ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.88–98 — Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.88–98

УДК 517.53

ОДНА ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ МЕРОМОРФНИХ У ПРОКОЛОТІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ

Іван КШАНОВСЬКИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Одержано оцінку знизу величини

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)}$$

для певного класу мероморфних у проколотій площині функцій.

Ключові слова: мероморфна функція, характеристика Неванлінни, дефект функції, коефіцієнти Фур'є.

Позначення та формулювання основних результатів. Нехай f – мероморфна в проколотій площині $A=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ функція, $n_0(t,f)$ – кількість полюсів функції f в $\{z: 1/t<|z|\leqslant t\}$. Позначимо

$$N_0(r,f)=\int\limits_1^r\frac{n_0(t,f)}{t}dt,\qquad m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$m_0(r,f)=m(r,f)+m(1/r,f)-2m(1,f),\quad r\geqslant 1.$$

Означення 1. ([1]) *Функція*

$$T_0(r,f)=m_0(r,f)+N_0(r,f),\quad r\geqslant 1$$

називається характеристикою Неванлінни функції f в A.

В [1] доведено, що характеристика $T_0(r,f)$ - невід'ємна, неперервна, неспадна, опукла стосовно $\log r$ на $[1,+\infty)$ функція.
Порядком мероморфної в A функції f будемо називати величину

$$\rho[f] = \limsup_{r\to\infty} \frac{T_0(r,f)}{\log r}.$$

Через $c_k(t,f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є $\log|f(te^{i\theta})|$ ([2]),

$$c_k(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(te^{i\theta})|d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad 0<t<\infty,$$

а також

$$m_q(r,f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln|f(re^{i\theta})|\right|^q d\theta\right\}^{1/q}, \quad q\geqslant 1.$$

Для мероморфної в A функції f приймемо

$$\varkappa_0(f) = \limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)}.$$

Якщо функція f аналітична в A, то $\varkappa_0(f) = 1-\delta_0(0,f)$, де

$$\delta_0(a,f) \stackrel{def}{=} 1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,\frac{1}{f-a})}{T_0(r,f)}$$

- дефект функції f в точці a ([3]). Точна оцінка знизу величини

$$\varkappa(f) = \limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{T(r,f)}$$

у випадку, коли f - мероморфна в $\mathbb{C}$ функція порядку $\rho<1$ одержана в [4], (див. також [5]). Проте задача про знаходження найкращої оцінки знизу величин $\varkappa_0(f)$ та $\varkappa(f)$ для мероморфних в A і $\mathbb{C}$ функцій скінченного порядку $\rho>1$ залишається відкритою. Найкраща з відомих на сьогодні оцінок величини $\varkappa(f)$ для мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій отримали в [6], ([7]) з допомогою точної оцінки знизу величини

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{m_2(r,f)}.$$

Мета нашої праці — отримати оцінку величини $\varkappa_0(f)$ для певного класу мероморфних в A функцій з допомогою такої теореми.

Теорема 1. *Нехай f – мероморфна в A функція порядку ρ, $0<\rho<\infty$, $f(z) = f(1/z), z\in A$. Тоді*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{m_2(r,f)+m_2(r,1/f)} \geqslant \frac{|\sin\pi\rho|}{\pi\rho}\left\{\frac{2}{1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}}\right\}^{1/2}, \tag{1}$$

причому ця нерівність точна, тобто для деякої мероморфної в A функції порядку ρ в (1) виконується рівність.

Наслідок 1. *Нехай f – мероморфна в A функція порядку ρ така, що $f(z) = f(1/z)$ для всіх $z \in A$. Тоді*

$$\varkappa_0(f) \geqslant 0,9\frac{|\sin \pi\rho|}{\rho+1}. \tag{2}$$

Допоміжні твердження та результати. Нехай f – мероморфна в проколотій площині $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ функція. Через $Z(f) = \{a_\nu\}$, $W(f) = \{b_\mu\}$ позначимо послідовності нулів і полюсів функції f відповідно і приймемо

$$z_\nu = \begin{cases} a_\nu\,, & \text{якщо} \quad |a_\nu| > 1, \\ \dfrac{1}{a_\nu}\,, & \text{якщо} \quad |a_\nu| \leqslant 1. \end{cases} \qquad w_\mu = \begin{cases} b_\mu\,, & \text{якщо} \quad |b_\mu| > 1, \\ \dfrac{1}{b_\mu}\,, & \text{якщо} \quad |b_\mu| \leqslant 1. \end{cases}$$

Лема А. ([8]) *Нехай f – аналітична в A функція без нулів. Тоді для будь-якого замкненого шляху γ в A такого, що проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k}f(z)$ виконується*

$$\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0.$$

Теорема А. ([2]) *Нехай f – відмінна від тотожного нуля, мероморфна в $\{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}, R_0 \leqslant \infty$, функція, $Z(f) = \{a_\nu\}$, $W(f) = \{b_\mu\}$. Нехай $\{\alpha_k\}$ визначаються з рівностей $k\alpha_k = \beta_{k-1}$, $k \neq 0$, де $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k + \sum\limits_{|a_\nu|=1} \dfrac{1}{z-a_\nu} - \sum\limits_{|b_\mu|=1} \dfrac{1}{z-b_\mu}$ - розвинення логарифмічної похідної функції f в деякому околі одиничного кола. Тоді*

$$\begin{gathered} c_0(1/r,f) + c_0(r,f) - 2c_0(1,f) = N_0(r,1/f) - N_0(r,f), \\ c_k(r,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \bar{\alpha}_{-k}r^{-k}) + \frac{1}{2k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k\right) - \\ - \sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right), \\ c_k(1/r,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \bar{\alpha}_{-k}r^{k}) + \frac{1}{2k}\sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1}\left((r\bar{a}_\nu)^k - \left(\frac{1}{ra_\nu}\right)^k\right) - \\ -\frac{1}{2k}\sum_{1/r\leqslant|b_\mu|\leqslant 1}\left((r\bar{b}_\mu)^k - \left(\frac{1}{rb_\mu}\right)^k\right), \end{gathered} \tag{3}$$

де $k \neq 0$, $1 < r < R_0$.

Родом послідовності $\{z_j\}$ називатимемо найменше невід'ємне ціле число p таке, що

$$\sum_j |z_j|^{-p-1} < +\infty.$$

Елементарний множник Веерштрасса визначається так: $E(z,0) = 1 - z$,

$$E(z,p) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Лема 1. *Нехай $g(z)$ – аналітична в A функція без нулів і*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T_0(r,f)}{r^\lambda} = 0$$

для деякого λ. Тоді

$$g(z) = z^m \exp(z^{-\eta} P(z)),$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+, P(z)$- поліном, $\deg P(z) = 2\eta$ *і* $\eta \leqslant \lambda$.

Доведення. Лема A гарантує існування такого $m \in \mathbb{Z}$, що в A визначена однозначна гілка $\log g(z)$, де $g(z) = z^{-m} f(z)$. Справді, нехай $z_0 = 1$, і вважаємо $\log g(z_0)$ визначеним. Приймемо

$$\log g(z) = \log g(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл обчислюється вздовж шляху, що з'єднує z_0 і z в A. Розглянемо розвинення $\log g(z)$ в ряд Лорана

$$\log g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k.$$

Нехай $z = re^{i\theta},\ r \geqslant 1$. Тоді

$$\log|g(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(c_k z^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (c_k z^k + \bar{c}_k \bar{z}^k) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (c_k r^k + \bar{c}_{-k} r^{-k}) e^{ik\theta}, \quad r \geqslant 1,$$

$$\frac{1}{2}(c_k r^k + \bar{c}_{-k} r^{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Оскільки

$$|\log|g(z)|| \leqslant |\log|f(z)|| + |m||\log|z||$$

і

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log|f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)|\right|d\theta\leqslant$$
$$\leqslant 2T_0(r,f)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(e^{i\theta})||d\theta,$$

то з (4) випливає, що

$$c_kr^k+\bar{c}_{-k}r^{-k}=O(r^\lambda),\quad r\to\infty,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Звідки $c_k=0,\ k>\lambda$. Проводячи аналогічні викладдення для $z=\frac{1}{r}e^{i\theta}$, отримаємо, що $c_k=0,\ k<-\lambda$. Отже, $c_k=0,\ |k|>\lambda$, тому,

$$\log g(z)=\sum_{|k|\leqslant\eta}c_kz^k=z^{-\eta}\sum_{|k|\leqslant\eta}c_kz^{k+\eta}=z^{-\eta}P(z),\quad \eta\leqslant\lambda,$$

що й завершує доведення леми.

Теорема 2. *Нехай f – мероморфна в A функція, $Z(f)=\{a_\nu\}$, $W(f)=\{b_\mu\}$, p_1 і p_2 - роди послідовностей $\{z_\nu\}$ і $\{w_\mu\}$ відповідно. Тоді*

$$f(z)=z^m\exp(z^{-\eta}P(z))\frac{\prod\limits_{|a_\nu|\leqslant1}E\left(\frac{a_\nu}{z},p_1\right)\prod\limits_{|a_\nu|>1}E\left(\frac{z}{a_\nu},p_1\right)}{\prod\limits_{|b_\mu|\leqslant1}E\left(\frac{b_\mu}{z},p_2\right)\prod\limits_{|b_\mu|>1}E\left(\frac{z}{b_\mu},p_2\right)},\tag{5}$$

де $m\in\mathbb{Z}$, $\eta\in\mathbb{Z}_+$, $P(z)$ - поліном, $\deg P(z)=2\eta$ і $\eta\leqslant\rho[f]$.

Доведення. Позначимо множники в чисельнику (5) через $\pi_1(\frac{1}{z}),\pi_2(z)$, а в знаменнику через $\pi_3(\frac{1}{z}),\pi_4(z)$. Оскільки $N_0(r,f)\leqslant T_0(r,f)$ і $N_0(r,1/f)\leqslant T_0(r,f)$, то порядки $N_0(r,f)$ і $N_0(r,1/f)$ не перевищують ρ. За теоремою Бореля [5, с.79] порядки $\pi_j(\zeta),j=1,2,3,4$ також не перевищують ρ. Розглянемо функцію

$$g(z)=\frac{f(z)\pi_3(\frac{1}{z}))\pi_4(z)}{\pi_1(\frac{1}{z})\pi_2(z)}.$$

Функція $g(z)$ задовольняє умови леми 1, застосування якої завершує доведення теореми.

Лема 2. *Якщо f – мероморфна функція порядку ρ в A, $Z(f)=\{a_\nu\}$, $W(f)=\{b_\mu\}$, то коефіцієнти Фур'є функції f при $k>\rho$ мають вигляд*

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}\bar{\alpha}_{-k}r^{-k}-$$
$$-\frac{1}{2k}\left\{\sum_{|a_\nu|>r}\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k-\sum_{|b_\mu|>r}\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k+\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k-\sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right\},$$

$$c_k\left(\frac{1}{r},f\right)=\frac{1}{2}\alpha_k r^{-k}-$$
$$-\frac{1}{2k}\left\{\sum_{|a_\nu|<1/r}(r\bar{a}_\nu)^k-\sum_{|b_\mu|<1/r}(r\bar{b}_\mu)^k+\sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1}\left(\frac{1}{ra_\nu}\right)^k-\sum_{1/r\leqslant|b_\mu|\leqslant 1}\left(\frac{1}{rb_\mu}\right)^k\right\}, \tag{6}$$

де $k\neq 0$, $1<r<\infty$.

Доведення. Для стислості проведемо доведення тільки для $c_k(r,f)$. З (3) одержимо

$$\begin{gathered} r^k\left|\alpha_k+\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\frac{1}{b_\mu}\right)^k\right|\leqslant \\ \leqslant 2|c_k(r,f)|+\left|\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right|+|\bar{\alpha}_{-k}|r^{-k}. \end{gathered} \tag{7}$$

Оскільки

$$\begin{gathered} \left|\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right|\leqslant\frac{1}{k}\left(n_0(r,f)+n_0(r,1/f)\right)\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{k}\left(\int_r^{er}\frac{n_0(t,f)}{t}dt+\int_r^{er}\frac{n_0(t,1/f)}{t}dt\right)\leqslant\frac{1}{k}\left(N_0(er,f)+N_0(er,1/f)\right) \end{gathered}$$

і

$$|c_k(r,f)|+|c_k(1/r,f)|\leqslant 2T_0(r,f)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(e^{i\theta})||d\theta,$$

то, поділивши (7) на r^k і переходячи до границі при $r\to\infty$, знаходимо

$$\alpha_k=\frac{1}{k}\left(\sum_{1<|b_\mu|<\infty}\left(\frac{1}{b_\mu}\right)^k-\sum_{1<|a_\nu|<\infty}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k\right).$$

Підставляючи α_k в (3), отримаємо (6). Лему доведено.

Лема 3. *Нехай порядок* ρ *мероморфної в* A *функції* f *не є цілим числом. Тоді порядок функції* $N_0(r,f)+N_0(r,1/f)$ *дорівнює* ρ.

Доведення. З теореми 2

$$\pi(z)\overset{def}{=}\frac{\prod\limits_{|a_\nu|\leqslant 1}E\left(\frac{a_\nu}{z},p_1\right)\prod\limits_{|a_\nu|>1}E\left(\frac{z}{a_\nu},p_1\right)}{\prod\limits_{|b_\mu|\leqslant 1}E\left(\frac{b_\mu}{z},p_2\right)\prod\limits_{|b_\mu|>1}E\left(\frac{z}{b_\mu},p_2\right)}=z^{-m}\exp(-z^{-\eta}P(z))f(z).$$

Оскільки $\rho[\exp(-z^{-\eta}P(z))] \leqslant \eta < \rho$, то $\rho[\pi(z)] = \max\{\rho[f(z)], \rho[\exp(-z^{-\eta}P(z))]\} = \rho$. З іншого боку, за теоремою Бореля і з рівності $T_0(r,\varphi(z)) = T_0(r,\varphi(1/z))$ отримуємо

$$\rho = \rho[\pi(z)] \leqslant \max\{\rho[n_0(r,f)], \rho[n_0(r,1/f)]\} = \rho[N_0(r,f) + N_0(r,1/f)] \leqslant \rho.$$

Звідси $\rho[N_0(r,f) + N_0(r,1/f)] = \rho$.

Доведення теореми 1. Позначимо $N_0(r) = N_0(r,f) + N_0(r,1/f)$, $[\rho] = q$, $X = \{x_j\} = \{|z_\nu|\} \bigcup \{|w_\mu|\}$, $\gamma_k = \alpha_k + \alpha_{-k}$, де α_k визначаються з теореми A. Достатньо розглянути випадок, коли ρ не ціле, оскільки при цілому ρ права частина (1) тривіальна. Зауважимо, що $\max(p_1, p_2) \leqslant q$, де p_1 і p_2 - роди послідовностей $\{z_\nu\}$ і $\{w_\mu\}$ відповідно. Розглянемо цілу функцію

$$F(z) = P(z) \prod_j E\left(\frac{z}{x_j}, q\right),$$

де $P(z) \equiv 1$, якщо $q = 0$, і

$$P(z) = \sum_{i=1}^{q} |\gamma_i| z^i,$$

якщо $q \geqslant 1$. Коефіцієнти Фур'є функції $\log|F|$ ([9, с.75], [6]),

$$c_0(r,F) = N(r, \frac{1}{F}) = N_0(r,f) + N_0(r, \frac{1}{f}), \quad r > 1,$$

$$c_k(r,F) = \frac{1}{2}|\gamma_k| r^k + \frac{1}{2k} \sum_{x_j \leqslant r} \left(\left(\frac{r}{x_j}\right)^k - \left(\frac{x_j}{r}\right)^k \right), \quad r > 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant q, \tag{8}$$

$$c_k(r,F) = -\frac{1}{2k} \sum_{x_j > r} \left(\frac{r}{x_j}\right)^k - \frac{1}{2k} \sum_{x_j \leqslant r} \left(\frac{x_j}{r}\right)^k, \quad r > 1, \quad k > q. \tag{9}$$

Позначимо $g(z) = f(z)f(1/z)$. Оскільки $c_k(r,g) = c_k(r,f) + \bar{c}_k(1/r,f)$, то з (3) і (6) знаходимо

$$\begin{gathered} c_k(r,g) = \frac{1}{2}\bar{\gamma}_k r^{-k} - \\ -\frac{1}{2k}\left\{ \sum_{|a_\nu|>r} \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \sum_{|b_\mu|>r} \left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k + \sum_{1<|a_\nu|\leqslant r} \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k - \sum_{1<|b_\mu|\leqslant r} \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k \right\} - \\ -\frac{1}{2k}\left\{ \sum_{|a_\nu|<1/r} (ra_\nu)^k - \sum_{|b_\mu|<1/r} (rb_\mu)^k + \sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1} \left(\frac{1}{r\bar{a}_\nu}\right)^k - \sum_{1/r\leqslant|b_\mu|\leqslant 1} \left(\frac{1}{r\bar{b}_\mu}\right)^k \right\}, \end{gathered}$$

$k \geqslant q+1$, а для $1 \leqslant k \leqslant q$,

$$c_k(r,g) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2}\bar{\gamma}_k r^{-k} +$$
$$+\frac{1}{2k}\left\{\sum_{1<|a_\nu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^k - \left(\frac{\bar{a}_\nu}{r}\right)^k\right) - \sum_{1<|b_\mu|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{b_\mu}\right)^k - \left(\frac{\bar{b}_\mu}{r}\right)^k\right) +\right.$$
$$\left.+\sum_{1/r\leqslant|a_\nu|\leqslant 1}\left((ra_\nu)^k - \left(\frac{1}{r\bar{a}_\nu}\right)^k\right) - \sum_{1/r\leqslant|b_\mu|\leqslant 1}\left((rb_\mu)^k - \left(\frac{1}{r\bar{b}_\mu}\right)^k\right)\right\}.$$

Звідси

$$|c_k(r,g)| \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{|\gamma_k|}{2r^k} \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{\gamma^*}{k}, \quad k \geqslant q+1,$$

де

$$\gamma^* = \frac{1}{2}\sum_{x_j\in X}\left(\frac{1}{x_j}\right)^{q+1}.$$

Крім того, оскільки $\left|a - \frac{1}{\bar{a}}\right| = |a| - \frac{1}{|a|}$, якщо $|a| \geqslant 1$, то

$$|c_k(r,g)| \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{|\gamma_k|}{2r^k} \leqslant |c_k(r,F)| + \frac{|\gamma_k|}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant q,$$

і, отже,

$$m_2(r,g) \leqslant m_2(r,F) + C, \quad r > 1.$$

Інтегруючи частинами в (8) і (9), знаходимо, що для $k \geqslant q+1$

$$|c_k(r,F)| = \frac{k}{2}\left\{\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_0(t)}{t}dt + \int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_0(t)}{t}dt\right\} - N_0(r), \tag{10}$$

а для $1 \leqslant k \leqslant q$ $(q \neq 0)$,

$$0 \leqslant c_k(r,F) = \frac{1}{2}|\gamma_k| r^k + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0(t)}{t}dt + N_0(r). \tag{11}$$

Оскільки ρ не ціле, то за лемою 3 порядок $N_0(r)$ дорівнює ρ. За лемою про піки Пойа для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує послідовність $\{t_n\}, t_n \to \infty$ така, що

$$N_0(t) \leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N_0(t_n), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_n,$$

$$N_0(t) \leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N_0(t_n), \quad t_n \leqslant t < \infty. \tag{12}$$

Використовуючи (12) в формулах (10) і (11), одержимо

$$|c_k(t_n,F)| \leqslant N_0(t_n)\left\{\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2}-1\right\},\quad k\geqslant q+1,$$

і

$$|c_k(t_n,F)| \leqslant N_0(t_n)\left\{\frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2}-1\right\}+\frac{1}{2}|\gamma_k|t_n^k,\quad 1\leqslant k\leqslant q.$$

Зауважимо, що з (12) випливає, зокрема, $t_n^q = o(N_0(t_n))$, $n\to\infty$. Враховуючи це зауваження і довільність ε, знаходимо

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(t_n,g)|}{N_0(t_n)} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(t_n,F)|}{N_0(t_n)} \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|},\quad k\in\mathbb{N}.$$

З огляду на рівність Парсеваля

$$\{m_2(r,F)\}^2 = N_0^2(r)+2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(r,F)|^2$$

отримуємо нерівність (див. [6])

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{m_2(r,g)}{N_0(r)} \leqslant \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\rho^4}{(\rho^2-k^2)^2}\right\}^{1/2} = \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}|\sin\pi\rho|}\left(1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

З іншого боку, оскільки $c_k(1/r,g)=\bar{c}_k(r,g)$, то $m_2(1/r,g)=m_2(r,g)$. Крім того, $m_2(r,g)=2m_2(r,f)$, звідки остаточно отримуємо

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{m_2(r,f)+m_2(r,1/f)}{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)} \leqslant \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}|\sin\pi\rho|}\left(1+\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

В [6] побудовано приклад цілої функції f_0 з додатними нулями порядку ρ, де ρ не ціле , для якої

$$N(t,1/f_0) = \frac{1}{\rho}t^\rho + o(t^\rho),\quad t\to\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{m_2(r,f_0)}{N(r,1/f_0)}\right\}^2 = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^4}{(\rho^2-k^2)^2}.$$

Розглянемо функцію $g_0(z)=f_0(z)f_0(\frac{1}{z})$. Оскільки

$$N_0(r,1/g_0) = 2N_0(r,1/f_0),\qquad r>1,$$

$$N_0(r,1/f_0) = N(r,1/f_0)+N(1/r,1/f_0)-2N(1,1/f_0),\qquad r>1,$$

$$N_0(r,1/g_0)-2m(1,f) \leqslant T_0(r,g_0) \leqslant 2T_0(r,f_0),\qquad r>1,$$

то порядок функції g_0 дорівнює ρ. З леми 2, враховуючи, що f_0 - ціла функція, отримуємо

$$c_k(1/r, f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^{-k} - \frac{r^{-k}}{2k} \sum_{1/r \leqslant |a_\nu| \leqslant 1} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k, \quad r > r_0.$$

Звідси

$$|c_k(1/r, f)| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k| r^{-k} + \frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(\frac{r_0}{r}\right)^k \leqslant \frac{\gamma^*}{k} + \frac{n}{2k}, \quad r > r_0,$$

де n - кількість нулів функції f_0 в крузі $\{z : |z| \leqslant 1\}$. Тому $m_2(1/r, f_0) \leqslant const$. Звідси, враховуючи, що $c_k(r, g_0) = c_k(r, f_0) + \bar{c}_k(1/r, f_0)$, отримаємо

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r, g_0) + m_2(1/r, g_0)}{N_0(r, 1/g_0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{2m_2(r, g_0)}{2N_0(r, 1/f_0)} =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r, g_0)}{N(r, 1/f_0) + N(1/r, 1/f_0) - 2N(1, 1/f_0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r, g_0)}{N(r, 1/f_0)} = \lim_{r\to\infty} \frac{m_2(r, f_0)}{N(r, 1/f_0)},$$

тобто оцінка (1) точна. Теорему 1 доведено.

Доведення наслідку. Враховуючи монотонність $m_q(r, f)$ за q і рівність Йенсена для кільця ([1]), маємо

$$m_2(r, f) + m_2(1/r, f) \geqslant m_1(r, f) + m_1(1/r, f) = 2T_0(r, f) - N_0(r, f) - N_0(r, \frac{1}{f}) + 2m_1(1, f).$$

Тому

$$\frac{\varkappa_0(f)}{2 - \varkappa_0(f)} = \limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)}{2T_0(r, f) - N_0(r, f) - N_0(r, 1/f)} \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r, f) + N_0(r, 1/f)}{m_2(r, f) + m_2(1/r, f) - 2m_1(r, f)}.$$

Враховуючи (1), приходимо до нерівності

$$\frac{\varkappa_0(f)}{2 - \varkappa_0(f)} \geqslant \frac{|\sin \pi\rho|}{\pi\rho} \left\{ \frac{2}{1 + \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}} \right\}^{1/2}. \qquad (13)$$

Використовуючи елементарні оцінки (див., наприклад, [7], с.64), отримаємо (2) з (13).

1. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I, Matematychni Studii 23 (2005), 19-30.

2. *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* Holomorphic functions of finite λ-type in punctured planes International Conferense „Analysis and related topics“, Lviv, November 17-20, 2005, Book of abstracts. - P.50.

3. *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II, Matematychni Studii 24 (2005), 57-68.

4. *Edrei A., Fuchs W.H.J,* The deficiens of meromorphic functions of order less than one, Duke Math.J.– 1960.– Vol.27.– P.233-249.

5. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций.– М., 1970.

6. *Miles J.B., Shea D.F,* An extremal problem in value distribution theory, Quart. J. Math, Oxford.– 1973.– Vol.24.– P.377-383.

7. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции.– Львов, 1988.

8. *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson-Jensen formula for annuli, Matematychni Studii 24 (2005), 147-158.

9. *Rubel L.A.* Entire and meromorphic functions.– New York: Springer, 1996.

AN EXTREMAL PROBLEM FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS IN A PUNCTURED PLANE.

Ivan Kshanovskyy

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We obtain an estimate of

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N_0(r,f)+N_0(r,1/f)}{T_0(r,f)}$$

for some class of meromorphic functions in a punctured plane.

Key words: meromorphic function, Nevanlinna characteristic, deficiency of the function, Fourier coefficients.

Стаття надійшла до редколегії 24.05.2006

Прийнята до друку 02.11.2006