ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.151–165 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.151–165*

УДК 517.95

ВАГОВІ КЛАСИ КОРЕКТНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Петро ПУКАЧ

Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

Досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійного рівняння п'ятого порядку в обмеженій за часовою та необмеженій за просторовими змінними області. Розглянуте рівняння узагальнює рівняння $u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + |u_t|^{p-2}u_t = f$, $p > 2$, яке вивчають в теорії пружності. Отримано умови існування єдиного узагальненого розв'язку. Класи існування та єдиності — вагові соболєвські простори функцій.

Ключові слова: нелінійне рівняння коливань балки, метод Гальоркіна.

Досліджено першу мішану задачу для слабко нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\left(a_{\alpha\beta}(x,t) D^{\alpha} u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\left(b_{\alpha\beta}(x,t) D^{\alpha} u\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_{\alpha}(x,t) D^{\alpha} u + g(x,u_t) = f(x,t), \qquad (1)$$

де $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, ..., n$, в необмеженій за просторовими змінними області. Рівняння та системи вигляду (1) вивчають у теорії пружності [1]. Рівняння (1) узагальнює модель коливання балки у середовищі з опором. Зокрема, у праці [1] досліджено існування слабких розв'язків мішаних задач в обмеженій області для деякої системи лінійних рівнянь з частинними похідними, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки.

Відповідне рівняння такої системи є частинним випадком рівняння вигляду (1) за умов $n=1$, $a_{\alpha\beta}=0$, $b_{\alpha\beta}=0$, $0\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant 1$, $c_\alpha=0$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant 2$, $g=0$. Крайові умови різного вигляду описують різноманітні механічні моделі, які вивчають у теорії пружності. Задача динамічного в'язкопружного тертя зі зношуванням вперше розглянута в праці [2], в [3] досліджено динамічний контакт між балкою та рухомою поверхнею, термопружний контакт вивчено в [4].

Задачі для лінійних і нелінійних еволюційних рівнянь та систем з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною у необмежених областях розглядали у багатьох працях (див., наприклад, [5–20]). Деякі результати існування єдиного розв'язку задач у цих працях отримані в припущенні певної якісної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати – без таких припущень. У [21] вивчено мішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Праця [22] присвячена дослідженню першої мішаної задачі для слабко нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку в необмеженій за просторовими змінними області.

У цій праці класи коректності розв'язку мішаної задачі є певними ваговими соболевськими просторами функцій, які описують якісну поведінку розв'язку на нескінченності, яка залежить від правої частини рівняння та початкових даних задачі.

Формулювання задачі. Означення узагальненого розв'язку.

В області $Q_T=\Omega\times(0,T)$, де $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $0<T<\infty$, розглядаємо для рівняння (1) мішану задачу з початковими умовами
$$u|_{t=0}=u_0(x), \tag{2}$$
$$u_t|_{t=0}=u_1(x) \tag{3}$$
та крайовими умовами
$$u|_{S_T}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{S_T}=0, \tag{4}$$
$S_T=\partial\Omega\times(0,T)$ – бічна поверхня області Q_T, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускаємо, що Ω – необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, $\Omega^R=\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|<R\}$ – зв'язна множина для довільного $R>1$ з регулярною за Кальдероном [23, с. 45] межею $\partial\Omega^R$. Зауважимо, зокрема, що опукла область Ω задовольняє усі зазначені умови [23, с.46, заув. 1.11]. Позначимо $Q_\tau=\Omega\times(0,\tau)$, $Q_\tau^R=\Omega^R\times(0,\tau)$ для довільних $\tau\in(0,T]$, $R>1$.

Розглядаємо функцію ψ з такими властивостями:

(Ψ) функція $\psi\in C^2(\mathbb{R})$ – монотонна при $\xi\to+\infty$, $\psi:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $|\psi'(\xi)|\leqslant M_1\psi(\xi)$, $|\psi''(\xi)|\leqslant M_2\psi(\xi)$, де M_1, M_2 – додатні сталі.

Зауваження. Прикладами функції ψ можуть бути, зокрема, $\psi(\xi)=(1+\xi)^\alpha$, $\alpha=\mathrm{const}$, $\psi(\xi)=e^{\beta\xi}$, $\beta=\mathrm{const}$ тощо.

Використовуємо простори з ваговою функцією ψ
$$L^{r,\psi}(\Omega)=\Big\{u:\int\limits_\Omega|u|^r\psi(|x|)dx<+\infty\Big\},\quad r\in(1,+\infty),$$

$$\|u\|_{L^{r,\psi}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^r \psi(|x|)dx \right)^{1/r},$$

$H_0^{2,\psi}(\Omega)$ – замикання простору нескінченно диференційовних в області $\overline{\Omega}$ функцій з компактним носієм за нормою $\|u\|_{H_0^{2,\psi}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2} |D^\alpha u|^2 \psi(|x|)dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $H^{4,\psi}(\Omega)$ – замикання простору нескінченно диференційовних в області $\overline{\Omega}$ функцій за нормою $\|u\|_{H^{4,\psi}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant 4} |D^\alpha u|^2 \psi(|x|)dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Позначимо далі $V = H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap H^{4,\psi}(\Omega)$.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускаємо виконання таких умов.

A. Функції $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta,t}$ ($|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$), $D^2 a_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $D^1 a_{\alpha\beta}(|\alpha|=|\beta|=1)$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geq a_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел $\xi_\alpha, |\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де $a_{0,2} = \mathrm{const}>0$; $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant 2$.

B. Функції $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta,t}$ ($|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$), $D^2 b_{\alpha\beta}$ ($|\alpha| = |\beta| = 2$), $D^1 b_{\alpha\beta}$ ($|\alpha| = |\beta| = 1$) належать до $L^\infty(Q_T)$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geq b_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де $b_{0,2} = \mathrm{const} > 0$; $b_{\alpha\beta}(x,t) = b_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant 2$.

C. Функції c_α, $c_{\alpha,t}$ належать до $L^\infty(Q_T)$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$.

G. Функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x, неперервна за η, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$: $(g(x,\xi) - g(x,\eta))(\xi - \eta) \geq g_0 |\xi - \eta|^p$, $|g(x,\eta)| \leq g_1 |\eta|^{p-1}$, де g_0, g_1 – додатні сталі, $p > 2$; функція g_ξ – неперервна за змінною ξ для майже всіх $x \in \Omega$.

F. $f \in L^{p'}((0,T); L^{p',\psi}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$; $f_t \in L^2((0,T); L^{2,\psi}(\Omega))$.

U. $u_0 \in H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap H^{4,\psi}(\Omega)$, $u_1 \in H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap H^{4,\psi}(\Omega) \cap L^{2p-2,\psi}(\Omega)$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) називаємо функцію* $u \in C([0,T]; H_0^{2,\psi}(\Omega))$ *таку, що* $u_t \in C\Big([0,T]; \Big(H_0^{2,\psi}(\Omega) \cap L^{p,\psi}(\Omega)\Big)^*\Big) \cap L^2\Big((0,T); H_0^{2,\psi}(\Omega)\Big) \cap L^p\Big((0,T); L^{p,\psi}(\Omega)\Big)$, *яка задовольняє умову (2) та інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[-u_t v_t \psi(|x|) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} \left(a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t + b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u\right) D^\beta(v\psi(|x|)) \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(x,t) D^\alpha u v \psi(|x|) + g(x,u_t) v\psi(|x|) - f(x,t) v\psi(|x|) \Big] dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega} u_t(x,\tau)v(x,\tau)\psi(|x|)dx - \int\limits_{\Omega} u_1(x)v(x,0)\psi(|x|)dx = 0 \tag{5}$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ *та для довільної функції* $v \in L^2((0,T);H_0^{2,\psi}(\Omega))\cap L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$ *такої, що* $v_t \in L^2((0,T);L^{2,\psi}(\Omega))$.

Теорема існування та єдиності.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(**Ψ**), (A), (B), (C), (G), (F), (U)**. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* u *задачі* (1) – (4) *в області* Q_T*, для якого*

$$\int\limits_{\Omega} \Big[|u_t(x,\tau)|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u(x,\tau)|^2 \Big]\psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_t|^2 + |u_t|^p\,\psi(|x|)\Big]dxdt \leq$$

$$\leq C_0 \left(\|f\|^{p'}_{L^{p'}((0,T);L^{p',\psi}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{H_0^{2,\psi}(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^{2,\psi}(\Omega)} \right) \tag{6}$$

для довільного $\tau \in (0,T]$*, де* C_0 *– додатна стала, яка залежить від* n*,* p*,* ψ *та коефіцієнтів* $a_{\alpha\beta}$*,* $b_{\alpha\beta}$ *(*$|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$*),* c_α *(*$1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$*),* g *рівняння* (1).

Доведення. Існування. Виберемо послідовність областей $\{\Omega^k\}$, $k = 2,3,....$ Позначимо далі $S_T^k = \partial\Omega^k \times (0,T)$, $f^k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \ |x| \le k, \\ 0, \ |x| > k, \end{cases}$ $u_0^k(x) = u_0(x)\xi_k(x)$, $u_1^k(x) = u_1(x)\xi_k(x)$, причому $\xi_k \in C^4(\mathbb{R}^n)$, $\xi_k(x) = \begin{cases} 1, \ |x| \le k-1, \\ 0, \ |x| > k, \end{cases}$ $0 \le \xi_k(x) \le 1$. Зрозуміло, що $u_0^k \to u_0$ сильно в $H_0^{2,\psi}(\Omega)$, $u_1^k \to u_1$ сильно в $L^{2,\psi}(\Omega)$ при $k \to \infty$. Розглянемо в Q_T^k $(k = 2,3,...)$ мішану задачу

$$u_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}D^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u\right) +$$

$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u + g(x,u_t) = f^k(x,t), \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = u_0^k(x), \tag{8}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1^k(x), \tag{9}$$

$$u|_{S_T^k} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T^k} = 0. \tag{10}$$

На підставі результатів [24] можна стверджувати, що в Q_T^k існує узагальнений розв'язок u^k задачі (7)–(10) такий, що $u^k \in C([0,T];H_0^2(\Omega^k))$, $u_t^k \in C\left([0,T];L^2(\Omega^k)\right) \cap L^\infty\left((0,T);H_0^2\left(\Omega^k\right)\right) \cap L^p\left(Q_T^k\right)$, $u_{tt}^k \in L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega^k)\right) \cap L^2\left((0,T);H_0^2\left(\Omega^k\right)\right)$. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (7)–(10) для $k=2$, $k=3$,..., довизначивши u^k нулем на $Q_T \backslash Q_T^k$. Отримаємо послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q_T, яку для зручності знову позначимо $\{u^k\}$. Приймемо $v = u_t^k$ та $f = f^k$ в інтегральній рівності (5). Використовуючи умови теореми та результати [24], отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_t^k(x,\tau)|^2\psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(g(x,u_t^k)u_t^k-f^k u_t^k\right)\psi(|x|)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx=0. \qquad (11)$$

Для наступних перетворень використаємо формулу Лейбніца похідної добутку функції багатьох змінних

$$D^\lambda(f_1f_2)=\sum_{\lambda^1\leqslant\lambda}\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^1\end{pmatrix}D^{\lambda^1}f_1D^{\lambda-\lambda^1}f_2,\quad \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \lambda_n^1\end{pmatrix},$$

причому підсумовування ведеться за всіма мультиіндексами $\lambda^1=(\lambda_1^1,...,\lambda_n^1)$ такими, що $0\leqslant\lambda_i^1\leqslant\lambda_i$ для всіх $i=1,...,n$. Отож, одержимо з рівності (11)

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta u_t^k\psi(|x|)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\sigma u_t^k D^{\beta-\sigma}\psi(|x|)dxdt\ +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k u_t^k D^\beta\psi(|x|)dxdt=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3.$$

Інтеграл $\mathcal{I}_1$ оцінимо так:

$$\mathcal{I}_1\geq a_{0,2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt.$$

Для оцінки інтеграла $\mathcal{I}_2$ використаємо нерівність

$$\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w|^2\psi(|x|)dx\leqslant\delta_0\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2\psi(|x|)dx+C(\delta_0)\int\limits_\Omega|w|^2\psi(|x|)dx, \qquad (12)$$

$\delta_0>0$, $C(\delta_0)>0$, правильну для довільної функції $w\in H_0^{2,\psi}(\Omega)$. Доведемо нерівність (12), записавши очевидну рівність

$$\int\limits_\Omega\Delta ww\psi(|x|)dx=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_ix_i}w\psi(|x|)dx=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\left(w_{x_i}w\psi(|x|)\right)_{x_i}dx-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\psi(|x|)dx-$$

$$-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}w\psi_{x_i}(|x|)dx=-\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\psi(|x|)dx\ -\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n w_{x_i}w\psi_{x_i}(|x|)dx.$$

Далі за нерівністю Коші одержимо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}w|^{2}\,\psi(|x|)dx=-\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}D^{\alpha}ww\psi(|x|)dx-\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}D^{\alpha}wwD^{\alpha}\psi(|x|)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}w|^{2}\,\psi(|x|)dx+\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\Omega}|w|^{2}\,\psi(|x|)dx+\frac{a}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}w|^{2}\,\psi(|x|)dx\,+$$

$$+\,M(a)\int\limits_{\Omega}|w|^{2}\,\psi(|x|)dx,$$

де $\delta>0$, $a\leqslant 1$, $M(a)>0$. З цієї нерівності легко отримати (12).

Використовуючи (12), маємо

$$\mathcal{I}_2\leqslant C_1\delta_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt+C_2\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2\psi(|x|)dxdt.$$

Крім того,

$$\mathcal{I}_3\leq C_3\delta_2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt\;+\;C_4\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt.$$

В останніх двох оцінках δ_1, δ_2 – довільні додатні сталі, стала $C_1>0$ залежить від $a_2=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{\alpha\beta}(x,t)|$, M_1, n, стала $C_2>0$ залежить від a_2, M_1, δ_1, стала $C_3>0$ залежить від a_2, M_2, n, стала $C_4>0$ залежить від a_2, δ_2, M_2.

Перетворимо далі

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u_t^k\psi(|x|)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\sigma}u_t^kD^{\beta-\sigma}\psi(|x|)dxdt\,+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^ku_t^kD^{\beta}\psi(|x|)dxdt=\mathcal{I}_4+\mathcal{I}_5+\mathcal{I}_6.$$

Оцінимо інтеграли $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_5$, $\mathcal{I}_6$.

$$\mathcal{I}_4=\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u^k\psi(|x|)\right)_t dxdt\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta,t}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u^k\psi(|x|)dxdt\geqslant\frac{b_{0,2}}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0)D^{\alpha}u_0^kD^{\beta}u_0^k\psi(|x|)dx - C_5\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

C_5 – деяка додатна стала, що залежить від $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in Q_T}|b_{\alpha\beta,t}(x,t)|$, n;

$$\mathcal{I}_5 \le C_6\delta_3\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_7\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + \\ + C_8\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

δ_3 – довільна додатна стала, C_6, C_7, C_8 – деякі додатні сталі, що залежать від $b_2 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in Q_T}|b_{\alpha\beta}(x,t)|$, M_1, n;

$$\mathcal{I}_6 \le C_9\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{10}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

C_9 – деяка додатна стала, що залежить від b_2, M_2, C_{10} – деяка додатна стала, що залежить від b_2, n, ψ. Крім того,

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2} c_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u^Nu_t^N\psi(|x|)dxdt \leqslant \frac{c_2n}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u^N\right|^2\psi(|x|)dxdt + \\ + \frac{c_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^2\psi(|x|)dxdt, \quad c_2 = \max_{|\alpha|=2}\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T}|c_{\alpha}(x,t)|.$$

Аналогічно до отриманих перетворень і оцінок одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t^kD^{\beta}\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t^kD^{\beta}u_t^k\psi(|x|)dxdt + \\ + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t^ku_t^kD^{\beta}\psi(|x|)dxdt = \mathcal{I}_7 + \mathcal{I}_8;$$

$$\mathcal{I}_7 \leqslant C_{11}\delta_4\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{12}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

$$\mathcal{I}_8 \le C_{13}\delta_5\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{14}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt,$$

δ_4, δ_5 – довільні додатні сталі, $C_{11} > 0$ залежить від $a_1 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in Q_T}|a_{\alpha\beta}(x,t)|$, n, $C_{13} > 0$ залежить від a_1, ψ, n, $C_{12} > 0$ залежить від a_1, δ_4, ψ, $C_{14} > 0$ залежить від a_1, δ_5, M_1. Крім того, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^kD^{\beta}u_t^k\psi(|x|)dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k u_t^k D^\beta\psi(|x|)dxdt = \mathcal{I}_9+\mathcal{I}_{10};$$

$$\mathcal{I}_9=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^k D^\alpha\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]\psi(|x|)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}(b_1,T,n)\delta_6\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{16}(b_1,T,\delta_6)\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2\psi(|x|)dxdt +$$

$$+C_{17}(b_1,\delta_6)\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u_0^k\right|^2\psi(|x|)dx,$$

$b_1=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{\alpha\beta}(x,t)|$, $\delta_6>0$ – довільна стала, $C_{15}>0$, $C_{16}>0$, $C_{17}>0$;

$$\mathcal{I}_{10}=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x,t)u_t^k D^\alpha\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]D^\beta\psi(|x|)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}(b_1,M_1,T)\delta_7\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + C_{19}(b_1,M_1,\delta_7,T)\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dx +$$

$$+C_{20}(b_1,M_1,\delta_7)\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u_0^k\right|^2\psi(|x|)dx,$$

δ_7 – довільна додатна стала, $C_{18}>0$, $C_{19}>0$, $C_{20}>0$.

Завершимо оцінювання інтегралів рівності (11)

$$\int\limits_{Q_\tau} a_{00}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt \leqslant a_0\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt, \quad a_0=\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{00}(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} b_{00}(x,t)u^k u_t^k\psi(|x|)dxdt = \int\limits_{Q_\tau} b_{00}(x,t)\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]u_t^k\psi(|x|)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant b_0\Big(T+\frac{1}{2}\Big)\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^k\right|^2\psi(|x|)dxdt + \frac{b_0T}{2}\int\limits_\Omega\left|u_0^k\right|^2\psi(|x|)dx, \quad b_0=\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|b_{00}(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)dxdt =$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(x,t)D^\alpha\Big[u_0^k(x)+\int\limits_0^t u_t^k(x,\tau)d\tau\Big]u_t^k\psi(|x|)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{21}(c_1, n, T)\delta_8 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dxdt + C_{22}(c_1, \delta_8, T) \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dx +$$

$$+ C_{23}(c_1, \delta_8) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u_0^k(x)\right|^2 \psi(|x|)dx,$$

δ_8 – довільна додатна стала, $c_1 = \max\limits_{|\alpha|=1} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |c_\alpha(x,t)|$, $C_{21} > 0$, $C_{22} > 0$, $C_{23} > 0$;

$$\int\limits_{Q_\tau} g(x, u_t^k)u_t^k \psi(|x|)dxdt \geq g_0 \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^p \psi(|x|)dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} f^k u_t^k \psi(|x|)dxdt \leq \delta_9 \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^p \psi(|x|)dxdt + C_{24} \int\limits_{Q_\tau} \left|f^k\right|^{p'} \psi(|x|)dxdt,$$

δ_9 – довільна додатна стала, C_{24} – деяка додатна стала, що залежить від δ_9, p.

Враховуючи наведені оцінки, з рівності (11) отримаємо

$$\int\limits_\Omega \left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 \psi(|x|)dx + 2\big(a_{0,2} - C_1\delta_1 - C_3\delta_2 - C_6\delta_3 - C_{11}\delta_4 - C_{13}\delta_5 - C_{15}\delta_6 - C_{18}\delta_7 -$$

$$- C_{21}\delta_8\big) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dxdt + b_{0,2} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2 \psi(|x|)dx +$$

$$+2\,(g_0 - \delta_9) \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^p \psi(|x|)dxdt \leq 2\big(C_2 + C_4 + C_8 + C_9 + \frac{c_2}{2} +$$

$$+ C_{12} + C_{14} + C_{16} + C_{19} + a_0 + b_0\big(T + \frac{1}{2}\big) + C_{22}\big) \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^k\right|^2 \psi(|x|)dxdt +$$

$$+ 2\left(C_5 + C_7 + C_{10} + \frac{c_2 n}{2}\right) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k\right|^2 \psi(|x|)dxdt + 2C_{24} \int\limits_{Q_\tau} \left|f^k\right|^{p'} \psi(|x|)dxdt +$$

$$+ 2\big(C_{17} + C_{20} + C_{23}\big) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u_0^k\right|^2 \psi(|x|)dx + b_0 T \int\limits_\Omega \left|u_0^k\right|^2 \psi(|x|)dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega |u_1^k|^2 \psi(|x|)dx + \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x,0) D^\alpha u_0^k(x) D^\beta u_0^k(x) \psi(|x|)dx.$$

Якщо позначимо $y(\tau) = \int\limits_\Omega \Big[\left|u_t^k(x,\tau)\right|^2 + \sum\limits_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha u^k(x,\tau)\right|^2\Big]\psi(|x|dx$, то отримаємо оцінку $y(\tau) \leqslant C_{25} + C_{26} \int\limits_0^\tau y(t)dt$, де C_{25}, C_{26} – деякі додатні сталі, що не залежать від

u^k. Тоді на підставі леми Гронуола, вибравши належно достатньо малі сталі $\delta_1 - \delta_9$, робимо висновок, що

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\big|u_t^k(x,\tau)\big|^2+\sum_{|\alpha|=2}\big|D^\alpha u^k(x,\tau)\big|^2\Big]\psi(|x|)dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\big|u_t^k\big|^p+\sum_{|\alpha|=2}\big|D^\alpha u_t^k\big|^2\Big]\psi(|x|)dxdt\leqslant C_{27} \tag{13}$$

для всіх $0<\tau\le T$, C_{27} – додатна стала, яка не залежить від k. З нерівності (13) випливає існування підпослідовності $\{u^{k_s}\}\subset\{u^k\}$ такої, що

$$u^{k_s}\to u\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);H_0^{2,\psi}(\Omega)),$$

$$u_t^{k_s}\to u_t\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);L^{2,\psi}(\Omega)),$$

$$u_t^{k_s}\to u_t\quad \text{слабко в}\quad L^2((0,T);H_0^{2,\psi}(\Omega))\cap L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$$

при $k_s\to\infty$. Використовуючи [25, с.20, лема 1.2], маємо $u\in C\left([0,T];H_0^2(\Omega)\right)$. Міркуючи подібно до [25, с.234], отримаємо також, що $u_t\in C\left([0,T];(H_0^{2,\psi}(\Omega)\cap L^{p,\psi}(\Omega))^*\right)$. Оскільки $u^{k_s}(\cdot,0)\to u(\cdot,0)$ слабко в $H_0^{2,\psi}(\Omega)$, $u_0^{k_s}\to u_0$ сильно в $H_0^{2,\psi}(\Omega)$, то $u(x,0)=u_0(x)$, $x\in\Omega$. Аналогічно до [25, с.236] показуємо також, що $u_t(x,0)=u_1(x)$, $x\in\Omega$. Зауважимо, що для довільного $k\in\mathbb{N}$

$$\big\|u_t^k\big\|_{L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))}\le C_{28},\quad C_{28}=\text{const}>0. \tag{14}$$

З нерівності (14), врахувавши умову (**G**), легко отримати, що

$$\int\limits_{Q_T}\big|g(x,u_t^k)\big|^{p'}dxdt\le C_{29},\quad C_{29}>0. \tag{15}$$

З нерівностей (14)–(15) робимо висновок (переходячи у разі потреби до підпослідовностей), що $g(x,u_t^k)\to z$ слабко в $L^{p'}((0;T);L^{p',\psi}(\Omega))$. Подібно до [25, с. 236–237] покажемо, що $z=g(x,u_t)$. З рівності (11) легко одержимо

$$\int\limits_{\Omega}|u_t^k(x,\tau)|^2\psi(|x|)dx+2\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)dxdt+$$

$$+2\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt+$$

$$+2\int\limits_{Q_\tau}\left(g(x,u_t^k)u_t^k-f^k u_t^k\right)\psi(|x|)dxdt-\int\limits_{\Omega}|u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx=0. \tag{16}$$

На підставі збіжностей, отриманих для послідовності $\left\{u^k\right\}$ вище, з (16) маємо

$$\int\limits_{\Omega} |u_t(x,T)|^2\psi(|x|)dx + 2\int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t D^\beta\left(u_t\psi(|x|)\right)dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta\left(u_t\psi(|x|)\right) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u u_t\psi(|x|)\Big]dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q_T}(z-f)\,u_t\psi(|x|)dxdt - \int\limits_{\Omega}|u_1(x)|^2\psi(|x|)dx = 0. \tag{17}$$

Наша мета — отримати оцінку

$$\int\limits_{Q_T}(z-g(x,v))\,(u_t-v)\,\psi(|x|)dxdt \geq 0 \tag{18}$$

для довільної функції $v\in L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$. Для цього розглянемо

$$0\leq I_k = \int\limits_{Q_T}\left(g(x,u_t^k)-g(x,v)\right)\left(u_t^k - v\right)\psi(|x|)dxdt = \int\limits_{Q_T} g(x,u_t^k)u_t^k\psi(|x|)dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_T} g(x,u_t^k)v\psi(|x|)dxdt - \int\limits_{Q_T} g(x,v)\left(u_t^k-v\right)\psi(|x|)dxdt.$$

Використовуючи (16), одержимо

$$\int\limits_{Q_T} g(x,u_t^k)u_t^k\psi(|x|)dxdt = \int\limits_{Q_T} f^k u_t^k\psi(|x|)dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t^k(x,T)|^2\psi(|x|)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx - \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta(u_t^k\psi|x|)dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta\left(u_t^k\psi(|x|)\right) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt.$$

Тому можна стверджувати, що

$$0\leq I_k = \int\limits_{Q_T} f^k u_t^k\psi(|x|)dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t^k(x,T)|^2\psi(|x|)dx - \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t^k D^\beta(u_t^k\psi(|x|))dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^k D^\beta(u_t^k\psi(|x|)) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^k u_t^k\psi(|x|)\Big]dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_1^k(x)|^2\psi(|x|)dx-\int\limits_{Q_T}g(x,u_t^k)v\psi(|x|)dxdt-\int\limits_{Q_T}g(x,v)\left(u_t^k-v\right)\psi(|x|)dxdt.$$

Звідси [23, с.20, лема 5.3] одержимо

$$0\le\limsup I_k=\int\limits_{Q_T}fu_t\psi(|x|)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_t(x,T)|^2\psi(|x|)dx-\int\limits_{Q_T}zv\psi(|x|)dxdt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}g(x,v)\left(u_t-v\right)\psi(|x|)dxdt-\int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_tD^\beta(u_t\psi(|x|))dxdt-$$
$$-\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha uD^\beta(u_t\psi(|x|))+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}c_\alpha(x,t)D^\alpha uu_t\psi(|x|)\Big]dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_1(x)|^2\psi(|x|)dx. \tag{19}$$

Додавши (17) та (19), отримаємо нерівність (18). Прийнявши в нерівності (18) $v=u_t-\lambda\chi$, $\lambda>0$, $\chi\in L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))$ – довільна функція, робимо висновок, що $\lambda\int\limits_{Q_T}(z-g(x,u_t-\lambda\chi))\,\chi\psi(|x|)dxdt\ \ge\ 0$, звідки $\int\limits_{Q_T}(z-g(x,u_t))\,\chi\psi(|x|)dxdt\ \ge\ 0$ при $\lambda\to+\ 0$. Отже, $z=g(x,u_t)$, тобто $g(x,u_t^k)\to g(x,u_t)$ слабко в $L^{p'}((0,T);L^{p',\psi}(\Omega))$. При цьому u задовольняє інтегральну тотожність (5), виконуються умови (2), (4). Отож, u – узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) в Q_T. Правильність оцінки (6) доводиться так само, як отримано нерівність (13).

Єдиність. Якщо u^1 та u^2 – два довільних розв'язки задачі (1) – (4), то аналогічно до (6) можна одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\left|u_t^1(x,\tau)-u_t^2(x,\tau)\right|^2+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha\left(u^1(x,\tau)-u^2(x,\tau)\right)\right|^2\Big]\psi(|x|)dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha\left(u_t^1-u_t^2\right)\right|^2+\left|u_t^1-u_t^2\right|^p\Big]\psi(|x|)dxdt\ \le 0$$

для всіх $0<\tau\le T$. Отже, $u^1=u^2$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено.

Висновки. У цій праці доповнено результати, отримані при дослідженні мішаної задачі для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій області, викладені в [22], на випадок еволюційного рівняння, яке узагальнює відоме рівняння теорії пружності. Вивчення крайових задач для згаданого рівняння є сучасною та актуальною проблемою [1–4]. Продовженням описаних досліджень може бути знаходження класів коректності розв'язку мішаної задачі для рівняння типу (1) з нелінійними доданками вищого порядку у вагових соболєвських просторах та в просторах локально інтегровних функцій.

1. *Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam// J. Math. Anal. And Appl.– **242.**– 2000.– P. 212-236.

2. *Strömberg N., Johansson L., Klarbring A.* Derivation and analysis of a generalized standard model for a contact friction and wear// Internat. J. Solids Structures – **13.**– 1996.– P. 1817-1836.

3. *Andrews K.T., Shillor M., Wright S.* On the dynamic vibrations of an elastic beam in frictional contact with a rigid obstacle// J. Elasticity – **42.**– 1996.– P.1-30.

4. *Martins J.A.C., Oden J.T.* Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with normal and friction interface laws// Nonlin. Anal.– **11.**– 1987.– P.407-428.

5. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Смешанная задача для уравнения распространения возмущений в вязких средах в неограниченных областях// Докл. АН УССР.– Сер.А.– 1988, № 11.– С.28-31.

6. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Существование растущих на бесконечности обобщенных решений смешанной задачи для некоторых эволюционных уравнений// Доп. АН УРСР.– Сер.А.– 1989, № 12.– С.20-23.

7. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Классы единственности и разрешимости смешанных задач для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях// Сиб. мат. журн.– 1991.– **32**.– С.166-178.

8. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Принцип Фрагмена–Линделефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка// Укр. мат. журн.– **57**.– 2005, № 2.– С.239-249.

9. *D'Ancona P., Manfrin R.* A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type// Ann. Mat. Pura Appl.– **168**.– 1995.– P.355-372.

10. *Agre K., Rammaha M.A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions// Diff. And Integr. Equat.– **14**.– 2001.– P.1315-1331.

11. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and sourse terms// J. Diff. Equat.– **109**.– 1994.– P.295-308.

12. *Dragieva N.A.* A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity// Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat.– **23**.– 1987, № 4.– P.95-106.

13. *Carpio A.* Existence of global solutions to some nonlinear dissipative wave equations// J. Math. Pures Appl. – **73**.– 1994, № 5.– P.471-488.

14. *Vittilaro E.* Global nonexistence theorems for a class of evolution equation with dissipation// Arch. Ration. Mech. Anal.– **149**.– 1999, № 2.– P.155-182.

15. *Levine H.A., Park S.R., Serrin J.* Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equations// J. Math. Anal. And Appl.– **228.**– 1998.– P.181-205.

16. *Pecher H.*Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations// Nonlin. Diff. Equat. And Appl.– **7**.– 2000.– P.323-341.

17. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping// J. Diff. Equat.– **174**. – 2001.– P.464-489.

18. *Ohta M.* Blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions // J. Math. Anal. And Appl.– **240.**– 1999.– P.340-360.

19. *Majdoub M.* Qulitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation// J. Math. Anal. And Appl.– **301.**– 2005.– P.354-365.

20. *Ryo Ikehata* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped equation// J. Math. Anal. And Appl.– **301.**– 2005.– P.366-377.

21. *Лавренюк С.П., Оліскевич М.О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними// Укр. мат. журн.– **54**.– 2002, № 10.– С.1356-1370.

22. *Пукач П.Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.– мех. поля – **47**.– 2004, № 4.– С.149-154.

23. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.

24. *Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки п'ятого порядку в обмеженій області// Вісн. Нац. ун–ту „ Львівська політехніка“. Сер. фіз.-мат. науки.– 2006 *(в друці)*.

25. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 2002.

THE WEIGHT CORRECTNESS CLASSES OF SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR NONLINEAR BEAM VIBRATIONS TYPE EQUATION IN UNBOUNDED DOMAIN

Petro Pukach

National University „Lviv Polytechnica“,
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for nonlinear equation of the fifth order in domain bounded with respect to time variable and unbounded with respect to space variables. Described equation generalizes the equation $u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + |u_t|^{p-2}u_t = f$, $p > 2$, which is studied in elasticity theory. The conditions of the existence of unique generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are weight Sobolev spaces of functions.

Key words: nonlinear equation of beam vibrations, Galerkin method.

Стаття надійшла до редколегії 11.11.2005

Прийнята до друку 02.11.2006