ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.99–114 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.99–114*

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ ДІЄЮ

Сергій ЛАВРЕНЮК, Маріанна ОЛІСКЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Одержано певні умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_i(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+b_0(x,y,t,u) + \int_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi = f_0(x,y,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,y,t)$$

у необмеженій області за змінними x.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння.

Ультрапараболічні рівняння почали досліджувати ще в першій половині XX ст. Рівняння такого типу, які іноді називають параболічними з багатьма часами, виникли як математична модель броунівського руху фізичної системи з n ступенями вільності. До таких рівнянь належить, зокрема, рівняння Колмогорова [1], яке багаторазово узагальнювали і досліджували різні автори (див. бібліографію в [2]). Зазначимо, що найдетальніші результати для лінійних ультрапараболічних рівнянь одержали Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д. та їхні учні (див., наприклад, [2 – 5]). Окремі результати для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в необмежених областях отримано в [6 – 11].

У цій праці в необмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння з нелокальним доданком, яке, зокрема, містить невідому функцію зі степенем $p \in (1,2]$. Гіперболічна частина цього рівняння містить перші похідні за групою $m+1$ $(m \geq 1)$ незалежних змінних.

Нехай Ω_x – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega_x \subset C^1$; Ω_y – обмежена область в $\mathbb{R}^m$ з межею $\partial\Omega_y \subset C^1$; $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $0 < \tau \leq T$; $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$. В області Q_T розглянемо рівняння

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} + \\ + b_0(x,y,t,u) + \int_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi = f_0(x,y,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,y,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)\,, \quad (x,y) \in \Omega\,. \qquad (2)$$

Для спрощення викладення припускатимемо, що $\Omega_x^R = \{x \in \Omega_x : |x| < R\}$ регулярна в сенсі Кальдерона [12, с.45] для всіх $R > R_0 > 0$. Нехай $\Omega^R = \Omega_x^R \times \Omega_y$; $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$; $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$; $S_\tau^R = \partial\Omega^R \times (0,\tau)$.

Введемо простір

$$L^\sigma_{loc}(\overline{\Omega}) = \left\{u : u \in L^\sigma(\Omega^R)\,,\ \forall\, R > R_0\right\},\ \ \sigma = 2 \text{ або } \sigma = +\infty.$$

Припускатимемо, що для рівняння (1) виконуються такі умови:

(A) : $a_i \in C(\overline{Q}_T)$, $a_{i,y_i} \in L^\infty(Q_T)$, $i = 1,...,m$; $a_{ij}, a_{ij,y_k} \in L^\infty((0,T); L^\infty(\overline{\Omega}))$, $i,j = 1,...,n$, $k = 1,...,m$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq A_0|\xi|^2$, $A_0 > 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$; $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T^R} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x,y,t) \leq \alpha_0 R^{2\vartheta}$ $\forall R > R_0$, $\vartheta \in [0,1)$; функції $a_0(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $a_{0,y_i}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $a_{0,\eta}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$ вимірні в Q_T для всіх $\eta \in \mathbb{R}$; функція $a_0(x,y,t,\cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

$$\begin{aligned} |\,a_0(x,y,t,\eta_1) - a_0(x,y,t,\eta_2)| &\leq A|\eta_1 - \eta_2|\,, \\ |\,a_{0,y_i}(x,y,t,\eta)| &\leq \alpha_1\,|\eta|\,, \qquad i = 1,...,m\,, \\ |\,a_{0,\eta}(x,y,t,\eta)| &\leq \alpha_1\,, \end{aligned}$$

для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ і майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, де A, α_0, α_1 – додатні сталі;

(B) : $b_i, b_{i,y_i} \in L^\infty(Q_T)$, $\quad i = 1,...,n, j = 1,...,m$; функції $b_0(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $b_{0,y_i}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$, $b_{0,\eta}(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)$ вимірні в Q_T для всіх $\eta \in \mathbb{R}$; функція $b_0(x,y,t,\cdot)$ неперервна в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

$$\begin{aligned} &(\,b_0(x,y,t,\eta_1) - b_0(x,y,t,\eta_2))(\eta_1 - \eta_2) \geq 0\,, \\ &|\,b_0(x,y,t,\eta)| \leq B_0|\eta|^{p-1}\,, \\ &|\,b_{0,y_i}(x,y,t,\eta)| \leq B_0|\eta|^{p-1}\,, \quad i = 1,...,m\,, \\ &|\,b_{0,\eta}(x,y,t,\eta)| \leq B_0 \end{aligned}$$

майже для всіх $(x, y, t) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}$, де B_0 – додатна стала, $1 < p \leq 2$.

Позначимо через S_T^1 множину тих точок поверхні $\Omega_x \times \partial\Omega_y \times (0, T)$, для яких виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) < 0\,,$$

де ν – зовнішня нормаль до S_T, а через S_T^2 – множину точок поверхні $\Omega_x \times \partial\Omega_y \times (0, T)$, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) \cos(\nu, y_i) \geq 0\,.$$

Говоритимемо, що для рівняння (1) виконується умова **(S)**, якщо $S_T^{(1)} = \Omega_x \times \Gamma_1 \times (0, T)$, $S_T^{(2)} = \Omega_x \times \Gamma_2 \times (0, T)$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega_y$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Крім початкової умови (2), задамо для рівняння (1) крайові умови вигляду

$$u|_{S_T^{(1)}} = 0\,, \quad u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)} = 0\,. \tag{3}$$

Нехай $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi(\eta) = 1$ при $\eta \leq 0$, $\Phi(\eta) = 0$ при $\eta \geq 1$, і $0 \leq \Phi(\eta) \leq 1$ при $\eta \in \mathbb{R}$.

Нехай

$$h_R(x) = \Phi\left(\frac{|x| - R}{\varkappa}\right), \quad \text{де } \varkappa > 0\,,$$

$$\omega_R(x) = [h_R(x)]^{\gamma}\,, \quad \gamma > 2\,.$$

Тоді $\omega_R(x) = 1 \quad$ при $|x| \leq R$, $\omega_R(x) = 0 \quad$ при $|x| \geq R + \varkappa$, $0 \leq \omega_R(x) \leq 1 \quad$ при $x \in \mathbb{R}^m$,

$$|\omega_{R,x_i}(x)| \leq \frac{d}{\varkappa}\,[h_R(x)]^{\gamma-1}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad i = 1, ..., m, \quad d = \text{const} > 0\,.$$

Введемо простори

$$H_{loc}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \left\{u\,:\, u,\, u_{x_i} \in L_{loc}^2(\Omega),\, i = 1, ..., n\,,\; u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0\right\}\,;$$

$$H_{loc}^{1,1}(\overline{\Omega}) = \Big\{u\,:\, u,\, u_{x_i},\, u_{y_j} \in L_{loc}^2(\overline{\Omega}),\, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\,,$$
$$u|_{\Omega_x \times \Gamma_1} = 0\,,\; u|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y} = 0\Big\}\,.$$

Вважатимемо, що права частина (1) і початкова функція в (2) задовольняє умову **(F)**, якщо

$f_i, f_{i,y_j} \in L^2\left((0, T); L_{loc}^2(\overline{\Omega})\right)$, $f_i|_{S_T^{(1)}} = 0$, $i = 0, 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$; $u_0, u_{0,y_i} \in L_{loc}^2(\overline{\Omega})$, $i = 1, ..., m$; $u_0|_{\Omega_x \times \Gamma_1} = 0$.

Означення 1. *Функцію u з простору $C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T);H^{1,0}_{loc}(\overline{\Omega}))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1) – (3), якщо вона є границею у цьому просторі послідовності функцій $\{u^k\}$ таких, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $u^k\in C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T);H^{1,1}_{loc}(\overline{\Omega}))$ і задовольняє рівність*

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k v\,dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\left[-u^k v_t+\sum_{i=1}^m a_i(x,y,t)u^k_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)u^k_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u^k_{x_i}v+\right.$$
$$\left.+b_0(x,y,t,u^k)v+\int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u^k)\,d\xi\, v\right]dxdydt=$$
$$=\int\limits_{\Omega_0} u^k_0 v\,dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\left[f^k_0 v+\sum_{i=1}^n f^k_i v_{x_i}\right]dxdydt \tag{4}$$

для всіх $\tau\in(0,T]$ і всіх $v\in C^([0,T];C^2_0(\Omega))$ таких, що $\operatorname{supp} v\subset\Omega^k$ для всіх $t\in[0,T]$ і для кожного $k\in\mathbb{N}$, де $u^k_0\to u_0$ у просторі $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $f^k_i\to f_i$, $i=0,1,...,n$ у просторі $L^2\left((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, причому u^k_0, f^k_i задовольняють умову **(F)**.

Розглянемо допоміжну задачу. Нехай $R>R_0+1$ – довільне фіксоване число. В області Q^R_T розглянемо рівняння

$$A(u)=f^R_0(x,y,t)-\sum_{i=1}^n f^R_{i,x_i}(x,y,t) \tag{5}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0)=u^R_0(x,y)\,,\quad (x,y)\in\Omega^R \tag{6}$$

і крайовими умовами

$$u|_{S^{(1)}_T\cap S^R_T}=0\,,\quad u|_{\partial\Omega^R_x\times\Omega_y\times(0,T)}=0\,, \tag{7}$$

де

$$f^R_0(x,y,t)=\begin{cases} f_0(x,y,t), & (x,y,t)\in Q^R_T,\\ 0, & (x,y,t)\in Q_T\setminus Q^R_T,\end{cases}$$

$f^R_i(x,y,t)=f_i(x,y,t)\chi_R(x)$, $i=1,...,n$, $u^R_0(x,y)=u_0(x,y)\chi_R(x)$, $\chi_R\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\chi_R(x)=1$ при $|x|\le R-1$, $\chi_R(x)=0$ при $|x|\ge R$, $0\le\chi_R(x)\le 1$ при $x\in\mathbb{R}$.

Нехай

$$H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R)=\{u\,:u,u_{y_j},u_{x_i}\in L^2(\Omega^R),\ i=1,...,n,\ j=1,...,m\,,$$
$$u|_{\Omega^R_x\times\Gamma_1}=0\,,\ u|_{\partial\Omega^R_x\times\Omega_y}=0\}\,,$$

$$H^{1,0,1}_0(Q^R_T)=\{u\,:\,u,u_t,u_{x_i}\in L^2(\Omega^R)\,,\ i=1,...,n\,,\ u|_{\partial\Omega^R_x\times\Omega_y\times(0,T)}=0\}\,.$$

Означення 2. *Функцію u з простору $C([0,T];L^2(\Omega^R))\cap L^2((0,T);H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (5) – (7), якщо вона задовольняє інтегральну рівність*

$$\int\limits_{\Omega^R_\tau} uv\,dxdy+\int\limits_{Q^R_\tau}\Bigg[-uv_t+\sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)u_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}v+$$
$$+b_0(x,y,t,u)v+\int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u)vd\xi-f^R_0(x,y,t)v-\sum_{i=1}^n f^R_i(x,y,t)v_{x_i}\Bigg]\,dxdydt=$$
$$=\int\limits_{\Omega^R_0} u^R_0 v\,dxdy \tag{8}$$

для довільного $\tau\in(0,T]$ і довільної функції $v\in H^{1,0,1}_0(Q^R_T)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(S)**, **(F)**. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (5) – (7).*

Доведення цієї теореми можна провести аналогічно до доведення теореми 1 [11], тому його наводити не будемо.

Зауваження 1. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (5) – (7). Тоді (в сенсі розподілів) з (8) випливає рівність

$$u_t=-\sum_{i=1}^m a_iu_{y_i}-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^n b_iu_{x_i}-b_0(x,y,t,u)-\int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi+f_0-\sum_{i=1}^n f_{i,x_i}\,.$$

Тому $u_t\in L^2((0,T);(H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))^*)$ і на підставі теореми 1.17 [12, с.177] правильна формула інтегрування частинами

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}<u_t,u>dt=\frac12\int\limits_{\Omega_{t_2}}|u|^2\,dxdy-\frac12\int\limits_{\Omega_{t_1}}|u|^2\,dxdy\,,\quad \forall\, t_1,t_2\in[0,T],\ t_1<t_2\,,$$

де $<\cdot,\cdot>$ позначає скалярний добуток між просторами $L^2((0,T);(H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))^*)$ та $L^2((0,T);H^{1,1}_{\Gamma_1}(\Omega^R))$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(S)** *і, крім того,*
$f_i\in L^2((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $i=0,1...,n$, $u_0\in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$,

$$\int\limits_{\Omega^R} u_0^2(x,y)dx\,dy+\int\limits_{Q^R_T}\sum_{i=0}^n f_i^2(x,,t)dx\,dy\,dt\le a\exp(bR^{1-\vartheta})\quad\forall R>R_0, \tag{9}$$

де a, b – деякі додатні сталі. Тоді існує таке $T_0\le T$, що задача (1) – (3) має узагальнений розв'язок в області Q_{T_0}.

Доведення. Нехай $\{f_i^k\}, \{u_0^k\}$, $i = 0, 1, ..., n$ такі послідовності функцій, що кожний елемент цих послідовностей задовольняє умову **(F)** і

$$||f_i^k - f_i||_{L^2((0,T);L^2(\Omega^R))} \to 0\,, \quad i = 0, 1, ..., n \;\; , ||u_0^k - u_0||_{L^2(\Omega^R)} \to 0$$

для кожного $R > R_0$ при $k \to \infty$. На підставі теореми 1 для довільного $R > R_0 + 1$ існує узагальнений розв'язок задачі в області Q_T^R для рівняння

$$A(u) = f_0^{k,R} - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}^{k,R} \tag{10}$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0^{k,R}(x, y)\,, \quad (x, y) \in \Omega^R \tag{11}$$

і крайовими умовами (7).

Нехай $R = R(k) = 2^k > R_0 + 1$. Продовжимо узагальнений розв'язок задачі (10), (11), (7) нулем на область $Q_T \setminus Q_T^{R(k)}$ і позначимо його через u^k. Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^k\}$, кожна з яких є узагальненим розв'язком задачі в області $Q_T^{R(k)}$ для рівняння

$$A(u) = f_0^{k,R(k)} - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}^{k,R(k)} \tag{12}$$

з початковою умовою

$$u(x, y, 0) = u_0^{k,R(k)}(x, y)\,, \quad (x, y) \in \Omega^{R(k)} \tag{13}$$

і крайовими умовами (7).

Нехай $2^l > R_0 + 1$. Підставимо функції u^k і u^l в інтегральну рівність (4), віднімемо їх і приймемо, що $v = u^{k,l}\,\omega_R$, де $u^{k,l} = u^k - u^l$, а R деяке фіксоване число таке, що $R > R_0 + 1$ і $R < \min\{R(k); R(l)\}$. Враховуючи зауваження 1, одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,l}|^2 \omega_R \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y, t) u_{y_i}^{k,l} u^{k,l}\, \omega_R + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t) u_{x_i}^{k,l}\, (u^{k,l}\omega_R)_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) u_{x_i}^{k,l} u^{k,l}\, \omega_R + (b_0(x, y, t, u^k) - b_0(x, y, t, u^l)) u^{k,l}\, \omega_R +$$

$$+ \int\limits_0^t (a_0(x, y, \xi, u^k) - a_0(x, y, \xi, u^l)) d\xi \; u^{k,l}\, \omega_R\Big] \, dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|\, \omega_R \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_0^{k,R(k)} - f_0^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, \omega_R +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(f_i^{k,R(k)}-f_i^{l,R(l)})(u^{k,l}\omega_R)_{x_i}\Big]dxdydt,$$

правильну для всіх $\tau\in[0,T]$.

На підставі умови **(A)**

$$J_1\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}a_i(x,y,t)\,u_{y_i}^{k,l}u^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt=\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)\,|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\cos(\nu,y_i)\,dS-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{m}a_{i,y_i}(x,y,t)|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq-\frac{A_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\,,$$

де

$$A_1=m\left(\max_{i=1,\dots,m}\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|a_{i,y_i}(x,y,t)|\right)\;;$$

$$J_2\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\,u_{x_i}^{k,l}\,u_{x_j}^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq A_0\int\limits_{Q_\tau}|\nabla_x u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\,;$$

$$J_3\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\,u_{x_i}^{k,l}\,u^{k,l}\,(\omega_R(x))_{x_j}\,dxdydt\geq$$

$$\geq-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta_1|\nabla_x u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)+\frac{\alpha_0 n\gamma^2 d^2 R^{2\vartheta}}{\delta_1\varkappa^2}(h_R)^{\gamma-2}\right]dxdydt\,,\;\;\delta_1>0;$$

$$J_4\equiv\int\limits_{Q_\tau}\int\limits_0^t(a_0(x,y,\xi,u^k)-a_0(x,y,\xi,u^l))\,d\xi\;\;u^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq$$

$$\geq-A\int\limits_{Q_\tau}\int\limits_0^t|u^{k,l}(x,y,\xi)|\,d\xi\;|u^{k,l}|\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq$$

$$\geq-A\,T\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\,.$$

Згідно з умовою **(B)**

$$J_5\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\,u_{x_i}^{k,l}\,u^{k,l}\,\omega_R(x)\,dxdydt\geq-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta_1\,|\nabla u^{k,l}|^2+\frac{B_1}{\delta_1}\,|u^{k,l}|^2\right]\,\omega_R(x)\,dxdydt,$$

де

$$B_1=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}b_i^2(x,y,t)\,;$$

$$J_6 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (b_0(x,y,t,u^k) - b_0(x,y,t,u^l))\, u^{k,l}\, \omega_R(x)\, dxdydt \geq 0\,.$$

Зазначимо, що

$$|u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}| \leq |u_0^{k,R(k)} - u_0| + |u_0 - u_0^{l,R(l)}|\,.$$

Тому

$$|u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2 \leq 2(|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0 - u_0^{l,R(l)}|^2)$$

і

$$J_7 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2\, \omega_R(x)\, dxdydt \leq$$
$$\leq \int\limits_{\Omega_0} \Big[|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0^{l,R(l)} - u_0|^2\Big]\, \omega_R(x)\, dxdy\,.$$

Далі

$$J_8 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (f_0^{k,R(k)} - f_0^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, \omega_R(x)\, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_0^{k,R(k)} - f_0)\, u^{k,l}\, \omega_R(x) + (f_0 - f_0^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, \omega_R(x)\Big]\, dxdydt \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Big[(f_0^{k,R(k)} - f_0)^2 + (f_0^{l,R(l)} - f_0)^2\Big]\, \omega_R(x)\, dxdydt + \int\limits_{Q_\tau} |u^{k,l}|^2\, \omega_R(x)\, dxdydt\,;$$

$$J_9 \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (f_i^{k,R(k)} - f_i^{l,R(l)})\, u_{x_i}^{k,l}\, \omega_R(x)\, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \Big[(f_i^{k,R(k)} - f_i)\, u_{x_i}^{k,l}\, \omega_R(x) + (f_i - f_i^{l,R(l)})\, u_{x_i}^{k,l}\, \omega_R(x)\Big]\, dxdydt \leq$$
$$\leq \delta_1 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla_x u^{k,l}|^2\, \omega_R(x)\, dxdydt +$$
$$+ \frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \Big[(f_i^{k,R(k)} - f_i)^2\, \omega_R(x) + (f_i^{l,R(l)} - f_i)^2\, \omega_R(x)\Big]\, dxdydt\,;$$

$$J_{10} \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (f_i^{k,R(k)} - f_i^{l,R(l)})\, u^{k,l}\, (\omega_R(x))_{x_i}\, dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{R^{-2\vartheta}}{\delta_2}\sum_{i=1}^{n}(f_i^{k,R(k)}-f_i^{l,R(l)})^2\,\omega_R(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta_2 n d^2\gamma^2 R^{2\vartheta}}{\varkappa^2}|u^{k,l}|^2\,(h_R(x))^{\gamma-2}\right]dxdydt\,.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_{10}$, з (13) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdy+(2A_0-4\delta_1)\int\limits_{Q_\tau}|\nabla_x u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt\leq$$
$$\leq\left(A_1+2AT+2+\frac{B_1}{\delta_1}\right)\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdydt+F(\tau)\,, \tag{14}$$

де

$$F(\tau)=\left(\frac{\alpha_0}{\delta_1}+\delta_2\right)\frac{nd^2\gamma^2R^{2\vartheta}}{\varkappa^2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,(h_R(x))^{\gamma-2}\,dxdydt+$$
$$+2\int\limits_{\Omega_0}(|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0^{l,R(l)}-u_0|^2)\,\omega_R(x)\,dxdy+$$
$$+2\int\limits_{Q_\tau}\Big[(f_0^{k,R(k)}-f_0)^2+(f_0^{l,R(l)}-f_0)^2+$$
$$+\left(\frac{2}{\delta_2}+\frac{1}{\delta_1}\right)\sum_{i=1}^{n}\Big((f_i^{k,R(k)}-f_i)^2+(f_i^{l,R(l)}-f_i)^2\Big)\Big]\,\omega_R(x)\,dxdydt\,,$$

$\tau\in(0,T]$.

Виберемо $\delta_1 = A_0/4$, $\delta_2 = \alpha_0/\delta_1$. Використовуючи лему Гронуолла - Белмана, легко одержати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,l}|^2\,\omega_R(x)\,dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\left(|\nabla_x u^{k,l}|^2+|u^{k,l}|^2\right)\,\omega_R(x)\,dxdydt\leq$$
$$\leq M_1\left[\frac{(R+\varkappa)^{2\vartheta}}{\varkappa^2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{k,l}|^2\,(h_R(x))^{\gamma-2}\,dxdydt+F_R(\tau)\right],\quad \tau\in[0,T]\,, \tag{15}$$

де стала M_1 визначається коефіцієнтами рівняння (1) і числом T, причому $M_1\to 0$ при $T\to 0$, а

$$F_R(\tau)=2\int\limits_{\Omega_0}(|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0^{l,R(l)}-u_0|^2)\,\omega_R(x)\,dxdy+$$
$$+2\int\limits_{Q_\tau}\Big[(f_0^{k,R(k)}-f_0)^2+(f_0^{l,R(l)}-f_0)^2+$$

$$+\Big(\frac{2}{\delta_2}+\frac{1}{\delta_1}\Big)\sum_{i=1}^{n}\Big((f_i^{k,R(k)}-f_i)^2+(f_i^{l,R(l)}-f_i)^2\Big)\Big]\,\omega_R(x)\,dxdydt.$$

На підставі умови (9) існує таке $s_0\in\mathbb{N}$, що для всіх $s>s_0$ правильні нерівності

$$\int\limits_{\Omega^R}|u_0^s(x,y)|^2dxdy+\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=0}^{n}|f_i^s(x,y,t)|^2dxdydt\le 2a\exp(bR^{1-\vartheta}),\tag{16}$$

$$\int\limits_{\Omega^R}|u_0^s(x,y-u_0(x,y))|^2dxdy+\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=0}^{n}|f_i^s(x,y,t)-f_i(x,y,t)|^2dxdydt\le\exp(-q+bR^{1-\vartheta}),\tag{17}$$

де q – натуральне число.

З (15) зокрема, одержимо, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt\le\frac{M_1(R(k)+\varkappa)^{2\vartheta}}{\varkappa^2}\int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt+M_1\,F_{R(k+1)}(\tau)\tag{18}$$

при $\varkappa=2^k$.

Поділимо відрізок $[R(k),R(k)+\varkappa]$ на q частин. Виберемо $q=\lambda[2^{k(1-\vartheta)}]$, де λ таке натуральне число, що $\lambda^2M_12^{\vartheta}\le e^{-1}$, $[\,\cdot\,]$ – ціла частина числа.

Тоді аналогічно як в [13] з (18) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt\le e^{-q}\int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt+\frac{M_1\,e}{e-1}\,F_{R(k+1)}\,.\tag{19}$$

Оскільки

$$\left|f_i^{k+3,R(k+3)}-f_i^{k+2,R(k+2)}\right|^2\le 2\left(\left|f_i^{k+3,R(k+3)}-f_i\right|^2+\left|f_i^{k+2,R(k+2)}-f_i\right|^2\right),$$

$i=0,1,...,n$,

$$\left|u_0^{k+3,R(k+3)}-u_0^{k+2,R(k+2)}\right|^2\le 2\left(\left|u_0^{k+3,R(k+3)}-u_0\right|^2+\left|u_0^{k+2,R(k+2)}-u_0\right|^2\right),$$

то на підставі (17)

$$F_{R(k+1)}(\tau)\le 2\exp\{-q+b\,(R(k+1))^{1-\vartheta}\}\,.$$

Отже, з (19) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}}\left|u^{k+3,k+2}\right|^2\,dxdydt\le$$

$$\leq e^{-q} \int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 \, dxdydt + M_2 \exp\{-q + b\,(R(k+1))^{1-\vartheta}\}\,. \tag{20}$$

Використовуючи (4) при $v = u^k\, e^{-\rho t}$, $\rho > 0$, отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 \, e^{-\rho\tau} \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[\frac{1}{2}\,\rho\, \left|u^k\right|^2 + \sum_{i=1}^m a_i(x,y,t) u^k_{y_i} u^k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t) u^k_{x_i}\, u^k_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t) u^k_{x_i} u^k + b_0(x,y,t,u^k) u^k + \int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u^k) d\xi u^k \right] e^{-\rho t} \, dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[f_0^{k,R(k)} \, u^k + \sum_{i=1}^n f_i^{k,R(k)} u^k_{x_i} \right] e^{-\rho t} \, dxdydt\,, \tag{21}$$

де $\tau \in (0,T]$.

На підставі умов **(A)**, **(B)**, **(S)** з (21) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left[\left|u^k\right|^2 + \left|\nabla_x u^k\right|^2 \right] \, dxdydt \leq$$

$$\leq M_3 \left[\int\limits_{\Omega_0^{R(k)}} \left|u_0^{k,R(k)}\right|^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \sum_{i=0}^n \left|f_i^{k,R(k)}\right|^2 \, dxdydt \right]. \tag{22}$$

Враховуючи (16), з (22) отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k)}} \left|u^k\right|^2 \, dxdydt \leq \, 2\, a\, M_3 \exp\{b\,(R(k))^{1-\vartheta}\}\,. \tag{23}$$

Оскільки

$$\left|u^{k+3,k+2}\right|^2 \leq 2 \, \left(\left|u^{k+3}\right|^2 + \left|u^{k+2}\right|^2 \right) \,,$$

то з (19), (23) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(k+1)}} \left|u^{k+3,k+2}\right|^2 \, dxdydt \leq 4a\, M_3 \, \exp\left\{-q + b\,(R(k+4))^{1-\vartheta}\right\} +$$

$$+ M_2 \, \exp\left\{-q + b\,(R(k+2))^{1-\vartheta}\right\} \leq M_4 \exp\left\{-q + b\,(R(k+4))^{1-\vartheta}\right\} \,. \tag{24}$$

Тому існує таке $T_0 \leq T$, що для всіх $\tau \in [0, T_0]$ число λ можна вибрати так, щоб $\lambda > b 2^{4(1-\vartheta)}$. Тоді праву частину (24) можна оцінити так:

$$\exp\left\{-q + b\,(R(k+4))^{1-\vartheta}\right\} \leq \exp\{-[2^{k(1-\vartheta)}]\,\alpha_0\}\,,$$

де $\alpha_0 = \lambda - b2^{4(1-\vartheta)}$.

Нехай $R_1 > R_0 + 1$ – довільне фіксоване число, $R(k) > R_1$.

З (24) випливає оцінка

$$||u^{k+3,k+2}||_{C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1}))} + ||u^{k+3,k+2}||_{L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))} \le M_5 \exp\{-\alpha_0\, 2^{(k-1)(1-\vartheta)}\},$$

$$V(\Omega^{R_1}) = \left\{u \,:\, u, u_{x_i} \in L^2(\Omega^{R_1}),\, u|_{(\partial\Omega_x \cap \partial\Omega_x^{R_1})\times\Omega_y} = 0\right\}.$$

Тоді

$$||u^{k+l+2} - u^{k+2}||_{C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1}))} + ||u^{k+l+2} - u^{k+2}||_{L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))} \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{l-1} ||u^{k+i+3} - u^{k+i+2}||_{C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1}))} + ||u^{k+i+3} - u^{k+i+2}||_{L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))} \le$$
$$\le M_5 \sum_{i=0}^{\infty} \exp\{-\alpha_0\, 2^{2(k+i)+1}\} \le M_6 \exp\{-\alpha_0\, 2^{(k-1)(1-\vartheta)}\}, \tag{25}$$

де M_6 не залежить від k, l. Враховуючи (15) і (25), легко показати, що послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна у просторі $C([0,T_0];L^2(\Omega^{R_1})) \cap L^2((0,T_0);V(\Omega^{R_1}))$. На підставі довільності R_1, одержуємо, що $u^k \to u$ у просторі $C([0,T_0];L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T_0);H^{1,0}_{loc}(\overline{\Omega}))$, тобто u – узагальнений розв'язок задачі (1) – (3). Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(S)**, $f_i \in L^2\left((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, $u_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $i = 0,1,...,n$. *Тоді задача (1) – (3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій таких, що*

$$\int_{Q_T^R} |u|^2\, dxdydt \le a \exp\left\{bR^{1-\vartheta}\right\}, \tag{26}$$

$\forall R > R_0 + 1$, *де* a, b *– додатні сталі.*

Доведення. Нехай існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (1)– (3). Задамо довільне фіксоване число $R_1 > R_0 + 1$ і як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Нехай $R(l) = 2^l > R_1$, $l \in \mathbb{N}$.

Згідно з означенням узагальненого розв'язку існують послідовності $\{u^{i,k}\}$ такі, що $u^{i,k} \to u^i$ у просторі $C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T);H^{1,0}_{loc}(\overline{\Omega}))$, причому $u^{i,k}$ задовольняє (4) з правими частинами $f_j^{i,k}$ і початковими функціями $u_0^{i,k}$, де $f_j^{i,k}$, $u_0^{i,k}$ задовольняють умову **(F)**, $f_j^{i,k} \to f_j$ у просторі $L^2((0,t_0);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k \to \infty$, $i = 1,2$, $j = 0,1,...,n$. Цілком аналогічно як (15) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\, dxdydt \le$$

$$\le \frac{M_1 (R+\varkappa)^{2\vartheta}}{\varkappa^2} \int\limits_{Q_\tau} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 [h_R(x)]^{\gamma-2}\, dxdydt + M_2\, F(R,\tau)\,, \qquad (27)$$

де функція $\omega_R(x)$ і сталі M_1, M_2, $\varkappa$ визначені при доведенні теореми 2, $R = R(l)$, а

$$F(R,\tau) = \int\limits_{\Omega_0} \left|u_0^{2,k} - u_0^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\, dxdydt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=0}^{n} \left|f_i^{2,k} - f_i^{1,k}\right|^2 \omega_R(x)\, dxdydt\,.$$

Виберемо $q = \lambda\, [2^{l(1-\vartheta)}]$, $\varkappa = 2^l$, де $\lambda^2\, M_1 2^\vartheta < e^{-1}$, λ – деяке натуральне число.

Оскільки

$$F(R,\tau) \le 2 \int\limits_{\Omega_0^{R(l+1)}} \left(\left|u_0^{2,k} - u_0\right|^2 + \left|u_0^{1,k} - u_0\right|^2\right) dxdy +$$

$$+\, 2 \int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \sum_{i=0}^{n} \left(\left|f_i^{2,k} - f_i\right|^2 + \left|f_i^{1,k} - f_i\right|^2\right) dxdydt\,,$$

то враховуючи збіжності послідовностей $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $i = 1,2$, $j = 0,1,...,n$, можемо зазначити таке $k_0(l)$, що

$$F(R,\tau) < e^{-q}$$

для всіх $k > k_0(l)$.

Тоді з (27) аналогічно як при доведенні теореми 2 одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le e^{-q} \int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 dxdydt + e^{-q} \qquad (28)$$

для $l \ge l_0(M_2)$.

Оскільки $u^{i,k} \to u^i$ у $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, то існує таке $k_1(l,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $k_1 \ge k_0$, що

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l+1)}} \left|u^{i,k} - u^i\right|^2 dxdydt \le \frac{\varepsilon}{16}\,, \quad i = 1,2 \qquad (29)$$

для всіх $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Враховуючи те, що

$$\left|u^{2,k} - u^{1,k}\right|^2 \le 3\left(\left|u^{2,k} - u^2\right|^2 + \left|u^{1,k} - u^1\right|^2 + 2\left|u^1\right|^2 + 2\left|u^2\right|^2\right)$$

і умову (26), з (28) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau^{R(l)}} \left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le e^{-q}\left(\frac{3\,\varepsilon}{8}+4a\,\exp\left\{b\,(R(l+1))^{(1-\vartheta)}\right\}+1\right) \le \tag{30}$$

$$\le (2+4a)\,\exp\left\{-q+b\,(R(l+1))^{(1-\vartheta)}\right\}$$

при $k > k_1(l,\varepsilon)$. Аналогічно як при доведенні теореми 2 можемо стверджувати про існування такого $T_0 \le T$, що $-q+b\,[R(l+1)]^{(1-\vartheta)} < -[2^{l(1-\vartheta)}]\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$ для всіх $\tau \in [0,T_0]$.

Тоді з (30) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R(l)}} \left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2 dxdydt \le (2+4a)\,\exp\left\{-\alpha_0\,[2^{l(1-\vartheta)}]\right\}.$$

Отже, існує таке $l_1 \in \mathbb{N}$, $l_1 \ge l_0$, що

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R_1}} \left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2 dxdydt < \frac{\varepsilon}{16} \tag{31}$$

для всіх $l > l_1$ і $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Оскільки

$$\left|u^2-u^1\right|^2 \le 3\left(\left|u^2-u^{2,k}\right|^2+\left|u^1-u^{1,k}\right|^2+\left|u^{2,k}-u^{1,k}\right|^2\right),$$

то на підставі (29), (31)

$$\int\limits_{Q_{T_0}^{R_1}} \left|u^2-u^1\right|^2 dxdydt < \varepsilon\,,$$

тобто, враховуючи довільність ε, $u^2(x,y,t)=u^1(x,y,t)$ майже всюди в $Q_{T_0}^{R_1}$. Оскільки R_1 – довільне число, то $u^2(x,y,t)=u^1(x,y,t)$ майже всюди в Q_{T_0}. Якщо $T_0 < T$, то за скінченну кількість кроків доводимо єдиність у всій області Q_T. Теорему доведено.

1. *Kolmogorov A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)// Ann. Math.– 1934.– Vol. 35.– P. 116-117.

2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.– Birkhäuser Verlag.– 2004.

3. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова// Укр. матем. вісник.– 2004.– № 1.– С.61-68.

4. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України.– 1996.– № 10.– С. 11-16.

5. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений //Дифференциальные уравнения.– 1975.– **11**, № 7.– С.1316-1331.

6. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance// Nonlinear Analysis.– 2001.– Vol. 47.– P.491-502.

7. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Proff. O.A. Ladyzhenskaya.– New York, NY: Kluwer Academic Publishers. Int. Math. Ser., N.Y. 2.– 2002.– P.243-265.

8. *Барабаш Г.М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 2002.– № 4.– Т.45.– С.27-34.

9. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equat.– 1998.– **23**, № 5,6.– P.847-868.

10. *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в необмеженій області// Доп. НАН України.– 2005.– N 5.– С.11-16.

11. *Гузіль Наталія.* Задача без початкових умов для системи ультрапараболічних рівнянь// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат.– 2004.– Вип.63.– С.59-76.

12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.

13. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений// Успехи матем. наук.– 1978.– Т.33.– Вып. 5.– С.7-72.

MIXED PROBLEM FOR AN ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL SOURCE

Serhiy Lavrenyuk, Marianna Oliskevych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In the article there is obtained some conditions of the existence and uniqueness of a solution for an ultraparabolic equation

$$u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_i(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x,y,t,u) + \int\limits_0^t a_0(x,y,\xi,u)d\xi = f_0(x,y,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,y,t)$$

in an unbounded domain with respect to the spaces variables x.

Key words: ultraparabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.2006

Прийнята до друку 02.11.2006