ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.128–136 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.128–136*

УДК 517.5

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ І ПОВОДЖЕННЯ ЗАЛИШКУ ІНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА-СТІЛЬТЬЄСА

Любов МИКИТЮК, Олена ПОСІКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено апроксимацію і асимптотичне поводження залишку інтеграла $\int\limits_0^\infty f(x)\exp\{sx\}dF(x)$, де функція f додатна й обмежена на кожному скінченному проміжку, а функція F невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0,+\infty)$.

Ключові слова: інтеграл Лапласа-Стільтьєса, залишок інтеграла Лапласа-Стільтьєса.

1. Нехай V - клас функцій F, невід'ємних, неспадних, необмежених і неперервних справа на $[0;+\infty)$. Позначимо через $W(F)$ клас функцій f, невід'ємних на $[0;+\infty)$, обмежених на кожному скінченному проміжку і таких, що інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int\limits_0^\tau f(x)\exp\{sx\}dF(x)$ існує для всіх $s=\sigma+it$ і $\tau\in[0;+\infty)$. Інтеграл

$$I(s)=\int\limits_0^\infty f(x)\exp\{sx\}dF(x) \tag{1.1}$$

називається інтегралом Лапласа-Стільтьєса. Якщо (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0=0$), $F(x)=n(x)$, де $n(t)=\sum\limits_{\lambda_n\le t}1$ – лічильна функція цієї послідовності, f – така невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, що

$f(\lambda_n) = a_n \geq 0$ для всіх $n \geq 0$, то

$$D(s) := I(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\} \tag{1.2}$$

є рядом Діріхле з невід'ємними показниками та коефіцієнтами.

Для $\sigma < \sigma_a$, де σ_a - абсциса абсолютної збіжності ряду (1.2), приймемо $E_n(\sigma) = E_n(D,\sigma) = \inf\limits_{P\in\Pi_k(\lambda)}\{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|D(\sigma+it) - P(\sigma+it)|\}$, де $\Pi_k(\lambda)$ - клас експоненціальних поліномів вигляду $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \exp\{s\lambda_n\}$.

Число $\sigma_a \in (-\infty, +\infty)$ називатимемо абсцисою абсолютної збіжності інтеграла (1.1), якщо він абсолютно збіжний для $\sigma < \sigma_a$ і абсолютно розбіжний для $\sigma > \sigma_a$. Якщо інтеграл (1.1) абсолютно збіжний для кожного $\sigma < +\infty$, то приймаємо $\sigma_a = +\infty$. Якщо інтеграл (1.1) абсолютно розбіжний для кожного $\sigma > -\infty$, то приймаємо $\sigma_a = -\infty$.

Нехай абсциса абсолютної збіжності $I(s)$ становить $\sigma_a = 0$. Для $\sigma < 0$ приймемо

$$E_\tau(\sigma) = E_\tau(I,\sigma) = \inf_{\omega\in W(F)}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I(\sigma+it) - \int_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right|\right\}.$$

Позначимо через $R_\tau(\sigma) = R_\tau(I,\sigma) = \int\limits_\tau^\infty f(x)\exp\{\sigma x\}dF(x)$ залишок інтеграла Лапласа-Стільтьєса (1.1).

В [1] для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності отримано такі оцінки $E_n(\sigma)$:

$$|a_{n+1}|\exp\{\sigma\lambda_{n+1}\} \leq E_n(\sigma) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}. \tag{1.3}$$

У [2,3] зазначено зв'язок між асимптотичними поводженнями залишку $R_n(\sigma) = R_n(D,\sigma) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \exp\{\sigma\lambda_k\}$ ряду Діріхле (1.2) та його коефіцієнтів a_n, звідки, з огляду на (1.3), отримано зв'язок між асимптотичними поводженнями $E_n(\sigma)$ і a_n.

Мета нашої праці — отримати аналоги результатів з [1,2,3] для інтегралів Лапласа-Стільтьєса, зокрема, отримання оцінок $E_\tau(\sigma)$ зверху і знизу, а також зв'язку між асимптотичними поводженнями $E_\tau(\sigma)$ та функцією $f(x)$.

2. Оцінки $E_\tau(\sigma)$ зверху і знизу.

Теорема 1. *Для всіх $\sigma < 0$ і для всіх точок $x > \tau$ виконується нерівність*

$$E_\tau(\sigma) \geq c(x)f(x)\exp\{\sigma x\}, \tag{2.1}$$

де $c(x) = F(x) - F(x-0)$.

Доведення. Якщо x не є точкою стрибка функції $F(x)$, то нерівність (2.1) очевидна.

Нехай $x = x_0$ — точка стрибка. Приймемо $I_M(s) = \int\limits_0^M f(x)\exp\{sx\}dF(x)$, $M > x_0$. Тоді для будь-якого інтеграла $\int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{sx\}dF(x)$ $(\omega \in W(F))$ і для всіх $M > \tau$ отримуємо

$$I_M(\sigma+it) - \int\limits_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) = \int\limits_0^M \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x),$$

де

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\exp\{\sigma x\},\ x > \tau, \\ (f(x)-\omega(x))\exp\{\sigma x\},\ 0 \le x \le \tau. \end{cases}$$

Зауважимо, що функція $\varphi(x)$ обмежена на кожному скінченному проміжку. Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $(x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon) \subset (0; M)$. Приймемо

$$\Omega_{\varepsilon,M} = [0;M] \setminus (x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon),\ \ F_0(x) = F(x) - c(x_0)\,H(x-x_0),$$

де $H(x) = \begin{cases} 1,\ x \ge 0, \\ 0,\ x < 0. \end{cases}$

Тоді

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^M \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) = \\ &= \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}} \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) + \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) = \\ &= \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}} \varphi(x)\exp\{itx\}dF(x) + c(x_0)\varphi(x_0)\exp\{itx_0\} + \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\exp\{itx\}dF_0(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

З побудови функції $F_0(x)$ випливає, що $F_0(x)$ не має стрибка в точці x_0, тому

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\exp\{itx\}dF_0(x) \right| \le \\ &\le \sup_{(x_0-\varepsilon;\, x_0+\varepsilon)} \{|\varphi(x)\exp\{itx\}|\}(F_0(x_0+\varepsilon+0) - F_0(x_0-\varepsilon-0)) = o(1),\ \varepsilon \to +0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Враховуючи (2.2) і (2.3), а також теорему Фубіні отримуємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\int\limits_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt=\\
&=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt+\\
&+\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}c(x_0)\varphi(x_0)\exp\{itx_0\}\exp\{-itx_0\}dt+o(1)=\\
&=\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}}\varphi(x)\left\{\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\exp\{it(x-x_0)\}dt\right\}dF(x)+c(x_0)\varphi(x_0)+o(1)=\\
&=\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,M}}\varphi(x)\frac{\sin T(x-x_0)}{T(x-x_0)}dF(x)+c(x_0)\varphi(x_0)+o(1).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Зауважимо, що $\varphi(x)\,\dfrac{\sin T(x-x_0)}{T(x-x_0)} \Longrightarrow 0$ при $T\to\infty$ на множині $\Omega_{\varepsilon,M}$. Тоді, спрямовуючи $\varepsilon\to 0$, з (2.4) одержуємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\int\limits_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt=\\
&=c(x_0)\varphi(x_0)=c(x_0)f(x_0)\exp\{\sigma x_0\},\quad x_o>\tau.
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
&|c(x_0)f(x_0)\exp\{\sigma x_o\}|=\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{\int\limits_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right\}\exp\{-itx_0\}dt\right|\le\\
&\le\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int\limits_{0}^{M}\varphi(x)\exp\{itx\}dF(x)\right|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I_M(\sigma+it)-\int\limits_{0}^{\tau}\omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right|.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Оскільки $\sigma < 0$, то

$$|I_M(\sigma+it) - I(\sigma+it)| = \left|\int_0^M f(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x) - \int_0^\infty f(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right| \leq$$

$$\leq \int_M^\infty f(x)\exp\{\sigma x\}dF(x) = o(1),\ M\to\infty.$$

Тому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I_M(\sigma+it) - \int_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I(\sigma+it) - \int_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right|,\ M\to\infty.$$

З (2.5) маємо

$$c(x_0)f(x_0)\exp\{\sigma x_0\} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I(\sigma+it) - \int_0^\tau \omega(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right|$$

для кожного інтеграла $\int_0^\tau \omega(x)\exp\{sx\}dF(x)$, $x_0 > \tau$, а звідси випливає нерівність (2.1). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для всіх $\sigma < 0$ виконується нерівність*

$$E_\tau(\sigma) \leq R_\tau(\sigma).$$

Доведення.

$$E_\tau(\sigma) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|I(\sigma+it) - \int_0^\tau f(x)\exp\{(\sigma+it)x\}dF(x)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\int_\tau^\infty f(x)\exp\{\sigma x\}dF(x)\right\} = R_\tau(\sigma).$$

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 випливає, що дослідження асимптотичного поводження $E_\tau(\sigma)$ зводиться до дослідження асимптотичного поводження $R_\tau(\sigma)$.

3. Асимптотичне поводження залишку $R_\tau(\sigma)$. Як і в [4] приймемо

$$\mu(\sigma) = \sup\{f(x)\exp\{\sigma x\} : x \geq 0\},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Тоді або $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує число σ_μ таке, що $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma > \sigma_\mu$.

Як і в [5] для $\sigma_\mu = A$ через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функцією. Для $\Phi \in \Omega(A)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Ми розглядатимемо лише випадки $\sigma_\mu = 0$ і $\sigma_\mu = +\infty$.

Теорема 3. *Нехай $F \in V$, $\sigma_\mu = 0$ і $\Phi \in \Omega(0)$. Якщо $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ і $\ln F(x) = o(x|\Psi(\varphi(x))|)$ при $x \to +\infty$, то для $\sigma \in [\sigma_0, 0)$*

$$\ln (R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}) \leq (1 + o(1))\tau|\Psi(\varphi(\tau))|, \quad \tau \to +\infty.$$

Доведення. Оскільки $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, то $\ln f(x) \leq \Phi(\sigma) - \sigma x$ для всіх $x \geq x_0$ і $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Звідси для $\sigma = \varphi(x)$ отримуємо

$$\ln f(x) \leq \Phi(\varphi(x)) - x\varphi(x) = -x\left(\varphi(x) - \frac{\Phi(\varphi(x))}{\Phi'(\varphi(x))}\right) = -x\Psi(\varphi(x)),\ x \geq x_0.$$

Тому

$$\begin{aligned} R_\tau(\sigma) &\leq \int_\tau^\infty \exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\} dF(x) \leq \\ &\leq \int_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}(\varphi(x) + |\sigma|)dx \leq \\ &\leq |\sigma| \int_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}dx \leq \\ &\leq |\sigma| \int_\tau^\infty \exp\{(1+\varepsilon)x|\Psi(\varphi(x))| - |\sigma|x\}dx, \quad \tau \geq \tau_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

За правилом Лопіталя одержуємо

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\int_\tau^\infty \exp\{-(1+\varepsilon)x\Psi(\varphi(x)) - |\sigma|x\}dx}{\exp\{-(1+\varepsilon)\tau\Psi(\varphi(\tau)) - |\sigma|\tau\}} = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)\varphi(\tau) + |\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|}.$$

Отже,

$$\ln (R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}) \leq (1 + 2\varepsilon)\tau|\Psi(\varphi(\tau))|, \quad \tau \geq \tau_1(\varepsilon).$$

З огляду на довільність ε, теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $F \in V$, $\sigma_\mu = +\infty$ *і* $\Phi \in \Omega(+\infty)$. *Якщо* $\ln \mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \ge \sigma_0 \ge 0$ *і* $\ln F(x) = o(x\Psi(\varphi(x)))$, $x \to +\infty$, *то для* $\sigma \ge \sigma_0$

$$\ln R_\tau(\sigma) \le -(1+o(1))\tau\Psi(\varphi(\tau)), \quad \tau \to +\infty.$$

Доведення. Як і у доведенні теореми 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_\tau(\sigma) &\le \int\limits_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}(\varphi(x) - \sigma)dx \le \\ &\le \int\limits_\tau^\infty F(x)\exp\{-x\Psi(\varphi(x)) + \sigma x\}\varphi(x)dx \le \\ &\le \int\limits_\tau^\infty \exp\{-(1-\varepsilon)x\Psi(\varphi(x))\}\varphi(x)dx = \\ &= \frac{1+o(1)}{1-\varepsilon}\exp\{-(1-\varepsilon)\tau\Psi(\varphi(\tau))\}, \quad \tau \to +\infty, \end{aligned}$$

тоді

$$\ln R_\tau(\sigma) \le -(1-2\varepsilon)\tau\Psi(\varphi(\tau)), \quad \tau \ge \tau_0(\varepsilon).$$

З огляду на довільність ε, теорему 4 доведено.

Позначимо

$$\Delta F(\tau) = \int\limits_{[\tau,\,\tau+1)} dF(x).$$

Теорема 5. *Нехай* $F \in V$, $\sigma_\mu = 0$, $f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ *і для довільного* $a \in [0, 1)$

$$\ln f(x+a) - \ln f(x) \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{3.1}$$

Тоді для всіх $\sigma < 0$

$$\varlimsup_{\tau\to+\infty} \frac{\ln(R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau})}{\ln f(\tau)} = 1 + \varlimsup_{\tau\to+\infty} \frac{\ln \Delta F(\tau)}{\ln f(\tau)}. \tag{3.2}$$

Доведення. Оскільки $\sigma < 0$, то

$$R_\tau(\sigma) \ge \int\limits_{[\tau,\,\tau+1)} f(x)e^{\sigma x}dF(x) \ge e^{\sigma(\tau+1)} \inf_{[\tau,\,\tau+1)} f(x)\Delta F(\tau)$$

і з огляду на (3.1)

$$\ln(R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}) \ge \sigma + o(1) + \ln f(\tau) + \ln \Delta F(\tau), \quad \tau \to +\infty,$$

звідки

$$\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\left(R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\right)}{\ln\, f(\tau)}\geq 1+\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\,\Delta F(\tau)}{\ln\, f(\tau)}. \tag{3.3}$$

З іншого боку,

$$R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{|\sigma|\tau}\int\limits_{[\tau+k,\,\tau+k+1)}f(x)e^{\sigma x}dF(x)\leq\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{[\tau+k,\,\tau+k+1)}f(x)\Delta F(\tau+k)e^{\sigma k}. \tag{3.4}$$

З (3.1) випливає, що для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $\tau\geq\tau_0(\varepsilon)$

$$\sup_{[\tau+k,\,\tau+k+1)}\ln\, f(x)\leq\ln\, f(\tau+k)+\varepsilon\leq\ln\, f(\tau)+(k+1)\varepsilon.$$

Якщо

$$h:=\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\,\Delta F(\tau)}{\ln\, f(\tau)}<+\infty,$$

то $\ln\,\Delta F(\tau)\leq h_1\ln\, f(\tau)$ для всіх $h_1>h$ і для всіх $\tau\geq\tau_0(h_1)$. Тому з (3.4) отримуємо

$$R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\leq\sum_{k=0}^{\infty}e^{\varepsilon}f(\tau+k)f(\tau+k)^{h_1}e^{\sigma k}\leq e^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}f(\tau)^{1+h_1}e^{(1+h_1)k\varepsilon}e^{\sigma k}\leq$$
$$\leq e^{\varepsilon}f(\tau)^{1+h_1}\sum_{k=0}^{\infty}e^{((1+h_1)\varepsilon-|\sigma|)k}=\frac{e^{\varepsilon}f(\tau)^{1+h_1}}{1-e^{(1+h_1)\varepsilon-|\sigma|}}$$

за умови $(1+h_1)\varepsilon<|\sigma|$, звідки з огляду на довільність ε і h_1 одержуємо нерівність

$$\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\left(R_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\right)}{\ln\, f(\tau)}\leq 1+h, \tag{3.5}$$

яка є очевидною, якщо $h=+\infty$. З (3.3) і (3.5) маємо (3.2). Теорему 5 доведено.

Зауваження 1. З теорем 1, 2 і 5 випливає, що за умов (3.1) і $f(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, для всіх $\sigma<0$ виконуються нерівності

$$1+\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\, c(\tau)}{\ln\, f(\tau)}\leq\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\left(E_\tau(\sigma)e^{|\sigma|\tau}\right)}{\ln\, f(\tau)}\leq 1+\varlimsup_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\,\Delta F(\tau)}{\ln\, f(\tau)}.$$

---

1. *Микитюк Л.Я., Шеремета М.М.* До апроксимації рядів Діріхле експоненціальними многочленами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1999.– Вип. 53.– С.35-39.

2. *L.Ya. Mykytyuk, M.M. Sheremeta,* On the remainder of Dirichlet series // Матем. студії.– 2003.– T.19, N 1.– C. 55-60.

3. *Микитюк Л.Я., Шеремета М.М.* Про асимптотичну поведінку залишку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Укр. матем. журн.– 2003.– Т.55, N 3.– С. 379-388.

4. *Посіко О.С., Скасків О.Б., Шеремета М.М.* Оцінки інтегралу Лапласа-Стільтьєса //Матем. студії.– 2004.– Т.21, N 2.– С. 179-186.

5. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле.– К., 1993.

ON THE APPROXIMATION AND BEHAVIOUR OF THE REMAINDER OF LAPLACE-STILTJES INTEGRAL

Lyubov Mykytyuk, Olena Posiko

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Approximation and behaviour of the remainder of the integral $\int_0^\infty f(x)\exp\{sx\}dF(x)$ are investigated, where the function f is positive and bounded on each finite interval and function F is nonnegative nondecreasing unbounded and continuous on the right on $[0,+\infty)$.

Key words: Laplace-Stiltjes integral, remainder of Laplace-Stiltjes integral.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2005

Прийнята до друку 02.11.2006