ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ | VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.137–150 | Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.137–150

УДК 517.95

ПРО ГРАНИЧНІ ПЕРЕХОДИ У ЗАДАЧАХ З ЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ ЗА ЧАСОМ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Зіновій НИТРЕБИЧ

Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 12, 79013 Львів, Україна

Запропоновано формули граничного переходу, які дають змогу при рівномірному прямуванні відстані між деякими вузлами до нуля за розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними n-го порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з залежними від часу коефіцієнтами з локальними багатоточковими умовами за часом побудувати розв'язок цього ж рівняння, що задовольняє локальні багатоточкові умови в менше, ніж n кратних часових вузлах. Для побудови розв'язків багатоточкових задач використано диференціально-символьний метод.

Ключові слова: багатоточкові задачі, граничні переходи, диференціально-символьний метод.

1. Дослідженню задач з локальними та нелокальними за часом багатоточковими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними в останні роки присвячено чимало праць (див. [1, 2, 3, 4, 5] та бібліографію в них). Ці задачі мають безпосередню фізичну інтерпретацію і загалом є некоректними крайовими задачами, хоча й існують коректні формулювання таких задач [6]. Незважаючи на принципову відмінність між задачею Коші та задачею з локальними багатоточковими умовами за часом для того самого диференціального рівняння з частинними похідними, все ж існує процедура граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші при прямуванні усіх часових вузлів до одного (крайнього лівого) вузла [7, 8].

Цікавим є також питання про можливість граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними порядку n за часом з локальними багатоточковими умовами в n простих часових вузлах до розв'язку цього ж рівняння, що задовольняє локальні багатоточкові умови в менше, ніж n кратних часових вузлах, при прямуванні відстані між деякими вузлами до нуля. Мета нашої праці — описати такий граничний перехід, а, отже, довести, що розв'язок задачі з локальними багатоточковими умовами в кратних часових вузлах можна одержати із "простішої" багатоточкової задачі з локальними багатоточковими умовами в простих вузлах. Розв'язки задач будемо будувати за допомогою диференціально-символьного методу [9].

2. Основні результати. Розглянемо таку багатоточкову задачу в шарі $t \in (t_1, t_n)$, $x \in \mathbb{R}^s$:

$$L_n\left(t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, x) \equiv \frac{\partial^n U}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-k} U}{\partial t^{n-k}} = 0, \tag{1}$$

$$U(t_k, x) = \varphi_k(x), \quad k = \overline{1, n}, \tag{2}$$

де $-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty$, $n \geq 3$, $n, s \in \mathbb{N}$, $A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $k = \overline{1, n}$, – довільні диференціальні вирази з неперервно залежними від t коефіцієнтами, символами яких для фіксованого t є цілі аналітичні функції $A_j(t, \nu)$, $j = \overline{1, n}$, $\nu \in \mathbb{R}^s$.

Серед вузлів $t_1, t_2, \ldots, t_n$ виберемо p вузлів $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_p^*$, де $1 < p < n$, вважаючи їх впорядкованими за зростанням. Ці вузли надалі називатимемо нерухомими, а решта вузлів, відмінних від нерухомих, – рухомими. Для зручності спочатку вважаємо, що t_1 – нерухомий вузол, тобто $t_1 = t_1^*$.

Введемо такі позначення: n_k – кількість рухомих і нерухомих вузлів, що належать до $[t_k^*, t_{k+1}^*)$, де $k = \overline{1, p-1}$; n_p – кількість вузлів, які не менші за t_p^*. Зрозуміло, що $n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$.

Приклад 1. Якщо серед вузлів t_1, t_2, t_3, t_4 взяти за нерухомі вузли $t_1^* = t_1$, $t_2^* = t_3$, то $p = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$. □

Приймемо

$$t_k - t_1^* = \xi_{1,\,k-1}, \quad k = \overline{1, n_1},$$

$$t_{n_1+k} - t_2^* = \xi_{2,\,k-1}, \quad k = \overline{1, n_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+k} - t_p^* = \xi_{p,\,k-1}, \quad k = \overline{1, n_p}.$$

Тоді сукупність вузлів $t_1, t_2, \ldots, t_n$ можна записати у вигляді

$$\begin{array}{c} t_1^* + \xi_{1,0}h,\ t_1^* + \xi_{1,1}h,\ t_1^* + \xi_{1,2}h, \ldots, t_1^* + \xi_{1,\,n_1-1}h, \\ t_2^* + \xi_{2,0}h,\ t_2^* + \xi_{2,1}h,\ t_2^* + \xi_{2,2}h, \ldots, t_2^* + \xi_{2,\,n_2-1}h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_p^* + \xi_{p,0}h,\ t_p^* + \xi_{p,1}h,\ t_p^* + \xi_{p,2}h, \ldots, t_p^* + \xi_{p,\,n_p-1}h, \end{array} \tag{3}$$

де $h = 1$.

Для прикладу 1 сукупність вузлів t_1, t_2, t_3, t_4 запишемо так: t_1^*, $t_1^*+\xi_{1,1}h$, t_2^*, $t_2^*+\xi_{2,1}h$, де $\xi_{1,1} = t_2 - t_1^*$, $\xi_{2,1} = t_4 - t_2^*$, $h = 1$.

Отже, ми реалізували ситуацію, за якої при $h = 1$ маємо усі рухомі та нерухомі вузли в сукупності (3), а при $h = 0$ маємо лише нерухомі вузли $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_p^*$. Надалі вважатимемо, що $h \in [0; 1]$.

Після відповідного перепозначення функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, запишемо такі багатоточкові умови:

$$U(t_k^* + \xi_{k,m}h,\ x) = \varphi_{k,m}(x), \quad m = \overline{0, n_k - 1},\ \ k = \overline{1, p},\ \ h \in [0;\,1]. \tag{4}$$

Умови (2) є частковим випадком при $h = 1$ умов (4).

Розглянемо також умови з кратними вузлами

$$\frac{\partial^{j-1} U}{\partial t^{j-1}}(t_k^*,\ x) = \psi_{k,\,j-1}(x), \quad j = \overline{1, n_k},\ \ k = \overline{1, p}\,. \tag{5}$$

Зазначимо процедуру граничного переходу, яка при $h \to 0$ дає змогу на підставі розв'язку задачі (1), (4) одержати розв'язок задачі (1), (5).

Із виразу $L_n\big(t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\big)$ заміною $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ та $\frac{\partial}{\partial x}$ на вектор-параметр $\nu \in \mathbb{R}^s$ утворимо диференціальний вираз $L_n\big(t, \frac{d}{dt}, \nu\big)$ і розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L_n\left(t, \frac{d}{dt}, \nu\right) T = 0. \tag{6}$$

Розглянемо три системи

$$\Big\{T_j(t,\,\nu)\Big\}_{j=\overline{1,n}}, \tag{7}$$

$$\Big\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\Big\}_{i=\overline{1,n_m},\ m=\overline{1,p}}, \tag{8}$$

$$\Big\{\widehat{T}_{mi}(t,\,\nu,\,h)\Big\}_{i=\overline{1,n_m},\ m=\overline{1,p}} \tag{9}$$

розв'язків рівняння (6), що задовольняють відповідно такі початкові та багатоточкові умови

$$\frac{d^{k-1} T_j}{dt^{k-1}}(t_1^*,\ \nu) = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, n}, \tag{10}$$

$$\frac{d^{j-1} \widetilde{T}_{mi}}{dt^{j-1}}(t_k^*,\ \nu) = \delta_{km}\delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n_m},\ \ j = \overline{1, n_k},\ \ k, m = \overline{1, p}\,, \tag{11}$$

$$\widehat{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\, \nu,\, h) = \delta_{km}\delta_{ij},\ \ i = \overline{1, n_m},\ \ j = \overline{1, n_k},\ \ k, m = \overline{1, p}\,, \tag{12}$$

де δ_{kj} – символ Кронекера.

Система (7) – це нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (6), вона існує для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ і визначається однозначно.

Стосовно систем (8) і (9) можуть виконуватись такі випадки:

а) системи не існують для жодного значення $\nu \in \mathbb{C}^s$ та жодної пари $(\nu, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}_+$;

б) системи існують для усіх або деяких значень $\nu \in \mathbb{C}^s$ та для усіх або для деяких пар $(\nu,\, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}_+$ відповідно.

Надалі випадок а) виключаємо з розгляду або, іншими словами, робимо припущення про невиродженість задач $(1),(4)$ та $(1),(5)$.

Лема 1. *Для існування систем* (9) *та* (8) *необхідно і достатньо, щоб* $\widehat{\Delta}(\nu,h) \neq 0$ *і* $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$ *відповідно, де* $\widehat{\Delta}(\nu,h)$ *– визначник матриці,* j*-рядком* ($j=\overline{1,n}$) *якої є значення* $T_j(t,\nu)$ *у вузлах* (3),

$$\widetilde{\Delta}(\nu) = \begin{vmatrix} T_1(t_1^*,\nu) & T_1'(t_1^*,\nu) & \dots & T_1^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu) & T_1(t_2^*,\nu) & \dots & T_1^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu) \\ T_2(t_1^*,\nu) & T_2'(t_1^*,\nu) & \dots & T_2^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu) & T_2(t_2^*,\nu) & \dots & T_2^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(t_1^*,\nu) & T_n'(t_1^*,\nu) & \dots & T_n^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu) & T_n(t_2^*,\nu) & \dots & T_n^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu) \end{vmatrix}.$$

Доведення. Необхідність. Подамо елементи системи (9) у вигляді лінійної комбінації елементів нормальної фундаментальної системи розв'язків рівняння (6)

$$\widehat{T}_{mk}(t,\,\nu,\,h) = \sum_{i=1}^{n} c_{mki}(\nu,\,h)\, T_i(t,\,\nu), \qquad k=\overline{1,n_m}, \;\; m=\overline{1,p}\,, \tag{13}$$

де $c_{mki}(\nu,h)$ – невідомі функції, залежні від ν та параметра h.

Співвідношення (13) запишемо у вигляді матричного рівняння

$$\widehat{T}(t,\nu,h) = C(\nu,h)T(t,\nu), \tag{14}$$

в якому

$$\widehat{T}(t,\,\nu,\,h) = \begin{pmatrix} \widehat{T}_{11}(t,\,\nu,\,h) \\ \widehat{T}_{12}(t,\,\nu,\,h) \\ \dots\dots\dots \\ \widehat{T}_{1n_1}(t,\,\nu,\,h) \\ \widehat{T}_{21}(t,\,\nu,\,h) \\ \widehat{T}_{22}(t,\,\nu,\,h) \\ \dots\dots\dots \\ \widehat{T}_{2n_2}(t,\,\nu,\,h) \\ \dots\dots\dots \\ \widehat{T}_{p1}(t,\,\nu,\,h) \\ \widehat{T}_{p2}(t,\,\nu,\,h) \\ \dots\dots\dots \\ \widehat{T}_{pn_p}(t,\,\nu,\,h) \end{pmatrix}, \quad T(t,\nu) = \begin{pmatrix} T_1(t,\nu) \\ T_2(t,\nu) \\ \dots\dots \\ T_n(t,\nu) \end{pmatrix},$$

$$C(\nu,h) = \begin{pmatrix} C_1(\nu,h) \\ C_2(\nu,h) \\ \dots\dots \\ C_p(\nu,h) \end{pmatrix}, \;\; C_m(\nu,h) = \|c_{mki}\|\,, \;\; k=\overline{1,n_m},\; m=\overline{1,p},\; i=\overline{1,n}.$$

Підставляючи в (13) чи (14) послідовно кожен із n вузлів (3) і використовуючи умови (12), одержимо матричне рівняння

$$E_n = C(\nu, h)\,\overset{\circ}{T}(\nu,\, h), \tag{15}$$

де $\overset{\circ}{T}(\nu,\, h)$ – матриця порядку n, j-рядком ($j = \overline{1,n}$) якої є значення $T_j(t,\nu)$ у вузлах (3). Рівняння (15) розв'язне, якщо $\det \overset{\circ}{T}(\nu,\, h) \equiv \widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$. За виконання цієї умови знаходимо

$$C(\nu, h) = \overset{\circ}{T}{}^{-1}(\nu,\, h) = \frac{1}{\widehat{\Delta}(\nu, h)}\,\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h),$$

де $\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h)$ – приєднана матриця для $\overset{\circ}{T}(\nu,\, h)$.

З рівняння (15) отримуємо

$$\widehat{T}(t, \nu, h) = \frac{1}{\widehat{\Delta}(\nu, h)}\,\overset{\circ}{T}{}^{\vee}(\nu,\, h)T(t,\nu). \tag{16}$$

Якщо тепер аналогічно шукати елементи системи (8) у вигляді лінійної комбінації нормальної фундаментальної системи розв'язків (7), тобто

$$\widetilde{T}_{mk}(t,\nu) = \sum_{i=1}^{n} d_{mki}(\nu)T_i(t,\nu), \quad k = \overline{1, n_m}, \quad m = \overline{1,p}\,, \tag{17}$$

де $d_{mki}(\nu)$ – невідомі функції, то, використовуючи умови (11), одержимо матричне рівняння

$$E_n = \begin{pmatrix} D_1(\nu) \\ D_2(\nu) \\ \cdots\cdots \\ D_p(\nu) \end{pmatrix} \overline{T}, \tag{18}$$

в якому $D_m(\nu) = \|d_{mki}(\nu)\|$, $k = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1,p}$, $i = \overline{1,n}$, $\overline{T}$ – матриця порядку n, j-рядком ($j = \overline{1,n}$) якої є $T_j(t_1^*,\nu)$, $T_j'(t_1^*,\nu)$, $\ldots$, $T_j^{(n_1-1)}(t_1^*,\nu)$, $T_j(t_2^*,\nu)$, $T_j'(t_2^*,\nu)$, $\ldots$, $T_j^{(n_2-1)}(t_2^*,\nu)$, $\ldots$, $T_j(t_p^*,\nu)$, $T_j'(t_p^*,\nu)$, $\ldots$, $T_j^{(n_p-1)}(t_p^*,\nu)$.

Матричне рівняння (18) однозначно розв'язне, якщо $\det \overline{T} \equiv \widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$.

Достатність. Припустимо, що $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ і $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$ відповідно. Побудуємо системи (8) та (9) за формулами (16) та (17), в яких $d_{mki}(\nu)$ – розв'язки матричного рівняння (18). Тоді елементи так побудованих систем є розв'язками звичайного диференціального рівняння (6) і задовольнятимуть умови (12) та (11) відповідно. □

Зауваження 1. Системи (8) та (9) є системами лінійно незалежних розв'язків рівняння (6), якщо $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ і $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$ відповідно.

Лема 2. *Для малих значень h виконується співвідношення*

$$\widehat{\Delta}(\nu,\, h) = h^{\theta} \prod_{m=1}^{p} \left(\prod_{k=1}^{n_m-1} \frac{\xi_{m,\,k}^{k}}{k!} \right) \widetilde{\Delta}(\nu) + o(h^{\theta}), \tag{19}$$

де $\theta = \frac{1}{2}\left[n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_p^2 - n\right]$, $o(h^\theta)$ *– нескінченно мала величина порівняно з* h^θ *при* $h \to 0$.

Доведення. Розвинемо функції

$$T_j(t_k^* + \xi_{k,1}h, \nu),\ T_j(t_k^* + \xi_{k,2}h, \nu), \ldots, T_j(t_k^* + \xi_{k,n_k-1}h, \nu)$$

в ряди Тейлора в околі точок (t_k^*, ν), $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,p}$. Виконуючи елементарні перетворення у визначнику $\widehat{\Delta}(\nu, h)$ над стовпцями, одержимо визначник матриці, j-рядком ($j = \overline{1,n}$) якої є

$$T_j(t_1^*, \nu),\ \xi_{1,1}hT_j'(t_1^*, \nu),\ \ldots, \frac{(\xi_{1,n_1-1}h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}T_{_j}^{(n_1-1)}(t_1^*, \nu),$$

$$T_j(t_2^*, \nu),\ \xi_{2,1}hT_j'(t_2^*, \nu), \ldots, \frac{(\xi_{2,n_2-1}h)^{n_2-1}}{(n_2-1)!}T_{_j}^{(n_2-1)}(t_2^*, \nu), \ldots,$$

$$T_j(t_p^*),\ \xi_{p,1}hT_j'(t_p^*), \ldots, \frac{(\xi_{p,n_p-1}h)^{n_p-1}}{(n_p-1)!}T_{_j}^{(n_p-1)}(t_p^*, \nu).$$

Звідси одержуємо рівність (19), в якій

$$\Theta = 1 + 2 + \ldots + n_1 - 1 + 1 + 2 + \ldots + n_2 - 1 + \ldots + 1 + 2 + \ldots + n_p - 1 =$$
$$= \frac{1 + n_1 - 1}{2}(n_1 - 1) + \frac{1 + n_2 - 1}{2}(n_2 - 1) + \ldots + \frac{1 + n_p - 1}{2}(n_p - 1) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_p^2 - n\right].$$

□

Лема 3. *Нехай* $\widehat{\Delta}(\nu, h) \neq 0$ *і* $\widetilde{\Delta}(\nu) \neq 0$, *тоді між елементами систем* (8) *та* (9) *виконуються співвідношення*

$$\widetilde{T}_{mi}(t,\, \nu) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_k}\widetilde{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\, \nu)\widehat{T}_{kj}(t,\, \nu,\, h), \ \ i = \overline{1, n_m}\,,\ m = \overline{1,p}\,. \tag{20}$$

Доведення. Відповідно до зауваження 1 зобразимо елементи системи (8) у вигляді лінійної комбінації елементів системи (9)

$$\widetilde{T}_{mi}(t,\, \nu) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_k} g_{kjmi}(\nu,\, h)\widehat{T}_{kj}(t,\, \nu,\, h), \quad i = \overline{1, n_m},\ m = \overline{1,p}\,, \tag{21}$$

де $g_{kjmi}(\nu,\, h)$ – невідомі функції, залежні від ν і параметра h.

Приймаючи в (21) замість t послідовно кожен із вузлів (3) і використовуючи умови (12), одержимо співвідношення (20). □

Розглянемо тепер вирази $\widetilde{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\, \nu)$. Розвиваючи ці вирази в ряди Тейлора в околі точки $(t_k^*,\, \nu)$ і використовуючи умови (11), маємо

$$\widetilde{T}_{mi}(t_k^*,\, \nu) = \delta_{mk}\delta_{i1},$$

$$\widetilde{T}_{mi}(t_k^* + \xi_{k,\,j-1}h,\,\nu) = \frac{(\xi_{k,\,j-1}h)^{i-1}}{(i-1)!}\delta_{mk}\delta_{ij} + o(h^{n_k-1}), \tag{22}$$

$$i = \overline{1, n_m},\ j = \overline{2, n_k},\ m, k = \overline{1, p}.$$

Співвідношення (20) з урахуванням (22) у матричному вигляді можна зобразити так:

$$\widetilde{T}(t,\,\nu) = \left(\Lambda(h) + \widetilde{\Lambda}(h)\right)\widehat{T}(t,\,\nu,\,h)\,, \tag{23}$$

де

$$\widetilde{T}(t,\,\nu) = \begin{pmatrix} \widetilde{T}_{11}(t,\,\nu) \\ \widetilde{T}_{12}(t,\,\nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{1n_1}(t,\,\nu) \\ \widetilde{T}_{21}(t,\,\nu) \\ \widetilde{T}_{22}(t,\,\nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{2n_2}(t,\,\nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{p1}(t,\,\nu) \\ \widetilde{T}_{p2}(t,\,\nu) \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{T}_{pn_p}(t,\,\nu) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(h) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(h) & O & \ldots & O \\ O & \Lambda_2(h) & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & \Lambda_p(h) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\Lambda_k(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \xi_{k,\,1}h & \ldots & \xi_{k,\,n_k-1}h \\ 0 & \frac{(\xi_{k,\,1}h)^2}{2!} & \ldots & \frac{(\xi_{k,\,n_k-1}h)^2}{2!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \frac{(\xi_{k,\,1}h)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \ldots & \frac{(\xi_{k,\,n_k-1}h)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, p},$$

O – матриці з нульовими елементами відповідних розмірів, $\widetilde{\Lambda}(h)$ – матриця, в якої рядки з номерами $1,\, n_1+1,\, n_1+n_2+1, \ldots,\, n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1$ складаються лише з нулів, а рядки з 2-го до n_1 містять величини $o(h^{n_1-1})$, з n_1+2-го до n_1+n_2 містять величини $o(h^{n_2-1})$ і т.д., останні n_p-1 рядків містять величини $o(h^{n_p-1})$.

Лема 4. *Правильною є така рівність*

$$\lim_{h\to 0}\Lambda(h)\widehat{T}(t,\nu,h) = \widetilde{T}(t,\nu). \tag{25}$$

Доведення. З урахуванням (16) рівність (23) можна записати у вигляді

$$\widetilde{T}(t,\nu) = \frac{1}{\widehat{\Delta}(\nu,h)}\left(\Lambda(h) + \widetilde{\Lambda}(h)\right)\overset{\circ\vee}{T}(\nu,\,h)T(t,\nu).$$

Обчислення засвідчують, що матриця $\widetilde{\Lambda}(h)\overset{\circ\vee}{T}(\nu,\,h)$ складається з нульових елементів або нескінченно малих величин вищого, ніж Θ, порядку. Звідси згідно з лемою 2 маємо

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{\Lambda}(h)\overset{\circ\vee}{T}(\nu,\,h)}{\widehat{\Delta}(\nu,h)}=0,$$

тому виконується рівність (25). □

Теорема 1. *Нехай* $\widehat{\Delta}(\nu,h)\not\equiv 0$ *і* $\widetilde{\Delta}(\nu)\not\equiv 0$. *Тоді формальні розв'язки задач* (1), (5) *та* (1), (4) *можна визначити за формулами*

$$U(t,\,x)=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}, \tag{26}$$

$$U(t,\,x,\,\varphi_{10},\,\varphi_{11},\ldots,\varphi_{p,\,n_p-1})=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\varphi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widehat{T}_{mi}(t,\,\nu,\,h)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}, \tag{27}$$

де $\mathbf{0}=(\overbrace{0,\,0,\ldots,0}^{s})$, $\nu\cdot x=\sum\limits_{i=1}^{s}\nu_i x_i$, *причому у розв'язку задачі* (1), (4) *враховано його залежність від* $\varphi_{10}(x),\ \varphi_{11}(x),\ \ldots,\ \varphi_{p,n_p-1}(x)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що функція (26) формально задовольняє рівняння (1)

$$L_n\Big(t,\,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,\,x)=$$
$$=L_n\Big(t,\,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)\left[\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}\right]=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[L_n\Big(t,\,\frac{\partial}{\partial t},\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\left\{\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\right\}\right]\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]L_n\Big(t,\,\frac{d}{dt},\,\nu\Big)\widetilde{T}_{mi}(t,\,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=0.$$

Крім того, функція (26) задовольняє умови (5). Справді, для $j=\overline{1,n_k}$, $k=\overline{1,p}$ маємо

$$\frac{\partial^{j-1}U}{\partial t^{j-1}}(t_k^*,\,x)=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\frac{d^{j-1}\widetilde{T}_{mi}}{dt^{j-1}}(t_k^*,\,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=$$
$$=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\delta_{km}\delta_{ij}\right\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}=$$

$$= \psi_{k,\,j-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}} = \psi_{k,\,j-1}(x)\Big\{\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}} = \psi_{k,\,j-1}(x).$$

Цілком аналогічно доводиться, що формула (27) формально визначає розв'язок задачі (1), (4). □

Зауважимо, що у формулах (26) і (27) диференціальні вирази $\psi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ та $\varphi_{m,\,i-1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ утворюються заміною x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ в аналітичних функціях $\psi_{m,\,i-1}(x)$ та $\varphi_{m,\,i-1}(x)$. Крім того, можна виділити певні класи аналітичних функцій, в яких зазначені формальні розв'язки задач є фактичними (див., наприклад, [10]).

Розглянемо матрицю, яка утворюється домноженням елементів першого рядка матриці (24) на $\psi_{10}(x)$, елементів другого рядка матриці (24) на $\psi_{11}(x)$ і т.д., елементів n_1-го рядка матриці (24) на $\psi_{1,\,n_1-1}(x)$ і т.д., та елементів останнього рядка матриці (24) на $\psi_{p,\,n_p-1}(x)$. Рядки утвореної матриці позначимо через $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h), \ldots, \lambda_n(h)$.

Теорема 2. *Формальний розв'язок задачі* (1), (5) *можна одержати на підставі розв'язку* (27) *задачі* (1), (4) *за допомогою такої формули граничного переходу:*

$$U(t,\,x) = \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n} U\big(t,\,x,\,\lambda_k(h)\big) \tag{28}$$

або

$$U(t,\,x) = \lim_{h\to 0} U\Big(t,\,x,\,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(h)\Big).$$

Доведення. Обчислимо границю при $h\to 0$ першого доданка у рівності (28)

$$\lim_{h\to 0} U(t,\,x,\,\lambda_1(h)) = \lim_{h\to 0} U(t,\,x,\,\overbrace{\psi_{10},\,\psi_{10},\ldots,\psi_{10}}^{n_1},\,0,\,0,\ldots,0) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n_1}\psi_{10}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\widehat{T}_{1i}(t,\,\nu,\,h)\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\psi_{10}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\sum_{i=1}^{n_1}\widehat{T}_{1i}(t,\,\nu,\,h)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Bigg|_{\nu=\mathbf{0}}.$$

З першого рівняння матричної рівності (25) одержуємо

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n_1}\widehat{T}_{1i}(t,\,\nu,\,h) = \widetilde{T}_{11}(t,\,\nu).$$

Отже, маємо

$$\lim_{h\to 0} U(t,\,x,\,\lambda_1(h)) = \psi_{10}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\widetilde{T}_{11}(t,\,\nu)\exp[\nu\cdot x]\Big\}\Big|_{\nu=\mathbf{0}}.$$

Обчислюючи аналогічно решту $n-1$ границь і використовуючи відповідні рівняння матричної рівності (25), одержимо формулу (26) розв'язку задачі (1), (4). $\square$

У запропонованому підході за нерухомий вузол було прийнято крайній лівий вузол $t_1^* = t_1$. Якщо ж вузол t_1 є рухомим, то сукупність вузлів $t_1, t_2, \ldots, t_n$ можна подати у вигляді, аналогічному до (3)

$$\begin{gathered}
t_1^* - \xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h,\ t_1^* - \xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h, \ldots, t_1^* - \xi_{0,\,1} h,\\
t_1^* + \xi_{1,\,0} h,\ t_1^* + \xi_{1,\,1} h,\ t_1^* + \xi_{1,\,2} h, \ldots, t_1^* + \xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h,\\
t_2^* + \xi_{2,\,0} h,\ t_2^* + \xi_{2,\,1} h,\ t_2^* + \xi_{2,\,2} h, \ldots,\ t_2^* + \xi_{2,\,n_2-1} h,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_p^* + \xi_{p,\,0} h,\ \ t_p^* + \xi_{p,\,1} h,\ \ t_p^* + \xi_{p,\,2} h,\ \ldots,\ \ t_p^* + \xi_{p,\,n_p-1} h,
\end{gathered} \tag{29}$$

де $\widetilde{n}_0, \widetilde{n}_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{n}_0 + \widetilde{n}_1 = n_1$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, $\xi_{0,\,\widetilde{n}_0}, \xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1}, \ldots, \xi_{p,\,n_p-1}$ – певні додатні числа, $\xi_{1,\,0} = \xi_{2,\,0} = \ldots = \xi_{p,\,0} = 0$, $h = 1$.

Розглянемо багатоточкові умови у простих вузлах (29):

$$\begin{gathered}
U(t_1^* - \xi_{0,\,\widetilde{n}_0-k+1} h, x) = \varphi_{0k}(x), \quad k = \overline{1, \widetilde{n}_0},\\
U(t_1^* + \xi_{1,\,j} h, x) = \varphi_{1j}(x), \quad j = \overline{0, \widetilde{n}_1 - 1},\\
U(t_k^* + \xi_{k,\,j} h, x) = \varphi_{kj}(x), \quad k = \overline{2, p},\ j = \overline{0, n_k - 1},
\end{gathered} \tag{30}$$

а також такі багатоточкові умови у кратних вузлах

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{\widetilde{n}_0-k+1} U}{\partial t^{\widetilde{n}_0-k+1}}(t_1^*, x) = \psi_{0k}(x), \quad k = \overline{1, \widetilde{n}_0},\\
U(t_1^*, x) = \psi_{10}(x),\\
\frac{\partial^{\widetilde{n}_0+j} U}{\partial t^{\widetilde{n}_0+j}}(t_1^*, x) = \psi_{1j}(x), \quad j = \overline{1, \widetilde{n}_1 - 1},\\
\frac{\partial^{j} U}{\partial t^{j}}(t_k^*, x) = \psi_{kj}(x), \quad j = \overline{0, n_k - 1},\ k = \overline{2, p}\,.
\end{gathered} \tag{31}$$

Нехай $U(t, x, \varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \ldots, \varphi_{0,\widetilde{n}_0}, \varphi_{1,0}, \ldots, \varphi_{1,\widetilde{n}_1-1}, \varphi_{2,0}, \ldots, \varphi_{2,n_2-1}, \ldots, \varphi_{p,0}, \ldots, \varphi_{p,n_p-1})$ – розв'язок задачі (1), (30). Тоді розв'язок задачі (1), (31) можна одержати за розв'язком задачі (1), (30) за формулою (28), де $\lambda_k(h) - k$-ий рядок ($k = \overline{1, n}$) матриці, яка утворюється як і вище добутками функцій $\psi_{0,1}, \psi_{0,2}, \ldots, \psi_{0,\,\widetilde{n}_0}, \psi_{1,0}, \ldots, \psi_{1,\,\widetilde{n}_1-1}, \psi_{2,0}, \ldots, \psi_{p,\,n_p-1}$ на відповідні рядки матриці $\Lambda(h)$, в якій $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots, \Lambda_p$ – ті самі блоки, що і в матриці (24), а Λ_1 у випадку $\widetilde{n}_1 > 1$ є матрицею вигляду

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \ldots & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0} & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0+1} & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0+2} & \ldots & \Lambda_{1,\widetilde{n}_0+\widetilde{n}_1} \end{pmatrix},$$

в якій

$$\Lambda_{11} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h)^{2}}{2!} \\ -\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix},\ \Lambda_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h)^{2}}{2!} \\ -\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,1} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,1} h)^{2}}{2!} \\ -\xi_{0,\,1} h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{0,\,1} h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,1} h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0+2} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{1,1} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,1} h)^{2}}{2!} \\ -\xi_{1,1} h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{1,1} h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,1} h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix}, \ldots, \Lambda_{1,\,\widetilde{n}_0+\widetilde{n}_1} = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h)^{2}}{2!} \\ -\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h \\ 1 \\ \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h)^{\widetilde{n}_0+1}}{(\widetilde{n}_0+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{(-\xi_{1,\,\widetilde{n}_1-1} h)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \end{pmatrix},$$

а у випадку $\widetilde{n}_1 = 1$ матриця Λ_1 є такою:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} & \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} & \cdots & \frac{(-\xi_{0,\,1} h)^{\widetilde{n}_0}}{\widetilde{n}_0!} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0} h)^{1}}{1!} & \frac{(-\xi_{0,\,\widetilde{n}_0-1} h)^{1}}{1!} & \cdots & \frac{(-\xi_{0,\,1} h)^{1}}{1!} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2. Якщо в задачі (1), (4) $n > 2$ і $p = 2$, то зазначена у теоремі 2 формула граничного переходу дає змогу одержати розв'язок задачі типу Діріхле у шарі $(t_1^*,\, t_2^*) \times \mathbb{R}^s$.

Приклад 2. Розглянемо невироджену задачу (1), (2) у випадку $n = 4$

$$L_4\left(t,\, \frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,\, x) = 0, \quad t \in (t_1,\, t_4),\ x \in \mathbb{R}^s, \tag{32}$$

$$U(t_k,\,x)=\varphi_k(x),\quad k=1,2,3,4,\tag{33}$$

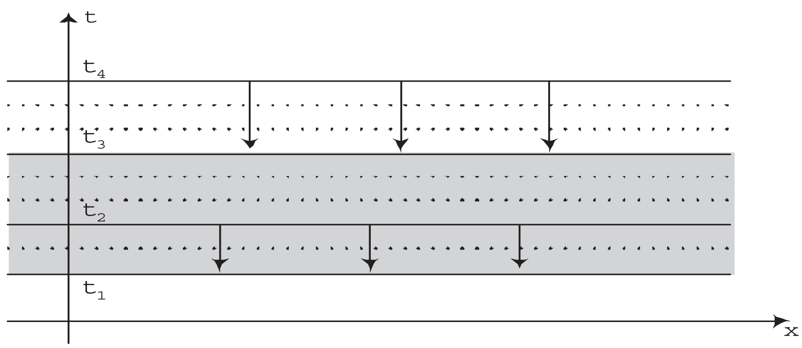
де $t_1<t_2<t_3<t_4$.

Нехай $U(t,\,x,\,\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3,\,\varphi_4)$ – розв'язок задачі (32), (33). Запишемо формулу граничного переходу від цього розв'язку до розв'язку задачі типу Діріхле для рівняння (32). Розглянемо лише одну з можливих задач типу Діріхле в області $(t_1,\,t_3)\times\mathbb{R}^s$ для рівняння (32) з умовами

$$U(t_1,\,x)=\psi_1(x),\ \frac{\partial U}{\partial t}(t_1,\,x)=\psi_2(x),\,U(t_3,\,x)=\psi_3(x),\ \frac{\partial U}{\partial t}(t_3,\,x)=\psi_4(x).\tag{34}$$

Для виконання граничного переходу від розв'язку задачі (32), (33) до розв'язку задачі (32), (34) візьмемо t_1 і t_3 за нерухомі вузли, а $t_2,\,t_4$ – за рухомі. Тоді згідно з прикладом 1 $p=2,\,n_1=2,\,n_2=2$. Вузли $t_1,\,t_2,\,t_3,\,t_4$ запишемо у вигляді $t_1,\,t_1+\xi_{1,1}h,\,t_3,\,t_3+\xi_{2,1}h$, де $t_2-t_1=\xi_{1,1},\,t_4-t_3=\xi_{2,1},\,h=1$. Матриця $\Lambda(h)$ та схема граничного переходу матимуть вигляд

$$\Lambda(h)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&\xi_{1,1}h&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&\xi_{2,1}h\end{pmatrix}.$$



Розв'язок задачі (32), (34) згідно з теоремою 2 можна знайти за розв'язком задачі (32), (33), використовуючи таку формулу граничного переходу:

$$U(t,\,x)=\lim_{h\to 0}U(t,\,x,\,\psi_1,\,\psi_1+\xi_{1,1}h\psi_2,\,\psi_3,\,\psi_3+\xi_{2,1}h\psi_4).$$

3. Висновки. Отримані у цій праці результати дають змогу на підставі розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними скінченного порядку за часом та нескінченного порядку включно за просторовими змінними з залежними від часу коефіцієнтами, що задовольняє локальні багатоточкові за часом умови (з простими вузлами інтерполяції), будувати розв'язок задачі для цього самого рівняння з багатоточковими умовами в меншій кількості кратних вузлів у результаті зазначеного граничного переходу при рівномірному прямуванні відстані між вузлами інтерполяції до нуля.

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.– К., 1984.

2. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.– К., 2002.

3. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб.– 1969.– **79**, №2.– С. 293-304.

4. *Віленць І.Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР.– Сер. А.– 1974.– №3.– С. 195-197.

5. *Макаров А.А.* О необходимых и достаточных условиях разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений с частными производными // Дифференциальн уравнения.– 1981.– **17**, №2.– С. 320-324.

6. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных.– К., 1993.

7. *Нитребич З.М.* Про граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші // Вісн. Львів. ун-ту.– Сер. мех.-мат.– 1999.– Вип. 54.– С.125-131.

8. *Нитребич З.М.* Граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2000.– **43**, №3.– С.64-70.

9. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально–символьний метод.– Львів, 2002.

10. *Нитребич З.М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 1994.– №37.– С.16-21.

THE LIMIT PASSAGE FROM THE SOLUTIONS OF A MULTIPOINT PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION TO THE SOLUTION OF A MULTIPOINT PROBLEM WITH SMALLER COUNT OF KNOTS

Zinoviy Nytrebych

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

We propose the scheme of the limit passage to the which allows, by the solution of a partial differential equation of the n-th order in time and, generally, infinite order in spatial variables with dependent on time coefficients, with local multipoint conditions with respect to time, to construct a solution of the same equation with smaller than n count of multiple time knots as the distance between knots tends to zero. To construct the problem solutions, we make use of the differential-symbol method.

Key words: multipoint problems, limit passages, differential-symbol method.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006