УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У СТАРШИХ КОЕФІЦІЄНТАХ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Роман САГАЙДАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Одержано умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі, що полягає в знаходженні старших коефіцієнтів двовимірного параболічного рівняння у випадку, коли вони є добутком двох функцій різних аргументів.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння.

На цьому етапі розвитку математичної науки задача визначення старших коефіцієнтів, що залежать від усіх незалежних змінних, у параболічному рівнянні загального вигляду залишається не розв'язаною. Зроблено спроби досліджувати подібні задачі у випадку простішої структури коефіцієнтів або неповного рівняння. В [1] визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежного лише від часу старшого коефіцієнта багатовимірного ізотропного рівняння теплопровідності в зв'язній області $\Omega \subset R^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$. Подібна задача для рівняння теплопровідності, але в прямокутнику, досліджена в [2], а в [3] – з молодшими членами в рівнянні. Обернена задача для анізотропного рівняння теплопровідності досліджена в [4].

Ми припускаємо, що старші коефіцієнти рівняння залежать від часової і від однієї з просторових змінних. Залежність від просторових змінних вважається відомою. Така сама задача, але з іншими крайовими умовами та умовами перевизначення розглянута в [5]. Одновимірна задача з аналогічною структурою старшого коефіцієнта досліджена в [6].

1. В області $\Omega_T = \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення трійки функцій $(a_1(t), a_2(t), u(x,y,t)) \in C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T), a_i(t) > 0, t \in [0,T], i = 1,2,$ що задовольняють рівняння

$$u_t = a_1(t)b_1(x)u_{xx} + a_2(t)b_2(y)u_{yy} + c_1(x,y,t)u_x + c_2(x,y,t)u_y + c_3(x,y,t)u + f(x,y,t),$$
$$(x,y,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову
$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l], \tag{2}$$

крайові умови
$$u_x(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u_x(h,y,t) = \mu_2(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$
$$u_y(x,0,t) = \mu_3(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \mu_4(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{4}$$

та умови перевизначення
$$u(0,0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,0,t) = \nu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Стосовно вихідних даних задачі будемо припускати виконання таких умов:

$(A1)$ $\varphi \in C^2(\overline{D})$, де $D = (0,h) \times (0,l)$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T]), i = 1,2, \mu_i \in C^{2,1}([0,h] \times [0,T]), i = 3,4, \nu_i \in C^1[0,T], i = 1,2, b_1 \in C^2[0,h], b_2 \in C^2[0,l], f \in C^{2,2,0}(\overline{\Omega}_T), c_i \in C^{1,1,0}(\overline{\Omega}_T), i = 1,2,3;$

$(A2)$ $S_1(t) \equiv \nu_1'(t) - c_1(0,0,t)\mu_1(0,t) - c_2(0,0,t)\mu_3(0,t) - c_3(0,0,t)\nu_1(t) - f(0,0,t) \geqslant 0$, $S_2(t) \equiv \nu_2'(t) - c_1(h,0,t)\mu_2(0,t) - c_2(h,0,t)\mu_3(h,t) - c_3(h,0,t)\nu_2(t) - f(h,0,t) \geqslant 0$, $b_1(0)S_2(t) - b_1(h)S_1(t) > 0$, $S_1(t) - S_2(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $b_1(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $b_2(y) > 0$, $y \in [0,l], b_1(0) - b_1(h) > 0, \varphi_{xx}(x,y) > 0, \varphi_{yy}(x,y) > 0, (x,y) \in [0,h] \times [0,l]$, $\varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(\zeta),y) - \varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(H-\zeta),y) \geqslant 0$, $\varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(\zeta),y) - \varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(H-\zeta),y) \leqslant 0$, $(\zeta,y) \in [0,H/2] \times [0,l]$, де $\beta_k(s) = \int\limits_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{b_k(\sigma)}}$, $k = 1,2$, $H = \beta_1(h)$;

$(A3)$ $\varphi_x(0,y) = \mu_1(y,0), \varphi_x(h,y) = \mu_2(y,0), \varphi_y(x,0) = \mu_3(x,0), \varphi_y(x,l) = \mu_4(x,0)$, $\mu_{1y}(0,t) = \mu_{3x}(0,t)$, $\mu_{2y}(0,t) = \mu_{3x}(h,t)$, $\mu_{1y}(l,t) = \mu_{4x}(0,t)$, $\mu_{2y}(l,t) = \mu_{4x}(h,t)$, $\nu_1(0) = \varphi(0,0)$, $\nu_2(0) = \varphi(h,0)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(A1)$–$(A3)$. *Тоді задача (1)–(5) має розв'язок в області* $\overline{\Omega}_{T_0}$, *де* $T_0,\ 0 < T_0 \leqslant T$, *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припустивши, що функції $a_i(t)$, $i = 1,2$ відомі, обернену задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь стосовно функцій $a_1(t)$, $a_2(t)$, $u(x,y,t)$ та похідних від функції $u(x,y,t)$ до другого порядку включно.

Пряма задача (1)–(4) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1'(\xi))u_\xi +$$
$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2'(\eta))u_\eta + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{6}$$

де $u_0(x,y,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_{0t} = a_1(t)b_1(x)u_{0xx} + a_2(t)b_2(y)u_{0yy} + \frac{1}{2}a_1(t)b_1^{'}(x)u_{0x} + \frac{1}{2}a_2(t)b_2^{'}(y)u_{0y} + f(x,y,t),$$

$$(x,y,t) \in \Omega_T, \tag{7}$$

який задовольняє умови (2)–(4).

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} u_0(x,y,t) = & \int_0^l \int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta - \\ & - b_1(0)\int_0^t \int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau + \\ & + b_1(h)\int_0^t \int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau - \\ & - b_2(0)\int_0^t \int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ & + b_2(l)\int_0^t \int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))b_1(\xi)b_2(\eta)}}\times$$

$$\times \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(\beta_1(x)-\beta_1(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)+(-1)^i\exp\left(-\frac{(\beta_1(x)+\beta_1(\xi)+2nH)^2}{4(\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau))}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{(\beta_2(y)-\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))}\right)+(-1)^j\exp\left(-\frac{(\beta_2(y)+\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4(\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau))}\right)\right),$$

$i,j = 1,2,$

$$\alpha_k(t) = \int_0^t a_k(\tau)d\tau, \ L = \beta_2(l).$$

Продиференціювавши рівність (6) за змінними x та y і ввівши позначення $u_x = u_1, u_y = u_2$, отримаємо

$$u_1(x,y,t) = u_{0x}(x,y,t) + \int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1^{'}(\xi))u_1 +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2^{'}(\eta))u_2 + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T, \qquad (9)$$

$$u_2(x,y,t) = u_{0y}(x,y,t) + \int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1^{'}(\xi))u_1 +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2^{'}(\eta))u_2 + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \qquad (10)$$

З врахуванням введених позначень (6) набере вигляду

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((c_1(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_1(\tau)b_1^{'}(\xi))u_1 +$$

$$+(c_2(\xi,\eta,\tau) - \frac{1}{2}a_2(\tau)b_2^{'}(\eta))u_2 + c_3(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_T. \qquad (11)$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial x}G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{b_1(\xi)}}{\sqrt{b_1(x)}}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{b_2(\eta)}}{\sqrt{b_2(y)}}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right),$$

$$a_1(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\right) +$$

$$+a_2(\tau)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial \tau}G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau), \qquad (12)$$

знайдемо похідні від функції $u_0(x,y,t)$ за просторовими змінними

$$u_{0x}(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{b_1(x)}}\left(\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \right.$$

$$+b_1(0)\int_0^t\int_0^l \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\xi=0} a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau -$$

$$-b_1(h)\int_0^t\int_0^l \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\xi=h}a_1(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$b_2(0)\int_0^t\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}\times G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\mu_{3\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+b_2(l)\int_0^t\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\mu_{4\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$\left.+\int_0^t\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_1(\xi)}G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\right), \tag{13}$$

$$u_{0y}(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{b_2(y)}}\left(\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta-\right.$$

$$-b_1(0)\int_0^t\int_0^l \sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+b_1(h)\int_0^t\int_0^l \sqrt{b_2(\eta)}\times$$

$$\times G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+b_2(0)\int_0^t\int_0^h \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\eta=0}\times$$

$$\times a_2(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau-b_2(l)\int_0^t\int_0^h \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\right)\Big|_{\eta=l}a_2(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$\left.+\int_0^t\int_0^l\int_0^h \sqrt{b_2(\eta)}G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau\right). \tag{14}$$

Так само знайдемо похідні u_{0xx} та u_{0yy}

$$u_{0xx}(x,y,t)=-\frac{b_1'(x)}{2b_1(x)}u_{0x}(x,y,t)+$$

$$+\frac{1}{b_1(x)}\left(\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\left(b_1(\xi)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\varphi_\xi(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta-\right.$$

$$-b_1(0)\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)\Big(\mu_{1\tau}(\eta,\tau)-f_\xi(0,\eta,\tau)-(b_2(\eta)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{1\eta}(\eta,\tau)\Big)\,a_2(\tau)\Big)d\eta d\tau+b_1(h)\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)\Big(\mu_{2\tau}(\eta,\tau)-f_\xi(h,\eta,\tau)-$$

$$-\Big(b_2(\eta)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\;+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{2\eta}(\eta,\tau)\Big)\,a_2(\tau)\Big)\,d\eta d\tau-$$

$$-b_2(0)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a_2(\tau)\left(b_1(\xi)\mu_{3\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\;\mu_{3\xi}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau\;+$$

$$+b_2(l)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)a_2(\tau)\left(b_1(\xi)\mu_{4\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\mu_{4\xi}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\left(b_1(\xi)f_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau)+\frac{b_1'(\xi)}{2}f_\xi(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau\Bigg), \tag{15}$$

$$u_{0yy}(x,y,t)=-\frac{b_2'(y)}{2b_2(y)}u_{0y}(x,y,t)+$$

$$+\frac{1}{b_2(y)}\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\left(b_2(\eta)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\frac{b_2'(\eta)}{2}\varphi_\eta(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta-\right.$$

$$-b_1(0)\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a_1(\tau)\left(b_2(\eta)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{1\eta}(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau+$$

$$+b_1(h)\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a_1(\tau)\left(b_2(\eta)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\frac{b_2'(\eta)}{2}\mu_{2\eta}(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau-$$

$$-b_2(0)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\Big(\mu_{3\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,0,\tau)-\Big(b_1(\xi)\mu_{3\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+\frac{b_1'(\xi)}{2}\mu_{3\xi}(\xi,\tau)\Big)a_1(\tau)\Big)d\xi d\tau+b_2(l)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\Big(\mu_{4\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,l,\tau)-$$

$$-\left(b_1(\xi)\mu_{4\xi\xi}(\xi,\tau)+\frac{b_1'(\xi)}{2}\mu_{4\xi}(\xi,\tau)\right)a_1(\tau)\Big)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\left(b_2(\eta)f_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)+\frac{b_2'(\eta)}{2}f_\eta(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau\Bigg). \tag{16}$$

Позначимо $u_{xx}=u_3, u_{yy}=u_4, u_{xy}=u_5$. Використовуючи (12), з (9), (10) з'ясовуємо, що

$$u_3(x,y,t)=u_{0xx}(x,y,t)+\frac{1}{\sqrt{b_1(x)}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\sqrt{b_1(\xi)}\times$$

$$\times\Bigg(\bigg(c_{1\xi}(\xi,\eta,\tau)+c_3(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_1(\tau)}{2}b_1''(\xi)\bigg)u_1+c_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)u_2+$$

$$+\bigg(c_1(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_1(\tau)}{2}b_1'(\xi)\bigg)u_3+$$

$$+\bigg(c_2(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_2(\tau)}{2}b_2'(\eta)\bigg)u_5+c_{3\xi}(\xi,\eta,\tau)u\Bigg)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{\Omega}_T, \tag{17}$$

$$u_4(x,y,t)=u_{0yy}(x,y,t)+\frac{1}{\sqrt{b_2(y)}}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{21y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\sqrt{b_2(\eta)}\times$$

$$\times\Bigg(c_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)u_1+\bigg(c_{2\eta}(\xi,\eta,\tau)+c_3(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_2(\tau)}{2}b_2''(\eta)\bigg)u_2+$$

$$+\bigg(c_2(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_2(\tau)}{2}b_2'(\eta)\bigg)u_4+$$

$$+\bigg(c_1(\xi,\eta,\tau)-\frac{a_1(\tau)}{2}b_1'(\xi)\bigg)u_5+c_{3\eta}(\xi,\eta,\tau)u\Bigg)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{\Omega}_T. \tag{18}$$

Для знаходження мішаної похідної u_{xy} тимчасово припустимо, що коефіцієнти c_i, $i=\overline{1,3}$ достатньо гладкі. Продиференціюємо рівняння (1) та умову (2) за x і за y, умову (3) за y, а умову (4) за x. В отриманій задачі використаємо позначення $u_{xy}=u_5$. Записуючи її розв'язок за допомогою функції Гріна та інтегруючи частинами доданки, що містять похідні від функції $u_5(x,y,t)$ та другі похідні від функцій $c_i(x,y,t)$, $i=\overline{1,3}$, отримаємо

$$u_5(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta+\sqrt{b_1(0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}\bigg(G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\sqrt{b_1(\xi)}\bigg)\Big|_{\xi=0}a_1(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-\sqrt{b_1(h)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}\bigg(\sqrt{b_1(\xi)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\bigg)\Big|_{\xi=h}\times$$

$$\times a_1(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+\sqrt{b_2(0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{\partial}{\partial\eta}\bigg(\sqrt{b_2(\eta)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\bigg)\Big|_{\eta=0}a_2(\tau)\times$$

$$\times\mu_{3\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau--\sqrt{b_2(l)}\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{\partial}{\partial\eta}\bigg(\sqrt{b_2(\eta)}G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\bigg)\Big|_{\eta=l}a_2(\tau)\mu_{4\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(a_1(\tau)b_1^{''}(\xi)+a_2(\tau)b_2^{''}(\eta))u_5 d\xi d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h\Bigg(G_{11\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg(\Bigg(c_1(\xi,\eta,\tau)+\frac{1}{2}a(\tau)b_1^{'}(\xi)\Bigg)u_5+c_3(\xi,\eta,\tau)u_2+c_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)u_1+$$

$$+c_{3\eta}(\xi,\eta,\tau)u+f_\eta(\xi,\eta,\tau)\Bigg)+$$

$$+G_{11\eta}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Bigg(\Bigg(c_2(\xi,\eta,\tau)+\frac{1}{2}a(\tau)b_2^{'}(\eta)\Bigg)u_5+c_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)u_2\Bigg)\Bigg)d\xi d\eta d\tau. \qquad (19)$$

З (19) видно, що ніяких додаткових припущень на гладкість коефіцієнтів рівняння (1) не потрібно.

Виведемо з (5) рівняння для знаходження функцій $a_1(t)$ та $a_2(t)$. Спочатку приймемо в (1) $x=0$, $y=0$. Тоді

$$u_t(0,0,t)=a_1(t)b_1(0)u_3(0,0,t)+a_2(t)b_2(0)u_4(0,0,t)+c_1(0,0,t)u_1(0,0,t)+$$

$$+c_2(0,0,t)u_2(0,0,t)+c_3(0,0,t)u(0,0,t)+f(0,0,t).$$

Продиференціювавши перше співвідношення в (5), матимемо

$$u_t(0,0,t)=\nu_1'(t).$$

Прирівнявши праві частини двох останніх рівностей і врахувавши крайові умови (3), (4) та умову перевизначення (5), одержуємо

$$a_1(t)b_1(0)u_3(0,0,t)+a_2(t)b_2(0)u_4(0,0,t)+c_1(0,0,t)\mu_1(0,t)+c_2(0,0,t)\mu_3(0,t)+$$

$$+c_3(0,0,t)\nu_1(t)+f(0,0,t)=\nu_1'(t), \quad t\in[0,T]. \qquad (20)$$

Співвідношення

$$a_1(t)b_1(h)u_3(h,0,t)+a_2(t)b_2(0)u_4(h,0,t)+c_1(h,0,t)\mu_2(0,t)+c_2(h,0,t)\mu_3(h,t)+$$

$$+c_3(h,0,t)\nu_2(t)+f(h,0,t)=\nu_2'(t), \quad t\in[0,T], \qquad (21)$$

знаходиться так само.

Розв'язуючи систему (20), (21) стосовно невідомих функцій $a_1(t)$ та $a_2(t)$, приходимо до такої системи:

$$a_1(t)S_3(t)=S_1(t)u_4(h,0,t)-S_2(t)u_4(0,0,t), \quad t\in[0,T], \qquad (22)$$

$$a_2(t)b_2(0)S_3(t)=S_2(t)b_1(0)u_3(0,0,t)-S_1(t)b_1(h)u_3(h,0,t), \quad t\in[0,T], \qquad (23)$$

де $S_3(t)=b_1(0)u_3(0,0,t)u_4(h,0,t)-b_1(h)u_3(h,0,t)u_4(0,0,t)$.

Визначимо оцінку функції $S_3(t)$ знизу. Зобразимо її так:

$$S_3(t)=(b_1(0)-b_1(h))u_3(h,0,t)u_4(h,0,t)+b_1(0)u_4(h,0,t)(u_3(0,0,t)-u_3(h,0,t))+$$

$$+b_1(h)u_3(h,0,t)(u_4(h,0,t)-u_4(0,0,t)), \quad t\in[0,T], \tag{24}$$

і покажемо, що в (24) перший доданок додатний, інші – невід'ємні на деякому ненульовому часовому проміжку.

З умови (A2) та (13)–(16) випливає, що при $t=0$ в (17), (18) є лише додатні доданки, а всі інші обертаються в нуль. Тому

$$u_3(x,y,0)=\frac{1}{b_1(x)}\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,0,\xi,\eta,0)b_1(\xi)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta=\varphi_{xx}(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{25}$$

$$u_4(x,y,0)=\frac{1}{b_2(y)}\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,0,\xi,\eta,0)b_2(\eta)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta=\varphi_{yy}(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}. \tag{26}$$

Отже, існує $T_1, 0<T_1\leqslant T$ таке, що правильні оцінки

$$u_3(x,y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min\varphi_{xx}(x,y)=C_1>0, \quad (x,y)\in\overline{D}, t\in[0,T_1], \tag{27}$$

$$u_4(x,y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min\varphi_{yy}(x,y)=C_2>0, \quad (x,y)\in\overline{D}, t\in[0,T_1]. \tag{28}$$

Використавши (25), запишемо $u_3(x,0,t)$ в такому вигляді:

$$u_3(x,0,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,0,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,0,t,\xi,\eta,0)\frac{b_1(\xi)-b_1(x)}{b_1(x)}\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+O(t), \tag{29}$$

де на основі теореми 1 [7, с. 15] другий доданок в (29) прямує до нуля, коли $t\to 0$. Розглянемо різницю

$$u_3(0,0,t)-u_3(h,0,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h\left(G_{22}(0,0,t,\xi,\eta,0)-G_{22}(h,0,t,\xi,\eta,0)\right)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta+O(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_1(t)\alpha_2(t)}}\int\limits_0^l\frac{1}{\sqrt{b_2(\eta)}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4\alpha_2(t)}\right)d\eta\times$$

$$\times\int\limits_0^h\frac{\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)}{\sqrt{b_1(\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\beta_1(\xi)+nH)^2}{4\alpha_1(t)}\right)d\xi+O(t), \tag{30}$$

де в інтегралі за змінною ξ проведемо заміну змінних $\beta_1(\xi) = \zeta$ і розіб'ємо його на два: від 0 до $H/2$ і від $H/2$ до H. В інтегралі від $H/2$ до H зробимо заміну $H - \zeta = s$. Після нескладних перетворень матимемо

$$u_3(0,0,t) - u_3(h,0,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_1(t)\alpha_2(t)}} \int\limits_0^l \frac{1}{\sqrt{b_2(\eta)}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\beta_2(\eta)+2mL)^2}{4\alpha_2(t)}\right) d\eta \times$$

$$\times \int\limits_0^{\frac{H}{2}} \left(\varphi_{\xi\xi}(\beta_1^{-1}(\zeta),\eta) - \varphi_{\xi\xi}(\beta_1^{-1}(H-\zeta),\eta)\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\zeta+nH)^2}{4\alpha_1(t)}\right) d\zeta + O(t). \tag{31}$$

Врахувавши (A2), з (31) випливає існування такого T_2, $0 < T_2 \leqslant T$, що правильна оцінка

$$u_3(0,0,t) - u_3(h,0,t) \geqslant 0, \quad t \in [0, T_2]. \tag{32}$$

Так само знаходимо аналогічне співвідношення для різниці других похідних за змінною y:

$$u_4(0,0,t) - u_4(h,0,t) \leqslant 0, \quad t \in [0, T_3]. \tag{33}$$

Враховуючи (27), (28) та (32), (33), з (24) отримуємо оцінку

$$S_3(t) \geqslant \frac{(b_1(0) - b_1(h))}{4} C_1 C_2 > 0, \quad t \in [0, T_4], \tag{34}$$

де $T_4 = \min\limits_{i=\overline{1,3}} T_i$.

Тоді на основі (34) з (22), (23) визначаємо систему для знаходження невідомих функцій $a_k(t), k = 1, 2$

$$a_1(t) = \frac{S_1(t)u_4(h,0,t) - S_2(t)u_4(0,0,t)}{S_3(t)}, \quad t \in [0, T_4], \tag{35}$$

$$a_2(t) = \frac{S_2(t)b_1(0)u_3(0,0,t) - S_1(t)b_1(h)u_3(h,0,t)}{b_2(0)S_3(t)}, \quad t \in [0, T_4]. \tag{36}$$

Отож, задача (1)-(5) зведена до системи рівнянь (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) і розв'язок цієї задачі та функції $u_1 = u_x(x,y,t), u_2 = u_y(x,y,t), u_3 = u_{xx}(x,y,t), u_4 = u_{yy}(x,y,t), u_5 = u_{xy}(x,y,t)$ задовольняють цю систему. З іншого боку, якщо $(a_1(t), a_2(t), u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in (C[0,T]^2 \times (C(\overline{\Omega}_{T_4})^6), a(t) > 0, t \in [0, T_4])$ – розв'язок цієї системи, то, використовуючи властивість єдиності розв'язку систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, легко визначити, що $u_1 = u_x, u_2 = u_y, u_3 = u_{xx}, u_4 = u_{yy}, u_5 = u_{xy}$ і функція $u(x,y,t)$ є розв'язком рівняння (6). На основі властивостей об'ємних потенціалів [7], визначаємо, що $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_{T_4})$ і є розв'язком задачі (1)-(4). Виконання умов (5) випливає з рівностей (35), (36).

Отже, вихідна задача і система рівнянь (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) еквівалентні при $(x,y) \in \overline{D}, t \in [0, T_4]$.

Для доведення існування розв'язку отриманої системи використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [8]. Передусім з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків цієї системи.

Оскільки

$$a_1(t) = \frac{S_1(t)(u_4(h,0,t) - u_4(0,0,t))}{S_3(t)} + \frac{(S_1(t) - S_2(t))u_4(0,0,t)}{S_3(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_1(t)}{b_1(h)u_3(h,0,t)} + \frac{S_1(t) - S_2(t)}{(b_1(0) - b_1(h))u_3(h,0,t)} = \frac{b_1(0)S_1(t) - b_1(h)S_2(t)}{b_1(h)(b_1(0) - b_1(h))u_3(h,0,t)},\ t \in [0,T_4],$$

де в другому доданку $S_3(t)$ записано в такому вигляді:

$$S_3(t) = (b_1(0) - b_1(h))u_3(h,0,t)u_4(0,0,t) + b_1(0)u_4(0,0,t)(u_3(0,0,t) - \\ - u_3(h,0,t)) + b_1(0)u_3(0,0,t)(u_4(h,0,t) - u_4(0,0,t)).$$

Використавши (27), з попередньої нерівності одержимо оцінку $a(t)$ зверху

$$a_1(t) \leqslant \frac{\max\limits_{t\in[0,T]}(b_1(0)S_1(t) - b_1(h)S_2(t))}{C_1 b_2(h)(b_1(0) - b_1(h))} = C_3 < \infty, \quad t \in [0,T_4]. \tag{37}$$

Таким самим способом визначаємо, що

$$a_2(t) \leqslant C_4 < \infty, \quad t \in [0,T_4]. \tag{38}$$

Для оцінки $a_i(t)$, $i = 1,2$ знизу попередньо оцінимо $|u(x,y,t)|$, $|u_k(x,y,t)|$, $k = \overline{1,5}$, зверху.

Зі співвідношення (11), з врахуванням (37), (38) знаходимо, що

$$U_0(t) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^t (U_0(\tau) + U_1(\tau) + U_2(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T_4], \tag{39}$$

де $U_0(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y,t)|, U_k(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u_k(x,y,t)|, k = \overline{1,5}$.

Так само з (9), (10) отримуємо

$$U_1(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{U_0(\tau) + U_1(\tau) + U_2(\tau)}{\sqrt{\alpha_1(t) - \alpha_1(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,T_4], \tag{40}$$

$$U_2(t) \leqslant C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{U_0(\tau) + U_1(\tau) + U_2(\tau)}{\sqrt{\alpha_2(t) - \alpha_2(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,T_4]. \tag{41}$$

Тоді з (17)-(19) випливає, що

$$U_3(t) \leqslant C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha_1(t) - \alpha_1(\tau)}} +$$

$$+C_{13}\int\limits_0^t \frac{U_0(\tau)+U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)+U_5(\tau)}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,T_4], \tag{42}$$

$$U_4(t)\leqslant C_{14}+C_{15}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}+$$

$$+C_{16}\int\limits_0^t \frac{U_0(\tau)+U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_4(\tau)+U_5(\tau)}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,T_4], \tag{43}$$

$$U_5(t)\leqslant C_{17}+C_{18}\int\limits_0^t U_5(\tau)d\tau+C_{19}\int\limits_0^t \frac{(U_0(\tau)+U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_5(\tau))d\tau}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}+$$

$$+C_{20}\int\limits_0^t \frac{U_2(\tau)+U_5(\tau)}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}d\tau, \quad t\in[0,T_4]. \tag{44}$$

Позначимо $\sum\limits_{i=0}^{5}U_i(t)=U(t)$. Додавши (39)-(44), з'ясовуємо, що справджується нерівність

$$U(t)\leqslant C_{21}+C_{22}\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}\right)d\tau+$$

$$+C_{23}\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(t)-\alpha_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2(t)-\alpha_2(\tau)}}\right)U(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T_4]. \tag{45}$$

Введемо таку функцію:

$$A(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{\min\limits_{\tau\in[0,t]}a_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\min\limits_{\tau\in[0,t]}a_2(\tau)}}.$$

Оцінимо знизу знаменники підінтегральних виразів в (45)

$$U(t)\leqslant C_{21}+C_{24}\sqrt{t}A(t)+C_{25}A(t)\int\limits_0^t\frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,T_4].$$

Запишемо цю нерівність у такому вигляді:

$$U(t)\leqslant p(t)+q(t)\int\limits_0^t\frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t\in[0,T_4], \tag{46}$$

де $p(t)=C_{21}+C_{24}\sqrt{t}A(t)$, $q(t)=C_{25}A(t)$. Домножимо (46) на $\sqrt{t-\sigma}$ і проінтегруємо від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{U(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant \int\limits_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + \int\limits_0^t \frac{q(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \int\limits_0^\sigma \frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}, \quad t\in[0,T_4]. \tag{47}$$

Змінимо порядок інтегрування в останньому доданку і врахуємо рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\tau)(\sigma-\tau)}} = \pi$$

та монотонність функції $q(t)$, внаслідок чого отримаємо оцінку

$$\int\limits_0^t \frac{U(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \leqslant \int\limits_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + \pi q(t)\int\limits_0^t U(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T_4]. \tag{48}$$

Підставимо (48) в (46) і введемо позначення $\psi(t)\equiv p(t)+q(t)\int\limits_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}$, $\chi(t)\equiv \pi q^2(t)$

$$U(t)\leqslant \psi(t)+\chi(t)\int\limits_0^t U(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T_4]. \tag{49}$$

Ліву і праву частину (49) розділимо на $\chi(t)$ і позначимо $\omega(t)\equiv \dfrac{\psi(t)}{\chi(t)}+\int\limits_0^t U(\tau)d\tau$. Тоді

$$U(t)\leqslant \chi(t)\omega(t). \tag{50}$$

Оскільки

$$\omega'(t)=\left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)'+U(t)\leqslant \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)'+\chi(t)\omega(t),$$

то справджується нерівність

$$\omega'(t)-\chi(t)\omega(t)\leqslant \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)',$$

з якої випливає таке співвідношення:

$$\left(\omega(t)e^{-\int\limits_0^t \chi(\sigma)d\sigma}\right)' \leqslant \left(\frac{\psi(t)}{\chi(t)}\right)' e^{-\int\limits_0^t \chi(\sigma)d\sigma}. \tag{51}$$

Зінтегруємо (51) на проміжку від 0 до t. Обчислюючи інтеграли, отриманій нерівності надамо такого вигляду:

$$\omega(t) \leqslant e^{\int\limits_0^t \chi(\sigma)d\sigma}\left(\frac{\psi(0)}{\chi(0)} + \int\limits_0^t \left(\frac{\psi(\tau)}{\chi(\tau)}\right)' e^{-\int\limits_0^\tau \chi(\sigma)d\sigma} d\tau\right) = \frac{\psi(t)}{\chi(t)} + \int\limits_0^t \psi(\tau)e^{\int\limits_\tau^t \chi(\sigma)d\sigma} d\tau.$$

Підставляючи останню нерівність в (50), з'ясовуємо, що

$$U(t) \leqslant \psi(t) + \chi(t)\int\limits_0^t \psi(\tau)e^{\int\limits_\tau^t \chi(\sigma)d\sigma} d\tau.$$

Повернувшись до функцій $p(t)$, $q(t)$ та змінивши порядок інтегрування, матимемо таку нерівність:

$$U(t) \leqslant p(t) + q(t)\int\limits_0^t \frac{p(\sigma)d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} + \pi q^2(t)\Bigg(\int\limits_0^t p(\tau)e^{\pi\int\limits_\tau^t q^2(\sigma)d\sigma} d\tau + \\ + \int\limits_0^t p(z)dz\int\limits_z^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{\tau - z}} e^{\pi\int\limits_\tau^t q^2(\sigma)d\sigma} d\tau\Bigg). \tag{52}$$

Врахувавши вигляд функцій $p(t), q(t)$, надамо (52) такого вигляду:

$$U(t) \leqslant C_{21} + C_{24}\sqrt{t}A(t) + C_{25}A(t)\int\limits_0^t \frac{C_{21} + C_{24}\sqrt{\tau}A(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\ + \pi C_{25}^2 A^2(t)\Bigg(\int\limits_0^t \Big(C_{21} + +C_{24}\sqrt{\tau}A(\tau)\Big)e^{C_{25}^2\pi\int\limits_\tau^t A^2(\sigma)d\sigma} d\tau + \\ + C_{25}\int\limits_0^t \Big(C_{21} + C_{24}\sqrt{z}A(z)\Big)dz\int\limits_z^t \frac{A(\tau)}{\sqrt{\tau - z}} e^{C_{25}^2\pi\int\limits_\tau^t A^2(\sigma)d\sigma} d\tau\Bigg). \tag{53}$$

Оцінивши експоненти в (53) зверху і порахувавши одержані інтеграли, матимемо

$$U(t) \leqslant C_{21} + C_{26}\sqrt{t}A(t) + C_{27}tA^2(t) + \\ + e^{C_{25}^2\pi\int\limits_0^t A^2(\sigma)d\sigma}\Big(C_{28}tA^2(t) + C_{29}t^{\frac{3}{2}}A^3(t) + C_{30}t^2A^4(t)\Big).$$

Застосувавши нерівність Коші, приходимо до такого співвідношення:

$$U(t) \leqslant C_{31} + C_{32}tA^2(t) + \big(C_{33}t + C_{34}t^2A^4(t)\big)\, e^{C_{25}^2\pi\int\limits_0^t A^2(\tau)d\tau}. \tag{54}$$

З (35), (36), враховуючи додатність функцій u_3, u_4 на $[0,T_4]$, визначаємо такі оцінки:

$$a_1(t) \geqslant \frac{S_1(t)-S_2(t)}{b_1(0)u_3(0,0,t)}, \quad a_2(t) \geqslant \frac{(S_2(t)b_1(0)-S_1(t)b_1(h))}{b_1(0)b_2(0)u_4(h,0,t)}, \quad t \in [0,T_4],$$

звідки випливає, що

$$a_i(t) \geqslant \frac{C_{35}}{U(t)}, \quad i=1,2, \quad t \in [0,T_4]. \tag{55}$$

Оскільки знаменник правої частини (55) є монотонно зростаючою функцією, то справджується така нерівність:

$$\min_{\tau\in[0,t]} a_i(\tau) \geqslant \frac{C_{35}}{U(t)}, \quad i=1,2, \quad t \in [0,T_4].$$

Тоді

$$A(t) \leqslant C_{36}\sqrt{U(t)}, \quad t \in [0,T_4]$$

і (54) матиме такий вигляд:

$$A^2(t) \leqslant C_{37} + C_{38}tA^2(t) + \left(C_{39}t + C_{40}t^2A^4(t)\right)e^{C_{25}^2\pi\int\limits_0^t A^2(\tau)d\tau}. \tag{56}$$

Позначимо $A^2(t) \equiv w(t)$ і знайдемо T_5, $0 < T_5 \leqslant T$ таке, щоб $C_{38}T_5 \leqslant 1/2$. Тоді з (56) випливає, що

$$w(t) \leqslant C_{41} + \left(C_{42}t + C_{43}t^2w^2(t)\right)e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}, \quad t \in [0,T_6],$$

де $T_6 = \min\{T_4, T_5\}$. Звідси

$$w(t)\left(1 - C_{43}t^2w(t)e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}\right) \leqslant C_{41} + C_{42}te^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}, \quad t \in [0,T_6].$$

Існує T_7, $0 < T_7 \leqslant T$ таке, що $1 - C_{43}t^2w(t)e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau} \geqslant 1/2$, $t \in [0,T_7]$. Тоді

$$w(t) \leqslant C_{45} + C_{46}te^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau}, \quad t \in [0,T_8], \tag{57}$$

де $T_8 = \min\{T_6, T_7\}$. Провівши заміну $e^{C_{44}\int\limits_0^t w(\tau)d\tau} \equiv z(t)$ та врахувавши, що $z(t) \geqslant 1$, (57) запишемо так:

$$\frac{z'(t)}{z^2(t)} \leqslant \frac{C_{44}C_{45}}{z(t)} + C_{44}C_{46}t \leqslant C_{47} + C_{48}t, \quad t \in [0,T_8]. \tag{58}$$

Зінтегруємо (58) на проміжку від 0 до t. Після перетворення матимемо

$$z(t) \leqslant \frac{1}{1 - C_{47}t - C_{49}t^2}, \quad t \in [0, T_8]. \tag{59}$$

Виберемо T_9, $0 < T_9 \leqslant T$ так, щоб $1 - C_{47}T_9 - C_{49}T_9^2 > 0$ і перепозначимо $T_0 = \min\{T_8, T_9\}$. З (59) отримуємо

$$z(t) \leqslant C_{50}, \quad t \in [0, T_0],$$

звідки, повернувшись до старих позначень, знаходимо оцінку

$$U(t) \leqslant C_{51}, \quad t \in [0, T_0].$$

Тоді з системи нерівностей (39)-(44) визначаємо такі оцінки:

$$|u(x,y,t)| \leqslant C_{52} < \infty, \quad |u_i(x,y,t)| \leqslant C_{53} < \infty, \quad i = \overline{1,5}, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega}_{T_0}. \tag{60}$$

За допомогою нерівностей (60) з (55) матимемо

$$a_i(t) \geqslant A_0 > 0, i = 1, 2, \quad t \in [0, T_0]. \tag{61}$$

При наявності апріорних оцінок розв'язків системи (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) перевірка умов теореми Шаудера проводиться аналогічно до роботи [2]. Теорему 1 доведено.

2. Розглянемо попередню задачу в класі функцій, неперервних за Гельдером. В області Ω_T дослідимо існування розв'язку оберненої задачі знаходження трійки функцій $(a_1, a_2, u) \in H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), 0 < \gamma < 1, a_i(t) > 0, i = 1, 2, t \in [0,T]$, що задовольняють умови (1)-(5). Правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай, крім умов (A2), (A3), виконується умова:*

$(A1')$ $\varphi \in H^{2+\gamma}(\overline{D}), \mu_i \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}([0,l]\times[0,T]), i = 1, 2, \mu_i \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}([0,h]\times[0,T]), i = 3, 4, \nu_i \in H^{1+\gamma/2}[0,T], i = 1, 2, b_1 \in C^2[0,h], b_2 \in C^2[0,l], f \in H^{2,2,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), c_i \in H^{1,1,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), i = \overline{1,3}.$

Тоді задача (1)-(5) має розв'язок в класі $H^{\gamma/2}[0,T_0] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$, де $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, визначається вихідними даними задачі.

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1, лише треба з'ясувати, що розв'язок системи (9)-(11), (17)-(19), (35), (36) належить класу функцій, неперервних за Гельдером $(a, u, u_i) \in H^{\gamma/2}[0,T_0] \times (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0}))^6$, $i = \overline{1,5}$.

Для ядер $K_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ інтегральних рівнянь (9)-(11), (17)-(19) справджуються оцінки

$$\int_0^l \int_0^h |K_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)| d\xi d\eta \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$\int_0^t \int_0^l \int_0^h |K_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)| d\xi d\eta d\tau \leqslant C_2\sqrt{t}.$$

Тому згідно з теоремою 4 [9, с. 422] отримуємо, що $(u, u_i) \in (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0}))^6$, $i = \overline{1,5}$. Тоді з системи рівнянь (35)-(36) випливає, що $a_i(t) \in H^{\gamma/2}[0, T_0]$, $i = 1, 2$ і на основі теореми 5.3 [10, с. 364] робимо висновок, що $u(x, y, t) \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$.

3. Перейдемо до питання єдиності розв'язку задачі (1)-(5).

Теорема 3. *Нехай справджується умова*

(A4) $c_i(x, y, t) \in H^{\gamma,\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$, $i = \overline{1,3}$, $b_1(x) \in H^\gamma[0, h]$, $b_1(x) > 0$, $b_2(y) \in H^\gamma[0, l]$, $b_2(y) > 0$, $b_1(0) - b_1(h) > 0$, $\varphi_{xx}(x, y) > 0$, $\varphi_{yy}(x, y) > 0$, $(x, y) \in [0, h] \times [0, l]$, $\varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(\zeta), y) - \varphi_{xx}(\beta_1^{-1}(H - \zeta), y) \geqslant 0$, $\varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(\zeta), y) - \varphi_{yy}(\beta_1^{-1}(H - \zeta), y) \leqslant 0$, $(\zeta, y) \in [0, H/2) \times [0, l]$.

Тоді розв'язок задачі (1)-(5) єдиний в класі $H^{\gamma/2}[0, T_0^*] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0^*})$, *де число* $T_0^*, 0 < T_0^* \leqslant T$ *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки цієї задачі $(a_{11}, a_{12}, u_1), (a_{21}, a_{22}, u_2)$. Введемо такі позначення $A_1(t) = a_{11}(t) - a_{21}(t), A_2(t) = a_{12}(t) - a_{22}(t), U(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$. Тоді трійка функцій (A_1, A_2, U) задовольняє умови

$$U_t = a_{11}(t)b_1(x)U_{xx} + a_{12}(t)b_2(y)U_{yy} + A_1(t)b_1(x)u_{2xx} + A_2(t)b_2(y)u_{2yy}+$$

$$+c_1(x, y, t)U_x + c_2(x, y, t)U_y + c_3(x, y, t)U, \quad (x, y, t) \in \Omega_T, \tag{62}$$

$$U(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in [0, h] \times [0, l], \tag{63}$$

$$U_x(0, y, t) = U_x(h, y, t) = 0, \quad (y, t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{64}$$

$$U_y(x, 0, t) = U_y(x, l, t) = 0, \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, T], \tag{65}$$

$$U(0, 0, t) = U(h, 0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{66}$$

Використовуючи функцію Гріна G_{22}^* задачі (62)-(65), її розв'язок зобразимо так:

$$U(x, y, t) = \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{22}^*(x, y, t, \xi, \eta, \tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta d\tau, \tag{67}$$

$$(x, y, t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Приймемо в (62) $x = 0, y = 0$, врахуємо умови (63)-(66) і зображення розв'язку (67). Отримаємо

$$-\big(A_1(t)b_1(0)u_{2xx}(0, 0, t) + A_2(t)b_2(0)u_{2yy}(0, 0, t)\big) =$$

$$= a_{11}(t)b_1(0) \int_0^t d\tau \int_0^l \int_0^h G_{22xx}^*(0, 0, t, \xi, \eta, \tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta + a_{12}(t)b_2(0) \int_0^t d\tau \int_0^l \int_0^h G_{22yy}^*(0, 0, t, \xi, \eta, \tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+ A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta, \qquad t \in [0, T]. \tag{68}$$

Аналогічно, при $x = h, y = 0$ матимемо

$$-\big(A_1(t)b_1(h)u_{2xx}(h,0,t) + A_2(t)b_2(0)u_{2yy}(h,0,t)\big) =$$

$$= a_{11}(t)b_1(h)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22xx}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta + a_{12}(t)b_2(0)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22yy}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\big(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+$$

$$+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\big)d\xi d\eta, \qquad t \in [0,T]. \tag{69}$$

Розв'язуючи (68), (69) стосовно невідомих функцій $A_2(t), A_2(t)$, приходимо до такої системи:

$$-A_1(t)\bigg(b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)u_{2yy}(h,0,t) - b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)u_{2yy}(0,0,t)\bigg) =$$

$$= a_{11}(t)\bigg(b_1(0)u_{2yy}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22xx}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(h)u_{2yy}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22xx}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta\bigg)+$$

$$+a_{12}(t)b_2(0)\bigg(u_{2yy}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22yy}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta-$$

$$-u_{2yy}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \int\limits_0^h G^*_{22yy}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi} + A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\bigg)d\xi d\eta\bigg), \tag{70}$$

$$-A_2(t)b_2(0)\bigg(b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)u_{2yy}(0,0,t) - b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)u_{2yy}(h,0,t)\bigg) =$$

$$= a_{11}(t)b_1(0)b_1(h)\Bigg(u_{2xx}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22xx}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta-$$

$$-u_{2xx}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22xx}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta\Bigg)+$$

$$+a_{12}(t)b_2(0)\Bigg(b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22yy}(0,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta-$$

$$-b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h G^*_{22yy}(h,0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(A_1(\tau)b_1(\xi)u_{2\xi\xi}+A_2(\tau)b_2(\eta)u_{2\eta\eta}\Bigg)d\xi d\eta\Bigg). \tag{71}$$

Оскільки функції $(a_{21}(t), a_{21}(t), u_2(x,y,t))$ є розв'язком задачі (1)-(5), то з умови $(A4)$ випливає, що $b_1(0)u_{2xx}(0,0,t)u_{2yy}(h,0,t)-b_1(h)u_{2xx}(h,0,t)u_{2yy}(0,0,t)>0$, $t\in[0,T_0^*]$. Отже, (70), (71) – система однорідних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами, і внаслідок єдиності її розв'язку $A_i(t)\equiv 0$, $i=1,2$, $t\in[0,T_0^*]$. Позаяк розв'язок прямої задачі єдиний, то робимо висновок, що $U(x,y,t)\equiv 0$, $(x,y,t)\in\overline{\Omega}_{T_0^*}$. Теорему доведено.

---

1. *Cannon J., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation// Journal of mathematical analysis and application.– 1991.– 160.– P.572-582.

2. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1996.– Вип. 45.– С.96-103.

3. *Сагайдак Р. В.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу в прямокутнику // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2003.– Вип. 62.– С.117-128.

4. *Іванчов М. І.* Обернена задача теплопровідності в анізотропному тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2000.– 43, № 1.– С.45-50.

5. *Сагайдак Р. В.* Про існування та єдиність розв'язку оберненої задачі визначення старших коефіцієнтів у двовимірному параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2005.– Вип. 64.– С.236-244.

6. *Іванчов М. І.* Про одну обернену задачу для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1997.– Вип. 47.– С.63-71.

7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.– М., 1968.

8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.– М., 1965.

9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.– М., 1977.

10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М., 1967.

DETERMINATION OF UNKNOWN PARAMETERS IN MAJOR COEFFICIENTS OF TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Roman Sagaydak

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

There are obtained some conditions of the existence and uniqueness of a solution for inverse problem with unknown parameters in major coefficients of two-dimensional parabolic equation. We assumed that these coefficients have the form of product of two functions depending on the time and one of the space variables accordingly.

Key words: inverse problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 02.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006