ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.115–127 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.115–127*

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, ЗБУРЕНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача АН України,
вул. Наукова, 3а, 79060 Львів, Україна

Визначено розв'язність нормальної крайової задачі для параболічного диференціального рівняння з псевдодиференціальним доданком. Знайдено точну оцінку наближення її розв'язку за допомогою скінчених ітерацій функції Гріна незбуреної параболічної крайової задачі.

Ключові слова: параболічне рівняння, псевдодиференціальний оператор, наближення розв'язку.

У статті [1] доведено існування розв'язку крайової задачі для параболічного рівняння, збуреного довільним (не обов'язково диференціальним) оператором на правильному проміжному просторі банахової пари секторіального оператора задачі та його області визначення, побудовано наближення розв'язку за допомогою ітерацій резольвенти оператора незбуреної параболічної крайової задачі. Побудова наближень ґрунтується на аналітичній залежності розв'язку від збурюючого оператора. Як з'ясовано в [1], такі наближення мають точні оцінки збіжності.

У цій праці, використовуючи результати [2,3], одержуємо наближення розв'язку абстрактної задачі Коші для збуреного параболічного рівняння без обмежень на норму збурюючого оператора. Наведено застосування для розв'язку загальної крайової задачі для параболічного диференціального рівняння з псевдодиференціальним доданком. З'ясовано, що наближення розв'язку можуть бути виражені через ітерації функції Гріна незбуреної параболічної крайової задачі.

1. Формулювання задачі. Існування та єдиність її розв'язку . В обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞ розглядаємо сильно еліптичний лінійний оператор

$$L(x,D) = \sum_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma(x) D^\gamma,$$

тобто такий, що $\mathrm{Re}\, a(x,\xi) = \mathrm{Re} \sum\limits_{|\gamma|=2m} a_\gamma(x)\xi^\gamma > 0$ при $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathrm{R}^n\backslash\{0\}$ та $x = (x_1,\dots,x_n) \in \overline{\Omega}$ і вважаємо функції $a_\gamma(x)$ обмеженими, а при $|\gamma| = 2m$ неперервними в $\overline{\Omega}$.

Нехай $\theta \in (0,1)$, L_1 – псевдодиференціальний оператор із символом $[a_1(x,\xi)]^\theta$, де $\mathrm{Re}\, a_1(x,\xi) = \mathrm{Re} \sum\limits_{|\alpha|\le 2m} a_{1\alpha}(x)(-i\xi)^\alpha > 0$ при $\xi \in \mathrm{R}^n\backslash\{0\}$ та $x \in \overline{\Omega}$, $a_{1\alpha} \in L_\infty(\Omega)$ і функції $a_{1\alpha}(\xi)$ при $|\alpha| = 2m$ неперервні в $\overline{\Omega}$, $L_1 v = F^{-1}_{x\to\xi}[[a_1(x,\xi)]^\theta F_{\xi\to z}]v$.

Нехай на межі $S = \partial\Omega$ визначено оператори

$$B_j(x,D) = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma}(x) D^\gamma, \qquad b_{j,\gamma} \in C^{2m-k_j}(\partial\Omega), \quad j = 1,\dots,m$$

і система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна (див., напр., [4]).

Розглянемо замкнений оператор

$$(Av)(x) = L(x,D)\, v(x),$$

заданий у просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі

$$V_1 = D(A) = W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \Big\{ v \in W^{2m}_p(\Omega) : \, B_j(x,D)v\,|_{\partial\Omega} = 0; \; j = \overline{1,m} \Big\}.$$

Тут $W^{2m}_p(\Omega)$ — простір Соболєва, підпростір $W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ замкнений в $W^{2m}_p(\Omega)$ і наділений його нормою. На щільному в $L_p(\Omega)$ підпросторі

$$V_\theta = H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) := \Big\{ v \in H^{2m\theta}_p(\Omega) : \, B_j(\xi,D)v_{\,|\,\partial\Omega} = 0; \; j = \overline{1,m} \Big\}$$

з нормою простору беселевих потенціалів $H^{2m\theta}_p(\Omega)$ порядку $2m\theta$ задамо замкнений в $L_p(\Omega)$ оператор

$$X : \; H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega), \quad Xu = L_1 u \quad \forall u \in H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$$

(зауважимо, що підпростір $H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ замкнений в $H^{2m\theta}_p(\Omega)$).

Відомо (див. результати Сілі [4,5]) таке: якщо для нормальної системи $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ виконуються нерівності

$$k_j < 2m\theta - 1/p \qquad \forall j = 1,\dots,m, \tag{1}$$

то реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \simeq \big[L_p(\Omega), W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \big]_\theta,$$

де справа проміжний простір з показником θ, породжений методом комплексної інтерполяції пари $V = \{L_p(\Omega), W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\}$. Зауважимо, що $H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \mathcal{D}(J^\theta)$ є областю визначення дробового степеня оператора

$$J = \left[E_{10} - (-\Delta)^{1/2}\right]^{2m} : W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)$$

(див. [4], 2.5.3). Це дає змогу до оператора A застосувати результати [2,3] про інтерполяцію дробовими степенями операторів.

Нехай $f \in C\big([0,T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$, $g \in W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$. Розглядаємо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + L_1 u + f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$B_j u\,|_S = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad u(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega,$$

яку можна записати у вигляді абстрактної задачі Коші

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = \big(A + X\big)\, v(x,t) + f(x,t), \qquad v(x,0) = g(x). \tag{3}$$

Зафіксуємо деякий кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і зіставимо йому в комплексній площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання, відповідно

$$\Lambda_0 := \bigcup \left\{re^{i\omega} : r > 0, \, \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\right\} \qquad \text{i} \qquad \Lambda := \Lambda_0 \bigcup \{0\}.$$

Для довільного числа $a > 0$ позначаємо $\Lambda_{-a} := \Lambda \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le a\}$.

Нехай над полем $\mathbb{C}$ задано пару банахових просторів $\big(V_0, \|\cdot\|_0\big)$ та $\big(V_1, \|\cdot\|_1\big)$ з неперервним і щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$.

Через $\mathcal{A}$ позначаємо клас таких операторів $A : V_1 \longmapsto V_0$, резольвента яких $\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}$ є визначеною та рівномірно обмеженою за нормою $\mathcal{L}(V_0; V_1)$ стосовно всіх чисел $\lambda \in \Lambda$, тобто

$$\mathcal{A} := \Big\{A \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda \in \Lambda} \big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty\Big\}.$$

Зазначимо, що для довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ існує обернений $A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0, V_1)$. Кожен з операторів $A \in \mathcal{A}$ можемо трактувати як необмежений лінійний оператор над банаховим простором V_0 із щільною областю визначення $V_1 = D(A)$. Далі позначаємо через

$$\varrho\,(A) := \{\lambda : \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)\} \quad \text{i} \quad \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho\,(A)$$

відповідно резольвентну множину і спектр оператора A.

Оператори класу $\mathcal{A}$ будемо називати *секторіальними операторами від'ємного типу* $r(A) := \sup\{\,\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ над простором V_0.

Резольвентою оператора A далі називаємо операторнозначну функцію $\varrho\,(A) \ni \lambda \longmapsto \big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)$. Використовуватимемо результати і позначення [6]. Звичайно ж резольвентою називають операторнозначну функцію вигляду

$R(\lambda, A) := E_{10}\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$, очевидно, також визначену для всіх чисел $\lambda \in \varrho(A)$. У наших позначеннях під обмеженим оберненим до оператора A розуміється оператор $E_{10}A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$.

Оскільки лінійні оператори, які мають непорожню резольвентну множину, є замкненими [7], то клас $\mathcal{A}$ складається з замкнених операторів над простором V_0. Тому для будь-якого оператора A із цього класу спектр $\sigma(A)$ замкнений, а резольвентна множина $\varrho(A)$ є відкритою на комплексній площині $\mathbb{C}$. До того ж функція $R(\lambda, A)$ аналітична в $\varrho(A)$. Правильне включення $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$, де множина справа відкрита. З огляду на замкненість спектра звідси випливає, що тип $r(A)$ довільного оператора A класу $\mathcal{A}$ є насправді числом від'ємним. Крім того, завжди існує таке залежне від оператора A число a, що $0 < a < -r(A)$, $\Lambda_a \subset \varrho(A)$.

Загалом (див. [8]) лінійний оператор A над банаховим простором V_0 називають секторіальним, якщо існують такі сталі $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$, $\beta \in \mathbb{R}$ та $C > 0$, що $\beta + \Lambda_0 \subset \varrho(A)$, $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C}{|\lambda-\beta|}$ при $\lambda \in \beta + \Lambda_0$. Отже, довільний секторіальний оператор лінійною заміною зводиться до оператора класу $\mathcal{A}$.

Припущення (A). Нехай щодо оператора $L(x, D)$ для будь-якого кута $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$, де $\omega_0 \in \big(\pi/2, \pi\big)$, виконуються умови Агмона $a(x, \xi) \neq e^{i\omega}$ для будь-якого $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$; для ненульового вектора μ_x, дотичного в точці $x \in \partial\Omega$, та нормального до S у цій точці вектора ν_x кожний поліном $\mathbb{C} \ni z \to a(x, \mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, де $\lambda \in l_\omega = \{re^{i\omega} : r > 0\}$, має рівно m коренів $z_1(\lambda, \mu_x), \ldots, z_m(\lambda, \mu_x)$ з додатною уявною частиною, при цьому поліноми $\{b_j\,(x,\, \mu_x + z\,\nu_x)\}_{j=1}^m$ лінійно незалежні за модулем $\prod\limits_{j=1}^{m} [z - z_j(\lambda, \mu_x)]$; виконуються нерівності (1).

Згідно з [2,3] за припущення (A) існує таке число $\beta \in \mathbb{R}$, що сектор Λ_a належить резольвентній множині $\rho(A + \beta E_{10})$ оператора $A + \beta E_{10}$ і

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \in \Lambda_a} \big\| E_{1\theta}((\lambda - \beta)E_{10} - A)^{-1} \big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega), B^{2m\theta}_{p,q,\{B_j\}}(\Omega)\right)} := K_a < \infty, \\ &\sup_{\lambda \in \Lambda_a} \big\| \lambda R(\lambda, A + \beta E_{10}) \big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega)\right)} := C_a < \infty; \end{aligned} \tag{4}$$

а якщо для оператора X виконується умова

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_a} \big\| X R(\lambda, A + \beta E_{10} + X E_{1\theta}) \big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega)\right)} := \delta < 1, \tag{5}$$

то сектор Λ_a лежить у резольвентній множині $\varrho(A + XE_{1\theta} + \beta E_{10})$ оператора $A + XE_{1\theta} + \beta E_{10}$ і правильна нерівність

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_1} \big\| \lambda R(\lambda, A + \beta E_{10} + X E_{1\theta}) \big\|_{\mathcal{L}\left(L_p(\Omega)\right)} \leq \frac{C_a}{1 - \delta}, \tag{6}$$

оператори $A_1 = A + \beta E_{10}$ та $A_1 + X\,|_{W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)}$ належать класу $\mathcal{A}$. З результатів [2] випливає така теорема.

Теорема 1. *За припущення* (A) *при* $f \in C\big([0,T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$, $g \in W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$ *існує єдиний розв'язок* $u \in C\big([0,T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) \bigcap C^1\big([0,T]; L_p(\Omega)\big)$ *задачі (2).*

2. Наближення розв'язку абстрактної задачі Коші. Числу $a > 0$ та числу $c:\ \pi/2 < \omega_0 - c < \pi$ поставимо у відповідність відкриті комплексні області

$$\Lambda^c := \mathbb{C} \setminus [\{l_\omega : \omega \in [-\omega_0 + c, \omega_0 - c]\} \cup \{0\}],$$

$$\Lambda^c_a := \mathbb{C} \setminus \left[\left\{l_\omega : \omega \in \left[-\omega_0 + c, \omega_0 - c\right]\right\} \bigcup \left\{\lambda : |\lambda| \le a\right\}\right],$$

$$\Lambda^c_{-a} := \mathbb{C} \setminus [\{l_\omega : \omega \in \left[-\omega_0 + c, \omega_0 - c\right]\} \setminus \{\lambda : |\lambda| \le a\}],$$

де, як і вище, кут $\omega_0 :\ \pi/2 < \omega_0 < \pi$ визначає сектор $\Lambda := \left\{l_\omega : \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\right\} \bigcup \left\{0\right\}$. Очевидно, що $\mathbb{C} \setminus \Lambda \subset \Lambda^c$, $\mathbb{C} \setminus \Lambda_a \subset \Lambda^c_a$, $\mathbb{C} \setminus \Lambda_{-a} \subset \Lambda^c_{-a}$, при $c = 0$ правильні рівності $\Lambda^0 = \mathbb{C} \setminus \Lambda$, $\Lambda^0_a = \mathbb{C} \setminus \Lambda_a$, $\Lambda^0_{-a} = \mathbb{C} \setminus \Lambda_{-a}$.

Зафіксуємо далі строго додатне $c:\ \pi/2 < \omega_0 - c < \pi$. Розглядаємо алгебру $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ та алгебру $\mathcal{H}(\Lambda^c_a)$ функцій, голоморфних відповідно в Λ^c_{-a}, Λ^c_{-a} та неперервних на замиканні області з нормою $\|\varphi\|_{-a} := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^{+\infty} M_\varphi(r) \frac{dr}{r} + \sup_{\lambda \in \Lambda^c_{-a}} \left|\varphi(\lambda)\right|$ (відповідно $\|\varphi\|_{-a} := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^{+\infty} M_\varphi(r) \frac{dr}{r} + \sup_{\lambda \in \Lambda^c_a} \left|\varphi(\lambda)\right|$). Величина $m_{-a}(\varphi) := \sup\limits_{\lambda \in \Lambda^c_{-a}} \left|\varphi(\lambda)\right|$ є рівномірною нормою в алгебрі всіх аналітичних функцій в області Λ^c_{-a} та неперервних на замиканні $\overline{\Lambda^c_{-a}}$, при цьому такою, що $m_{-a}(\varphi) \le \|\varphi\|_{-a}$ для всіх $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$. Отже, якщо φ_n — фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ стосовно норми $\|\cdot\|_{-a}$, то вона фундаментальна стосовно норми m_{-a}. А тому її границя $\varphi \overset{\|\cdot\|_{-a}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \overset{m_{-a}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ також буде функцією аналітичною в області Λ^c_{-a} та неперервною на її замиканні $\overline{\Lambda^c_{-a}}$, причому такою, що $\|\varphi\|_{-a} < \infty$. Тобто, алгебра $\mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$ — банахова.

Індуктивна границя банахових алгебр $\mathcal{H}(\Lambda^c_0) := \bigcup\limits_{a>0} \mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$, взята за числами $a > 0$ з достатньо малого околу нуля, є топологічною алгеброю і складається з функцій, голоморфних в кожній з областей Λ^c_{-a} та неперервних в замиканнях $\overline{\Lambda^c_{-a}}$ (які містять деякий окіл точки $\left\{0\right\}$). Як видно з побудови, правильним є включення $\mathcal{H}(\Lambda^c_0) \subset \mathcal{H}(\Lambda^c) := \bigcap\limits_{a>0} \mathcal{H}(\Lambda^c_{-a})$.

Розглянемо контур $\Gamma_{a,\omega} := \Gamma^+_{a,\omega} \bigcup \Gamma^-_{a,\omega} \bigcup \Gamma^0_a$, де числа $\omega :\ \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ та $a > 0$ фіксовані і взято

$$\Gamma^+_{a,\omega} := \left\{re^{i\omega} : r \ge a\right\}, \quad \Gamma^-_{a,\omega} := \left\{re^{-i\omega} : r \ge a\right\}, \quad \Gamma^0_a := \left\{ae^{i\tau} : \tau \in \left[\omega, 2\pi - \omega\right]\right\}.$$

Нехай A – замкнений лінійний секторіальний оператор від'ємного типу у комплексному банаховому просторі $(V_0, \|\cdot\|_0)$ зі щільною областю визначення V_1, тобто $A \in \mathcal{A}$. Згідно з [4] для $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)$ (отже, для $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c_0)$) існує такий контур $\Gamma_{a,\omega} \subset \varrho(A)$, що для довільного числа $t > 0$ формула

$$\varphi(tA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(t\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda, \tag{7}$$

яка не залежить від вибору в контурі числа a і кута ω, однозначно визначає гомоморфізм

$$\mathcal{H}(\Lambda^c) \ni \varphi(t\lambda) \longmapsto \varphi(tA) \in H\big(\mathcal{A}\big) \tag{8}$$

алгебри скалярних аналітичних функцій на комутативну алгебру $\mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$-значних функцій операторного аргументу

$$H\big(\mathcal{A}\big) := \Big\{\mathcal{A} \ni tA \longmapsto \varphi(tA) \in \mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1) :\, \varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)\Big\}$$

з „поточково“ визначеними алгебричними операціями множення $\varphi(A)\cdot\psi(A) = (\varphi\cdot\psi)(A)$ та додавання і множення на скаляри $\alpha\varphi(A)+\beta\psi(A) = (\alpha\varphi+\beta\psi)(A)$ для всіх функцій φ, ψ, скалярів $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і операторів $A \in \mathcal{A}$. Гомоморфізм (8) неперервний у такому сенсі: якщо в алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ послідовність функцій φ_n має границю $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \overset{\mathcal{H}(\Lambda^c)}{=} \varphi$, то для будь-якого оператора $A \in \mathcal{A}$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(A) \overset{\mathcal{L}(V_j)}{=} \varphi(A)$ за нормою алгебри $\mathcal{L}(V_j)$, $j = 0, 1$ для всіх операторів $A \in \mathcal{A}$.

Далі пару комплексних банахових просторів V_0 і V_1 з неперервним і щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \longmapsto V_0$ будемо скорочено позначати однією літерою $V := (V_0, V_1)$. Сукупність усіх таких обмежених лінійних операторів $T : V_0 \to V_0$, що $T(V_1) \subset V_1$ утворює банахову алгебру $\mathcal{L}(V)$ — обмежених лінійних операторів над банаховою парою V стосовно рівномірної операторної норми $\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V)} := \max\limits_{j=0,1}\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V_j)}$, де $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V_j)}$ рівномірна норма в алгебрі $\mathcal{L}(V_j)$ – обмежених лінійних операторів над банаховим простором V_j та $j = 0\,,1$. Зауважимо, що скінченність норми $\big\|T\big\|_{\mathcal{L}(V_1)}$ випливає з неперервності вкладення E_{10} та теореми про замкнений графік.

Означення 1. *Проміжним простором банахової (інтерполяційної) пари* (V_0, V_1) *називається такий банахів простір* X, *що* $V_0 \cap V_1 \subset X \subset V_0 \cup V_1$.

Зауважимо, що $V_1 \subset X \subset V_0$ для проміжного простору X, якщо V_1 щільно вкладений у V_0, і всі вкладення неперервні.

Означення 2. *Правильним проміжним простором для банахової пари* (V_0, V_1) *називається проміжний простір* U *цієї пари, для якого виконується одна з умов:*

1) $U = V_1$;

2) для довільного $\epsilon > 0$ *існує така стала* $C_\epsilon > 0$, *що* $||x||_U \le \epsilon||x||_{V_1} + C_\epsilon||x||_{V_0}$.

Прикладом U є інтерполяційний простір з показником $\theta \in (0,1)$ для пари (V_0, V_1) (див. [3]).

З [2] випливає таке: якщо U — правильний проміжний простір пари V, то для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ існує таке число $\delta(A) > 0$, що для будь-якого оператора $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$ з нормою $\|X\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} < \delta(A)$ виконується $A + X\,|_{V_1} \in \mathcal{A}$. Звідси, зокрема, при $\varphi \in H(\mathcal{A})$

$$\varphi(A+X) - \varphi(A) \,\in H\big(\mathcal{A}\big), \qquad X \in \mathcal{L}(U, V_0) :\, \|X\|_{\mathcal{L}(U,V_0)} < \delta(A).$$

Цей факт дає змогу запровадити узагальнення похідної для функцій операторного аргументу $\varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big)$ (див. [2]) та визначити оператори диференціювання [9].

Нехай далі $U = V_\theta$ —інтерполяційний простір для пари (V_0, V_1) – область визначення оператора $(-J)^\theta$ (зокрема $V_\theta = H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$). Це правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0; V_1\}$ (див. [3]), причому тоді $V_1 \subset V_\theta \subset V_0$.

Диференціюванням у напрямі заданого оператора $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ називаємо [2,9] визначений на алгебрі $H(\mathcal{A})$ лінійний оператор вигляду

$$D_X : H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi'(A)\big[X\big] \in \mathcal{L}(V_0), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Цілі степені диференціювання в напрямі $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ також визначаємо на алгебрі $H(\mathcal{A})$ як лінійні оператори вигляду

$$D^k_X : H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi^{(k)}(A)\big[\underbrace{X, \ldots, X}_{k}\big] \in \mathcal{L}(V_0), \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лінійність операторів диференціювання D^k_X випливає зі способу їх визначення. Ці оператори володіють додатковою властивістю інваріантності стосовно операції множення в алгебрі $H(\mathcal{A})$ [9].

Враховуючи властивість неперервності гомоморфізму з алгебри аналітичних функцій $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ на алгебру операторних функцій $H(\mathcal{A})$, кажемо, що послідовність $\varphi_n(A) \in H(\mathcal{A})$ збігається в алгебрі $H(\mathcal{A})$ до функції $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$, якщо для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ за нормою операторної алгебри $\mathcal{L}(V_0)$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(A) = \varphi(A)$. Це є „поточкова“ збіжність операторних функцій в їх області визначення.

Із результатів [2,9] випливає таке: якщо U — правильний проміжний простір банахової пари V та $\varphi(A) \in H(\mathcal{A})$, то для будь-яких операторів $A \in \mathcal{A}$ та $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ існує таке додатне число $\delta_{A,X}$, що за нормою $\mathcal{L}(V_0)$

$$\varphi(A + tX) \overset{\mathcal{L}(V_0)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k_{tX}}{k!}\,\varphi(A), \qquad \forall\, t \le \delta_{A,X}\,, \tag{9}$$

причому збіжність ряду абсолютна та рівномірна за числами $t : 0 \le t \le \delta_{A,X}$. Визначена рядом (9) над алгеброю $H(\mathcal{A})$ експонента

$$e^{D_{tX}} : \big[0, \delta_{A,X}\big] \ni t \longmapsto e^{D_{tX}}\,\varphi(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k_{tX}}{k!}\,\varphi(A)$$

володіє півгруповою властивістю $e^{D_{(t+s)X}} = e^{D_{tX}}\,e^{D_{sX}}$ для всіх $t, s, t+s \in \big[0, \delta_{A,X}\big]$, та правильне зображення

$$D^k_X e^{tA}[X, \ldots, X] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda} E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \sum_{n=0}^{k-1} [X E_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k d\lambda,$$

де $E_{1\theta}\colon V_1 \longrightarrow V_\theta$ –оператор вкладення. Для довільного $X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0)$ з довільною нормою $\|X\|$

$$A+X\in\mathcal{A}\quad \text{і}\quad \Lambda\subset\varrho(A+X)\cap\varrho(A)\qquad (\text{див.}[2]).$$

Введемо позначення

$$G_{l-1}=\sum_{k=0}^{l-1}e^{tD_X^k}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{l-1}\int_{\Gamma_{a,\omega}}e^{t\lambda}E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k d\lambda,$$

$$u_l(t)=G_{l-1}(t,X)g+\int_0^t G_{l-1}(t-\tau,X)f(\tau)d\tau,\ l=1,2,\ldots. \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай* $A\in\mathcal{A}$, $D(A)=V_1$, V_θ *- проміжний простір з показником* $\theta\in(0,1)$ *банахової пари* (V_0,V_1), $X\in\mathcal{L}(V_\theta,V_0)$, $f(t)\in C([0,T],V_1)$, $g\in V_1$, $u(t)$*– розв'язок задачі*

$$\frac{du}{dt}=(A+X)u+f(t),\qquad u(0)=g. \tag{11}$$

Існує така додатна стала $C=C(A,X)$, *що правильна оцінка*

$$\sup_{t\in[0,T]}||u(t)-u_l(t)||_{V_0}\le\frac{C}{2^{l-1}}[||g||_{V_0}+\int_0^T||f(t)||_{V_0}dt],\quad l=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Доведення. Згідно з [2] для всіх $f\in C([0,T],V_1)$, $g\in C^1([0,T],V_0)$ існує єдиний розв'язок $u\in C((0,T],V_1)\cap C^1((0,T),V_0)$ задачі (11). Його можна подати у вигляді

$$v(t)=e^{t(A+XE_{1\theta})}g+\int_0^t e^{(t-\tau)(A+XE_{1\theta})}f(\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

де півгрупа має зображення

$$e^{t(A+XE_{1\theta})}=\int_{\Gamma_{a,\omega}}e^{t\lambda}E_{10}(\lambda E_{10}-A-XE_{1\theta})^{-1}\,d\lambda$$

та $\Gamma_{a,\omega}\in\varrho(A+XE_{1\theta})$. З тотожності

$$(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1}=(\lambda E_{10}-A)^{-1}[E_{00}-XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}, \tag{14}$$

де $E_{00}\colon V_0\longrightarrow V_0$ – тотожне відображення, одержуємо

$$\begin{aligned}(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1}\quad &=\sum_{k=0}^{l-1}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k+\\ &+\sum_{k=l}^{\infty}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k.\end{aligned}$$

Остання сума після заміни індексу підсумовування набуває вигляду

$$\sum_{k=l}^{\infty}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{k+l}=$$
$$=[E_{00}-XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^l.$$

Застосовуючи формулу (14) знову, матимемо

$$\begin{aligned}(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1} &=\sum_{k=0}^{l-1}(\lambda E_{10}-A)^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k+ \\ &+(\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta}))^{-1}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^l.\end{aligned} \tag{15}$$

Застосовуючи до цієї тотожності інтеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{t\lambda}\ldots d\lambda$, одержуємо

$$\begin{aligned}&\left\|[e^{t(A+XE_{1\theta})}-G_{l-1}(t,X)]g\right\|_{V_0}= \\ &=\left\|\Big[\int_{\Gamma_{a,\omega}}\frac{e^{t\lambda}}{2\pi i}E_{10}[\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta})]^{-1}\big[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big]^l d\lambda\Big]\,g\right\|_{V_0}.\end{aligned} \tag{16}$$

Записуємо

$$E_{10}[\lambda E_{10}-(A+XE_{1\theta})]^{-1}=[E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}][E_{00}-XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}=$$
$$=E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^k.$$

За умови

$$||XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}||\le\delta, \tag{17}$$

враховуючи незалежність зображення півгрупи від вибору параметра a в контурі інтегрування, подібно до [1] одержуємо

$$\begin{aligned}&\|E_{10}[\lambda E_{10}-A-XE_{1\theta}]^{-1}\|_{L(V_0)}\le \\ &\quad\le\|E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\|_{L(V_0)}\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\|XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}\|^j_{L(V_0)}\le \\ &\qquad\le C_0K_a(A)\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\delta^j=\frac{C_0K_a(A)}{1-\delta},\end{aligned}$$

де $\quad C_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\cos\omega}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds+\frac{\pi-\omega}{\pi},\qquad K_a(A)=\sup_{\lambda\in\Lambda_a}\left\|\lambda E_{10}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}.$

Тому оцінюємо праву частину (16) як $\dfrac{C_0K_a(A)}{1-\delta}\delta^l||g||_{V_0}$. Отже,

$$\left\|[e^{t(A+XE_{1\theta})}-G_{l-1}(t,X)]g\right\|_{V_0}\le\frac{C_0K_a(A)\delta^l}{1-\delta}||g||_{V_0}. \tag{18}$$

З неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає існування інтеграла $\int\limits_0^t ||f(t)||_{V_0} dt$. Тому

$$\Big\| \int_0^t [e^{t-\tau}(A + XE_{1\theta}) - G_{l-1}(t-\tau, X)] f(\tau) d\tau \Big\|_{V_0} \le \frac{C_0 K_a(A) \delta^l}{1-\delta} \int_0^t \|f(\tau)\|_{V_0} d\tau. \quad (19)$$

Залишається показати виконання умови (17). При $D(X) = V_\theta$ в [2] доведено нерівність

$$\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0, V_\theta)} \le \frac{C'}{|\lambda|^{1-\theta}}, \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda_0,$$

звідки при $\lambda \in \Gamma_{a,\omega}$

$$\|XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le$$

$$\le \|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)} \cdot \|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{L(V_0)} \le \tfrac{C'}{|\lambda|^{1-\theta}} \|X\|_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)} \le \tfrac{C' ||X||_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)}}{a^{1-\theta}}.$$

Вибираючи $a^{1-\theta} = 2C' ||X||_{\mathcal{L}(V_\theta, V_1)}$, одержуємо

$$||XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{1}{2}, \qquad \forall\, X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0).$$

Отож, у (18), (19) можна взяти $\delta = \frac{1}{2}$. Позначаємо $C = C(A, X) = C_0 K_a(A)$ при вибраному вище a. Теорему доведено.

3. Наближення розв'язку крайової задачі. Розглянемо задачу (2). Використовуючи властивості оператора диференціювання, формулу (13) розв'язку задачі Коші (3) (а отже, й задачі (2)) можна подати у вигляді збіжного в V_0 ряду

$$v(t) = G(t, X)g + \int_0^t G(t-\tau, X) f(\tau) d\tau, \quad (20)$$

де

$$G(t, X) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda} e^{t\lambda} E_{10} (\lambda E_{10} - A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [XE_{1\theta}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k d\lambda. \quad (21)$$

У [10] з'ясовано існування та властивості функції Гріна $\Gamma(x, y, t)$ відповідної (2) незбуреної параболічної крайової задачі.

Теорема 3. *Нехай виконується припущення* (A), $u(x,t)$ *– розв'язок задачі (2) при* $f \in C\Big([0,T]; W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$, $g \in W^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$,

$$u_l(x,t) = \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} \Gamma_k(x,y,t) g(y) dy + \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=0}^{l-1} \Gamma_k(x,y,t-\tau) f(y,\tau) dy d\tau,\ l = 1, 2, \ldots, \quad (22)$$

де $\Gamma_0(x,y,t) = \Gamma(x,y,t)$, $\Gamma_k(x,y,t) = \int_0^t \int_\Omega \Gamma_{k-1}(x,z,t-\tau) L_{1z} \Gamma(z,y,\tau)\, dz\, d\tau$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тоді існує така додатна стала* C, *що*

$$\sup_{t\in[0,T]} \big\|u(t) - u_l(t)\big\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{C}{2^{l-1}} \Big[\|g\|_{L_p(\Omega)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L_p(\Omega)} dt\Big],\ l = 1, 2, \ldots. \quad (23)$$

Доведення. Враховуючи, що задачу (2) можна записати у вигляді абстрактної задачі Коші (11), оцінку (23) одержуємо з теореми 2. Залишається показати, що наближення (10) можна записати у вигляді (22).

Розв'язок задачі (11) при $f = 0$ має вигляд

$$u = e^{At}g = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}g\,d\lambda. \tag{24}$$

Зауважимо, що згідно з [10] розв'язок відповідної (2) незбуреної параболічної крайової задачі

$$u(x,t) = \int_\Omega \Gamma(x,y,t)g(y)\,dy, \tag{25}$$

а також $E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}g(x) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{G}_\lambda(x,y)g(y)\,dy$, де $\tilde{G}_\lambda(x,y)$ – функція Гріна незбуреної еліптичної крайової задачі

$$\lambda u - Lu = 0, \quad x \in \Omega, \qquad B_j u\,|_S = 0, \quad j = 1,\dots,m.$$

Відомо [10], що $\tilde{G}_\lambda(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\Gamma(x,y,\tau)\,d\tau$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}g\,d\lambda = \int_\Omega \Gamma(x,y,t)g(y)\,dy. \tag{26}$$

Виконуючи перетворення

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}g\,d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}\int_\Omega \Big(\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\Gamma(x,y,\tau)\,d\tau\Big)g(y)\,dy\,d\lambda = \\
&= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta}\Big(\int_0^\infty e^{\lambda(t-\tau)}\Gamma(x,y,\tau)d\tau\Big)d\lambda\Big]g(y)\,dy = \\
&= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda-\beta}\Big(\int_0^t e^{\lambda\tau}\Gamma(x,y,t-\tau)d\tau\Big)d\lambda\Big]g(y)\,dy
\end{aligned}$$

та враховуючи (24), (26), для всіх $x, y \in \Omega$, $t \in [0,T]$, одержуємо

$$\Gamma(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta}\tilde{G}_\lambda(x,y)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta}\Big(\int_0^t e^{\lambda\tau}\Gamma(x,y,t-\tau)\,d\tau\Big)\,d\lambda. \tag{27}$$

Формула (26) набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}g\,d\lambda = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}\tilde{G}_\lambda(x,y)\,d\lambda\Big)g(y)\,dy. \tag{28}$$

Використовуючи формули (27), (26), матимемо

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}E_{10}(\lambda E_{10}-A)^{-1}XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g\,d\lambda\Big] = \\
&= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}\tilde{G}_\lambda(x,y)XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(y)d\lambda\Big]dy = \\
&= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta}\Big(\int_0^t e^{\lambda\tau}\Gamma(x,z,t-\tau)d\tau\Big)XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(z)d\lambda\Big]dz = \\
&= \int_\Omega \Big[\int_0^t \Gamma(x,z,t-\tau)X_zE_{1\theta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda\tau}(\lambda E_{10}-A)^{-1}g(z)\Big)d\lambda)d\tau\Big]dz =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Big[\int_0^t d\tau\Gamma(x,z,t-\tau)L_{1z}\int_\Omega \Gamma(x,z,\tau)g(y)dy\Big]dz = \\
&= \int_\Omega \Big[\int_0^t d\tau\int_\Omega \Gamma(x,z,t-\tau)L_{1z}\Gamma(x,z,\tau)dz\Big]g(y)dy = \int_\Omega \Gamma_1(x,y,t)g(y)dy,
\end{aligned}
$$

де $\Gamma_1(x,y,t) = \displaystyle\int_0^t\int_\Omega \Gamma(x,z,t-s)\Gamma(z,y,s)dzds.$

Припускаючи за індукцією, що

$$
\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1})^k g\,d\lambda\Big](x) = \int_\Omega \Gamma_k(x,y,t)g(y)dy,
$$

знаходимо

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)^{-1})^{k+1} g\,d\lambda\Big](x) = \\
&= \Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}(XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A))^{k}XE_{1\theta}(\lambda E_{10}-A)g\,d\lambda\Big](x) = \\
&= \int_\Omega \Big[\int_0^t \Gamma_k(x,z,t-s)X_zE_{1\theta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda-\beta} e^{\lambda t}(\lambda E_{10}-A)^{-1}d\lambda\Big)ds)g\Big](z)dz = \\
&= \int_\Omega \Big[\int_0^t \Gamma_k(x,z,t-s)L_{1z}\Big(\int_\Omega \Gamma(z,y,s)g(y)dy\Big)ds\Big]dz = \\
&= \int_\Omega \Big[\int_0^t ds\int_\Omega \Gamma_k(x,z,t-s)L_{1z}\Gamma(z,y,s)dz\Big]g(y)dy = \int_\Omega \Gamma_{k+1}(x,y,t)g(y)dy.
\end{aligned}
$$

Теорему доведено.

---

1. *Лопушанський А.О.* Інтерполяційні оцінки аналітичних наближень розв'язків збурених параболічних змішаних задач//Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2000.– Вип. 56.– С. 123-128.

2. *Лопушанський А.О.* Сильно неперервні півгрупи збурень абстрактних параболічних рівнянь// Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 1999.– Т.42, №3.– С.75-82.

3. *Лопушанський А.О.* Розв'язність неоднорідної задачі Коші для абстрактних параболічних рівнянь в комплексних інтерполяційних шкалах// Науковий вісник Чернівецького ун-ту.– Вип. 191-192. Математика.– С.89-94.

4. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные уравнения.– М., 1980.

5. *Seeley R.* Interpolation in L_p with boundary condition// Studia Math.– Vol. 44.– 1972.– P.47-66.

6. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы.– М., 1992.

7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы.– М., 1967. Т.2.

8. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.– М., 1985.

9. *Лопушанський А.* Диференціювання аналітичних функцій від секторіальних операторів за некомутативними напрямками//Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 1997.– Т.40, N 4.– С.70-74.

10. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.– К., 1990.

THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH PSEUDODIFFERENTIAL TERM

Andriy Lopushansky

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU
Naukova Str., 3a, 79060 Lviv, Ukraine

The solvability of the boundary value problem for parabolic equation with pseudodifferential term is established. The exact estimates of its solution's approximation by means finite iterations of Green's function is founded.

Key words: parabolic equation, pseudodifferential operator, solution's approximation.

Стаття надійшла до редколегії 07.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006