо (28) у вигляді

$$W(t) \leqslant C_{26} + C_{24}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\psi_1(t)\int\limits_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + C_{25}\psi_2(t).$$

Підставимо в цю нерівність оцінку (29) і після перетворень отримаємо

$$W(t) \leqslant C_{28} + C_{29}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\psi_1(t)\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)W(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}d\tau.$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\to+0}\sqrt{\dfrac{t}{\theta_0(t)}}\psi_1(t)=0$, задана нерівність розв'язується за допомогою леми Гронуолла [6, с. 188], і як наслідок, функція $W(t)$ обмежена деякою константою, яка залежить від вихідних даних. Нехай $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}=0$. Тоді

$$\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}W(t)\leqslant C_{28}\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}+C_{29}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)W(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}d\tau. \tag{30}$$

Позначимо праву частину нерівності (30) через $L(t)$. Диференціюючи, отримаємо

$$L'(t)-C_{29}\frac{\psi_1^2(t)t}{\theta_0(t)}L(t)\leqslant C_{28}\left(\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}\right)'.$$

Домножимо обидві частини нерівності на $\exp\left(-C_{29}\int\limits_0^t\dfrac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}d\sigma\right)$ та проінтегруємо від 0 до t. Отримаємо

$$L(t)\leqslant C_{28}\frac{\sqrt{\theta_0(t)}}{\sqrt{t}\psi_1(t)}+C_{30}\int\limits_0^t\frac{\psi_1(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}\exp\left(C_{29}\int\limits_\tau^t\frac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}\right)d\tau.$$

Підставляючи одержану оцінку в (30), одержуємо

$$W(t)\leqslant C_{28}+C_{31}\frac{\sqrt{t}\psi_1(t)}{\sqrt{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t\frac{\sqrt{\tau}\psi_1(\tau)}{\sqrt{\theta_0(\tau)}}\exp\left(C_{29}\int\limits_\tau^t\frac{\psi_1^2(\sigma)\sigma}{\theta_0(\sigma)}\right)d\tau.$$

Остаточно маємо

$$V(t)\leqslant\frac{C_{32}}{\chi(t)},\quad t\in[0,t_2],\quad \text{або}\quad |v(x,t)|\leqslant\frac{C_{32}}{\chi(t)},\quad (x,t)\in[0,h]\times(0,t_2], \tag{31}$$

де $C_{32}-$ константа, що визначається вихідними даними.

Введемо нову функцію $\tilde{v}(x,t)\equiv v(x,t)\chi(t)$ і подамо систему рівнянь (8), (9), (10) у такій формі:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)\frac{\tilde{v}(\xi,\tau)}{\chi(\tau)}+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{32}$$

$$\tilde{v}(x,t)=v_0(x,t)\chi(t)+\chi(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)\frac{\tilde{v}(\xi,\tau)}{\chi(\tau)}+$$
$$+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau,\quad (x,t)\in Q_{t_0}, \tag{33}$$

$$a(t)=\frac{\mu_3(t)\chi(t)}{\psi_0(t)\tilde{v}(0,t)},\quad t\in[0,t_0],\quad \text{де}\quad t_0=\min\{t_1,t_2\}. \tag{34}$$

Запишемо систему рівнянь (32)-(34) в операторній формі

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (u, \tilde{v}, a)$, $\quad P = (P_1, P_2, P_3)$, оператори P_1, P_2, P_3 визначаються правими частинами рівнянь (32)-(34). Визначимо множину $\mathcal{N} = \{(u, \tilde{v}, a) \in C(\overline{Q}_{t_0}) \times C(\overline{Q}_{t_0}) \times C[0, t_0] : |u(x,t)| \leqslant U, |\tilde{v}(x,t)| \leqslant C_{32}, A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$. Згідно з отриманими оцінками (12), (31), (22), (25) оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на $\mathcal{N}$. Згідно з теоремою Арцела-Асколі треба з'ясувати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$|P_i(x_2,t_2) - P_i(x_1,t_1)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad |P_3(t_2) - P_3(t_1)| < \varepsilon, \quad \forall\,(u, \tilde{v}, a) \in \mathcal{N},$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$. Доведення компактності покажемо на прикладі одного з доданків, що входить до інтегрального оператора P

$$K = \left| \chi(t_2) \int\limits_0^{t_2} (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) G_2(0, t_2, 0, \tau) d\tau - \chi(t_1) \int\limits_0^{t_1} (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) G_2(0, t_1, 0, \tau) d\tau \right|.$$

Припустимо, що $t_i, i = 1, 2$ - досить малі значення. Розглянемо інтеграл

$$\widehat{K} \equiv \chi(t) \int\limits_0^{t} (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) G_2(0, t, 0, \tau) d\tau = \frac{\chi(t)}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_0^{t} \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_0^{t} \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{\theta(t) - \theta(\tau)} \right) d\tau \right) \equiv \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2.$$

Використавши одержані оцінки для функції $a(t)$, для другого доданка маємо

$$\widehat{K_2} \leqslant \frac{2\chi(t)}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}} \max_{t \in [0,T]} (f(0,t) - \mu_1'(t)) \int\limits_0^{t} \frac{1}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{a_{\max}(t)(\theta_0(t) - \theta_0(\tau))} \right) d\tau.$$

Враховуючи обмеженість підінтегрального виразу, а також прямування до нуля функції $\chi(t)$ при $t \to +0$ робимо висновок, що $\widehat{K}_2$ прямує до нуля при $t \to +0$. Знайдемо границю першого доданка, використавши теорему про середнє

$$\lim_{t \to +0} \widehat{K}_1 = \lim_{t \to +0} \frac{f(0,\widetilde{t}) - \mu_1'(\widetilde{t})}{\sqrt{\pi a(\widetilde{t})}} \chi(t) \int\limits_0^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}} = \frac{f(0,0) - \mu_1'(0)}{\sqrt{\pi a(0)}}.$$

Позначимо $\lim\limits_{t\to+0}\widehat{K}_1=\varkappa_0$. Тоді для виразу K отримаємо

$$K\leqslant\left|\chi(t_2)\int\limits_0^{t_2}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_2,0,\tau)d\tau-\varkappa_0\right|+$$
$$+\left|\chi(t_1)\int\limits_0^{t_1}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_1,0,\tau)d\tau-\varkappa_0\right|.$$

Можна зазначити таке значення t_*, коли $0<t_i<t_*, i=1,2$, будуть виконуватись нерівності:

$$\left|\chi(t_i)\int\limits_0^{t_i}(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))G_2(0,t_i,0,\tau)d\tau-\varkappa_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $K<\varepsilon$, коли $0<t_i<t_*, i=1,2$. Випадок $t_i>t_*, i=1,2$ та дослідження інших інтегральних операторів, що входять в P_1,P_2,P_3, проводять аналогічно до випадку сильного виродження для рівняння теплопровідності [1]. Отож, оператор P цілком неперервний на $\mathcal{N}$.

Умови теореми Шаудера виконуються. Розв'язок задачі (1)- 4) існує та володіє необхідною гладкістю.

3. Доведення єдиності розв'язку. Введемо позначення $a(t)\equiv a_1(t)-a_2(t)$, $u(x,t)\equiv u_1(x,t)-u_2(x,t), v(x,t)\equiv v_1(x,t)-v_2(x,t)$, де $(a_i(t),u_i(x,t),v_i(x,t)), i=1,2$ - різні розв'язки системи (8) - (10). Отримаємо таку систему:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1^1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h(G_1^1(x,t,\xi,\tau)-G_1^2(x,t,\xi,\tau))(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v_2(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{35}$$

$(x,t)\in Q_T$,

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h(G_{1x}^1(x,t,\xi,\tau)-G_{1x}^2(x,t,\xi,\tau))(b(\xi,\tau)\psi_1(\tau)v_2(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\psi_2(\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{36}$$

$(x,t)\in Q_T$,

$$a(t)=-a_1(t)a_2(t)\frac{v(0,t)\psi_0(t)}{\mu_3(t)},\quad t\in[0,T], \tag{37}$$

де $u_0(x,t) = u_{01}(x,t) - u_{02}(x,t), v_0(x,t) = v_{01}(x,t) - v_{02}(x,t)$, $G_1^i(x,t,\xi,\tau)$ – функції Гріна першої крайової задачі для рівнянь $u_t = a_i(t)\psi_0(t)u_{xx}, i = 1, 2$. Доведення єдиності будемо проводити, оцінюючи в рівнянні (37) вираз $v(0,t)$. Позначимо

$$\widetilde{a}_{\max}(t) \equiv \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |a_1(\tau) - a_2(\tau)|.$$

З формули (11) знаходимо $v_0(x,t)$

$$v_0(x,t) = \int_0^h (G_2^1(x,t,\xi,0) - G_2^2(x,t,\xi,0))\varphi'(\xi)d\xi + \int_0^t (G_2^1(x,t,0,\tau) - G_2^2(x,t,0,\tau))\times$$
$$\times (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau + \int_0^t (G_2^1(x,t,h,\tau) - G_2^2(x,t,h,\tau))(\mu_2'(\tau) - f(h,\tau))d\tau+$$
$$+ \int_0^t \int_0^h (G_2^1(x,t,\xi,\tau) - G_2^2(x,t,\xi,\tau))f_\xi(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Оцінимо вирази, що входять до $v_0(x,t)$. Для першого та четвертого доданків правильні такі оцінки:

$$R_1 \equiv \int_0^h |(G_2^1(x,t,\xi,0) - G_2^2(x,t,\xi,0))\varphi'(\xi)|d\xi \leqslant C_{33}\widetilde{a}_{\max}(t),$$
$$R_4 \equiv \int_0^t \int_0^h |(G_2^1(x,t,\xi,\tau) - G_2^2(x,t,\xi,\tau))f_\xi(\xi,\tau)|d\xi d\tau \leqslant C_{34}t\widetilde{a}_{\max}(t). \tag{38}$$

Для оцінки другого інтеграла, який входить до v_0, виділимо з ряду доданок, що відповідає $n = 0$

$$R_2 \equiv \int_0^t \left| \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}}\times\right.$$
$$\left.\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau \leqslant C_{35}\left(\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right)\times\right.$$
$$\times \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}}\right| d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \left|\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_2(t) - \theta_2(\tau))}\right)\right| d\tau + \int_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\Bigg|d\tau\Bigg)=C_{35}\sum_{i=1}^{3}R_{2i}.$$

Вираз R_{23} оцінимо так:

$$R_{23}=\int_0^t\left|\int_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4z}\right)\right)dz\right|d\tau\leqslant C_{36}\int_0^t|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-$$

$$-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|d\tau\leqslant C_{36}\int_0^t d\tau\int_\tau^t|a_1(\sigma)-a_2(\sigma)|\psi_0(\sigma)d\sigma\leqslant C_{36}\widetilde{a}_{\max}(t)\int_0^t d\tau\int_\tau^t\psi_0(\sigma)d\sigma.$$

Щоб оцінити R_{22}, використаємо (25) і нерівність $|e^x-e^y|\leqslant|x-y|\max\{e^x,e^y\}$

$$R_{22}\leqslant\frac{x^2}{4}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\left|\frac{1}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}-\frac{1}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right|\exp\left(-\frac{x^2}{C_{37}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right)d\tau=$$

$$=\frac{x^2}{4}\int_0^t\frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\exp\left(-\frac{x^2}{C_{37}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right)d\tau.$$

Враховуючи попередні оцінки, маємо

$$|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|\leqslant\int_\tau^t|a_1(\sigma)-a_2(\sigma)|\psi_0(\sigma)d\sigma\leqslant\widetilde{a}_{\max}(t)(\theta_0(t)-\theta_0(\tau)),$$

$$\theta_i(t)-\theta_i(\tau)\geqslant a_{\min}(t)\int_\tau^t\psi_0(\sigma)d\sigma\geqslant\frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}\int_\tau^t\psi_0(\sigma)d\sigma=\frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}(\theta_0(t)-\theta_0(\tau)).\tag{39}$$

Скористаємося відомою нерівністю $x^pe^{-qx^2}\leqslant C_{p,q}, x\geqslant 0, p\geqslant 0, q>0$ та (39) для подальшої оцінки R_{22}

$$R_{22}\leqslant C_{38}\widetilde{a}_{\max}(t)\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}=\frac{C_{38}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Вираз R_{21} подамо у вигляді

$$R_{21}=\int_0^t\exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\frac{|\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}-\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t\frac{|\theta_2(t)-\theta_2(\tau)-\theta_1(t)+\theta_1(\tau)|}{\sqrt{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}(\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}+\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)})}d\tau.$$

Враховуючи (39), отримаємо оцінку R_{21}

$$R_{21} \leqslant C_{39}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} = \frac{C_{39}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Остаточно для R_2 маємо

$$R_2 \leqslant \frac{C_{40}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Останній із доданків, що входить до $v_0(x,t)$, оцінюється аналогічно до попереднього

$$R_3 \equiv \int\limits_0^t \left| \frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+h(2n-1))^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2'(\tau)-f(h,\tau)}{\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+h(2n-1))^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right) \right| d\tau \leqslant \frac{C_{41}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}. \qquad (40)$$

Остаточно маємо

$$|v_0(x,t)| \leqslant \frac{C_{42}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}.$$

Вираз $|u_0(x,t)|$ оцінюється аналогічно

$$|u_0(x,t)| \leqslant C_{43}\widetilde{a}_{\max}(t).$$

Введемо функції $V(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|, U(t) \equiv \max\limits_{x\in[0,h]} |u(x,t)|$. Використавши отримані оцінки для $|u_0(x,t)|$ та $|v_0(x,t)|$, з рівнянь (35), (36) одержуємо

$$U(t) \leqslant C_{44}\widetilde{a}_{\max}(t) + C_{45}\int\limits_0^t (\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)U(\tau))d\tau, \qquad (41)$$

$$V(t) \leqslant \frac{C_{46}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)} + C_{47}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)+\psi_2(\tau)U(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \qquad (42)$$

Розв'язавши першу з цих нерівностей стосовно $U(t)$, маємо

$$U(t) \leqslant C_{48}\widetilde{a}_{\max}(t) + C_{49}\int\limits_0^t \psi_1(\tau)V(\tau)d\tau.$$

Підставимо отриману оцінку у (42)

$$V(t) \leqslant \frac{C_{50}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)} + C_{47}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_1(\tau)V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau +$$

$$+ C_{51}\sqrt{\frac{t}{\theta_0(t)}}\int\limits_0^t \frac{\psi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^\tau \psi_1(\sigma)V(\sigma)d\sigma.$$

Отриману нерівність щодо $V(t)$ розв'язуємо аналогічно до нерівності (26), після чого повертаємося до оцінки $U(t)$. Остаточно одержимо

$$V(t) \leqslant \frac{C_{52}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}, \qquad U(t) \leqslant C_{53}\widetilde{a}_{\max}(t), \quad t \in (0, t_0]$$

або

$$|v(x,t)| \leqslant \frac{C_{52}\widetilde{a}_{\max}(t)}{\chi(t)}, \qquad |u(x,t)| \leqslant C_{53}\widetilde{a}_{\max}(t), \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{43}$$

Покажемо відмінності в оцінці $v(0,t)$ від $v(x,t)$. При $x = 0$ нерівності (38) залишаються правильними. Підінтегральний вираз R_3 при $x = 0$ обмежений, отже, отримуємо $R_3 \leqslant C_{54}\widetilde{a}_{\max}(t)$. Для R_2 маємо

$$\widetilde{R}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right|(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\sum_{n=1}^\infty \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\sum_{n=1}^\infty \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}\right)\right|d\tau \equiv \widetilde{R}_{21} + \widetilde{R}_{22}.$$

Оцінимо $\widetilde{R}_{22}$

$$\widetilde{R}_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))\left|\int\limits_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=1}^\infty \exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\right)dz\right|d\tau \leq$$

$$\leqslant C_{55}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma.$$

Для оцінки $\widetilde{R}_{21}$ використаємо (39) та означення функції $H(t)$

$$\widetilde{R}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)-\theta_2(t)+\theta_2(\tau)|(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))}{\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}(\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}+\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)})}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+q)^3\widetilde{a}_{\max}(t)}{2\sqrt{\pi}H^3_{\min}(t)}\int\limits_0^t \frac{f(0,\tau)-\mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}d\tau \leqslant \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)\psi_0(t)}.$$

Отже, для $v_0(0,t)$ остаточно отримаємо

$$|v_0(0,t)| \leqslant \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)\psi_0(t)} + C_{56}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma + C_{57}\widetilde{a}_{\max}(t). \qquad (44)$$

Підставивши одержану оцінку у (36) та врахувавши (43), маємо

$$|v(0,t)| \leqslant \frac{(1+q)^3\mu_3(t)\widetilde{a}_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)\psi_0(t)} + C_{56}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t \psi_0(\sigma)d\sigma + C_{57}\widetilde{a}_{\max}(t)+$$

$$+ C_{58}\widetilde{a}_{\max}(t)\int\limits_0^t\left(\frac{\psi_1(\tau)}{\chi(\tau)} + \psi_2(\tau)\right)d\tau. \qquad (45)$$

Використовуючи (22), з рівняння (37) знаходимо

$$|a(t)| \leqslant \frac{H^4_{\max}(t)}{(1-q)^4}\frac{\psi_0(t)}{\mu_3(t)}|v(0,t)| \leq$$

$$\leqslant \left(\frac{(1+q)^3H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4H^4_{\min}(t)} + C_{59}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + F(t)\right)\widetilde{a}_{\max}(t)$$

або

$$\widetilde{a}_{\max}(t) \leqslant \left(\frac{(1+q)^4H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4H^4_{\min}(t)} + C_{59}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + F(t)\right)\widetilde{a}_{\max}(t), \qquad (46)$$

де функція $F(t) > 0$ набуває значення 0 при $t = 0$. З того, що $\lim\limits_{t\to+0} H_{\max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} H_{\min}(t)$, випливає, що для заданого $q, 0 < q < 1$, існує таке число $t^*, 0 < t^* \leqslant T$, що $\dfrac{H^4_{\max}(t)}{H^4_{\min}(t)} \leqslant 1 + q, \quad C_{59}\sqrt{\dfrac{\psi_0(t)}{t}} + F(t) \leqslant q, \quad t \in [0,t^*]$. Зафіксуємо число q так, щоб $0 < q < \dfrac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}+1}$. Отримаємо

$$\frac{(1+q)^4H^4_{\max}(t)}{2(1-q)^4H^4_{\min}(t)} + C_{59}\sqrt{\frac{\psi_0(t)}{t}} + F(t) \leqslant \frac{(1+q)^4}{2(1-q)^4}(1+q) + q < 1.$$

Тоді з (46) випливає $\widetilde{a}_{\max}(t) \equiv 0$ при $t \in [0,t_0]$, де $t_0 = \min\{t_1,t_2,t^*\}$. Звідси одержуємо $a(t) \equiv 0, t \in [0,t_0]$, $u(x,t) \equiv 0$, $v(x,t) \equiv 0, x \in [0,h], t \in [0,t_0]$. Отже, єдиність розв'язку задачі (1)-(4) з'ясовано, що завершує доведення теореми.

---

1. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation// J. Inv. Ill-Posed Probl.– 2006.– Vol.14.– №5.– P.1-16.

2. *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням// Укр. матем. журнал.– 2005.– Т.57, №11.– С.1563-1570.

3. *Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2005.– Вип.64.– С.245-257.

4. *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням// Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Математика.– 2006.– №288.– С.99-106.

5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М., 1967.

6. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства.– М., 1965.

A STRONGLY DEGENERATE INVERSE PARABOLIC PROBLEM WITH GENERAL BEHAVIOUR OF THE COEFFICIENTS OF THE EQUATION

Nataliya Saldina

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We consider an inverse problem for determining a time-dependent coefficient for the parabolic equation. The coefficient at the higher-order derivative is a product of an unknown function of time by known function which depends on time and vanishes at the initial moment. The behavior of another coefficients are given by known functions. Conditions of existence and uniqueness of classic solution for the problem are established.

Key words: inverse problem, Schauder fixed-point theorem, strong degeneration, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 19.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006