*ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ* *VISNYK LVIV UNIV.*
*Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.75–87* *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.75–87*

УДК 519.9

# УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ БЛЕКА-ШОУЛСА

**Світлана КОВТУН**

*Інститут теоретичної фізики ім. Боголюбова НАН України,*
*вул. Метрологічна, 14б, 03680 Київ, Україна*

Запропоновано узагальнення моделі Блека-Шоулса шляхом додання в експоненту одностороннього $\frac{1}{2}$-стійкого процесу Леві. Для цієї моделі доведено існування мінімального геджу, знайдено явні формули для портфеля інвестора, що відповідає мінімальному геджу, для еволюції капіталу інвестора та ціни опціона. Внаслідок існування мінімального геджу така ціна буде справедливою.

*Ключові слова:* опціон, мінімальний гедж, справедлива ціна опціону, випадкові процеси з незалежними приростами.

**1.** На сьогодні модель Блека-Шоулса [1] є найуживанішою для знаходження справедливої ціни опціону та мінімального геджу. Проте накопичені статистичні дані дають підстави вважати, що опис ціни базового ризикового активу (акції) геометричним броунівським рухом не є адекватним [2]. Емпірична щільність розподілу ціни акції суттєво відрізняється від відповідного теоретичного логнормального розподілу, зокрема має так звані важкі хвости. Теоретичні результати, які дає модель Блека-Шоулса, занижують ціну опціонів.

М.С. Гончар [3] створив новий метод, особливістю якого є конструктивний підхід (на відміну від результатів Крамкова [4]), завдяки якому для широкого класу процесів отримують явні формули для ціни опціону, мінімального геджа та відповідного капіталу інвестора. Застосування цього методу до моделі Блека-Шоулса [1] дає відомі результати [5].

У цій праці пропонуємо моделювати динаміку цін акції однорідним випадковим процесом $S_t$ з незалежними приростами, вибіркові траєкторії якого є розривними. Щільність одновимірного розподілу процесу $S_t$ спадає за степеневим законом, який має „важкі хвости“. Ціна неризикового активу $B_t$ еволюціонує невипадково, зі сталою ставкою відсотків. На такому $(B, S)$-ринку методом М.С. Гончара для певного класу зобов'язань для опціонів європейського типу буде побудовано мінімальний гедж, знайдено величину відповідного капіталу та ціну опціону. Наявність мінімального геджа дає підставу стверджувати, що знайдена ціна буде справедливою.

**2. Опис моделі фондового ринку.** Розглядаємо еволюцію активів, яка відбувається неперервно з часом на скінченому часовому інтервалі $[0, T)$. Нехай неризиковий актив еволюціонує за законом

$$B_t = B_0 e^{rt},\ t \in [0, T), \tag{1}$$

де $B_t$ — капітал на банківському рахунку в момент часу $t$; $r$ — банківська відсоткова ставка. Невизначеність в цій моделі $(B, S)$-ринку задається ймовірнісним простором $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$ . Ціну ризикового активу будемо моделювати випадковим процесом

$$S_t(\omega) = S_0 e^{rt} e^{t\left(sqrt2\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_t(\omega) - \delta\zeta_t(\omega)} = S_0 e^{rt} e^{t\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \xi_t(\omega)}. \tag{2}$$

Тут $S_t$ — ціна ризикового активу в момент часу $t$; $\delta > 0$, $\sigma > 0$ — деякі параметри, що визначаються для кожного ризикового активу окремо і в цій праці вважаються заданими; процес

$$\xi_t = -\sigma W_t + \delta\zeta_t \tag{3}$$

є сумою незалежних процесів броунівського руху $W_t$ та одностороннього $\frac{1}{2}$-стійкого процесу Леві $\zeta_t$. Для $\zeta_t$ правильна властивість

$$E_1 e^{-a\zeta_t} = e^{-\sqrt{2a}t},\ a > 0, \tag{4}$$

де $E_1$ — математичне сподівання в просторі $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$. З (4) випливає, що $\{\frac{S_t}{B_t}, \mathcal{F}^\xi,\ t > 0\}$ – мартингал. Отже, $(B, S)$-ринок безарбітражний. Нехай виплати по опціону задаються функцією

$$f_T(\omega) = f(S_T(\omega)),\ \omega \in \Omega_1.$$

Під геджем $\pi$ розуміється динамічна самофінансовна стратегія інвестора, яка описується послідовністю пар $\{\gamma_t^\pi, \beta_t^\pi\}_{t\in[0,T]}$, (де $\gamma_t^\pi$ — кількість акцій в портфелі, а $\beta_t^\pi$ — кількість неризикового активу; $\{\gamma_t^\pi, \beta_t^\pi\}$ ще називають портфелем), така, що величина капіталу в момент $T$ виконання опціону задовольняє нерівність

$$X_T^\pi = \gamma_T^\pi S_T + \beta_T^\pi B_T \geqslant f(S_T).$$

Тут $f(S_T)$ — величина зобов'язання. Мінімальним геджем $\pi^*$ будемо називати динамічну самофінансовну стратегію інвестора, яка породить такий капітал $X_T^{\pi^*}$ в момент $T$ виконання опціону, що майже напевно $X_T^{\pi^*} \leqslant X_T^\pi$ для будь-якого іншого геджу $\pi$.

Мета нашої праці — побудувати теорію контрактів з опціонами для опціонів Європейського типу. Скористаємося методом М.С. Гончара, викладеним у [3]. Для цього спочатку дамо конструкцію допоміжного ймовірнісного простору.

Всі позначення в цій статті вибрано так, щоб вони відповідали позначенням у монографії [3], на твердження якої далі будуть посилання.

**3. Конструкція ймовірнісного простору спеціального вигляду.** Нехай задано деяке розбиття $\{\alpha\} = \{a_i^\alpha\}_{i=1}^{k(\alpha)+1}$ часового відрізка $[0,T)$, $0 = a_1^\alpha < a_2^\alpha < \dots < a_{k(\alpha)+1}^\alpha = T$. Розглянемо сім'ю просторів елементарних подій $\Omega_i = [0,T)$, борелівських $\sigma$-алгебр на них $\mathcal{F}_i^0 = \mathcal{B}([a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha))$ та для кожного $i = \overline{1,k(\alpha)}$ — потік $\sigma$-підалгебр $\mathcal{F}_i^0$:

$$\mathcal{F}_i^{0,t} = \begin{cases} \{\emptyset, [0,T)\}, & 0 \leqslant t \leqslant a_i^\alpha, \\ \mathcal{B}([a_i^\alpha, t]), & a_i^\alpha \leqslant t \leqslant a_{i+1}^\alpha, \\ \bigvee\limits_{t\in[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)} \mathcal{B}([a_i^\alpha, t]) = \mathcal{F}_i^0, & a_{i+1}^\alpha \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Означимо новий простір $\Omega_\alpha = \prod\limits_{i=1}^{k(\alpha)} \Omega_i$ як прямий добуток відповідних компонент та $\mathcal{F}_\alpha^0 = \sigma\Big(\prod\limits_{i=1}^{k(\alpha)} \mathcal{F}_i^0\Big)$, $\mathcal{F}_\alpha^{0,\alpha} = \sigma\Big(\prod\limits_{i=1}^{k(\alpha)} \mathcal{F}_i^{0,t}\Big)$ — мінімальні $\sigma$-алгебри, породжені прямими добутками. Міра на вимірному просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0\}$ задається на множинах вигляду $A_1 \times ... \times A_{k(\alpha)}$, $A_i \in \mathcal{F}_i^0$, а потім продовжується до деякої міри $P_\alpha$ на $\mathcal{F}_\alpha^0$ за теоремою Іонеску-Тулчі.

$$P_\alpha(A_1 \times ... \times A_{k(\alpha)}) =$$
$$= \int\limits_{A_1} ... \int\limits_{A_{k(\alpha)}} F_1^\alpha(d\omega_1^\alpha) F_2^\alpha(d\omega_2^\alpha | \{\omega_\alpha\}_1) \times ... \times F_{k(\alpha)}(d\omega_{k(\alpha)}^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)-1}),$$

$$F_i^\alpha(\omega_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \omega_i^\alpha \leqslant a_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \\ \phi_i^\alpha(\omega_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}), & a_i^\alpha < \omega_i^\alpha < a_{i+1}^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \\ 1, & a_{i+1}^\alpha \leqslant \omega_i^\alpha < T, \{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}, \end{cases}$$

$i = \overline{1,k(\alpha)}$, де $\{\omega_\alpha\}_i = \{\omega_1^\alpha, \dots, \omega_i^\alpha\}$, $\phi_i^\alpha(\omega_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \in [0,1)$, є неперервною справа, неспадною, вимірною (з вимірного простору $\{\Omega^{i-1}, \mathcal{F}_{i-1}^0\}$ у вимірний простір $\{[0,1], \mathcal{B}([0,1])\}$) функцією змінної $\omega_i^\alpha$ на $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ за кожного фіксованого $\{\omega_\alpha\}_{i-1} \in \Omega^{i-1}$, причому $\phi_i^\alpha(a_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) = 0$.

Задамо ізометрію $R$ між множиною випадкових величин на ймовірнісному просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$ і підмножиною випадкових величин на ймовірнісному просторі $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$, на якому задано деякий випадковий процес $\eta_t$. Нехай $f(\omega_1^\alpha, ..., \omega_{k(\alpha)}^\alpha)$ — деяке вимірне відображення ймовірнісного простору $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$ у вимірний простір $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Визначимо

$$Rf(\omega_1^\alpha, ..., \omega_{k(\alpha)}^\alpha) = f_1(\omega) =$$
$$= f\Big(g_{[a_1^\alpha, a_2^\alpha)}\left(\eta_{a_2^\alpha}(\omega) - \eta_{a_1^\alpha}(\omega)\right), ..., g_{[a_{k(\alpha)}^\alpha, a_{k(\alpha)+1}^\alpha)}\left(\eta_{a_{k(\alpha)+1}^\alpha}(\omega) - \eta_{a_{k(\alpha)}^\alpha}(\omega)\right)\Big), \tag{5}$$

де функція $g_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$ — неперервне монотонно зростаюче і взаємно однозначне відображення множини значень випадкового процесу $\eta_t$ на множину $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$. Функцію, обернену до $g_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$, позначатимемо $g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$. Для будь-якої обмеженої борелівської функції $\varphi(x)$, заданої на $\mathbb{R}$, правильна рівність ($E_\alpha$ — математичне сподівання у просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$)

$$E_\alpha \varphi(f(\omega_1^\alpha, ..., \omega_{k(\alpha)}^\alpha)) = E_1 \varphi(f_1(\omega)).$$

**3. Основні результати.**

**Теорема 1.** *Нехай еволюція безризикового активу відбувається за законом (1), еволюція ціни ризикового активу задається узагальненою моделлю Блека-Шоулса (2) на деякому ймовірнісному просторі* $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$.

*Нехай на ймовірнісному просторі* $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$, *що відповідає деякому розбиттю* $\{\alpha\} = \{a_i^\alpha\}_{i=1}^{k(\alpha)+1}$ *часового інтервалу* $[0,T)$, *і побудований за сім'єю функцій розподілу* $(i = \overline{1, k(\alpha)})$

$$\phi_i^\alpha(\omega_i^\alpha) = \frac{\sqrt{\Delta_i^\alpha \delta}}{2\pi\sigma} \int\limits_{-g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)}^{\infty} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(y+q)^2}{2\Delta_i^\alpha \sigma^2} - \frac{(\Delta_i^\alpha)^2 \delta}{2q\sigma}} \frac{1}{\sqrt{q^3}}\, dq\, dy, \;\; \omega_i^\alpha \in [a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha),$$

$$g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha) = \sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\omega_i^\alpha - a_i^\alpha - a_{i+1}^\alpha}{a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha}\right) + \delta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_i^\alpha - a_i^\alpha}{a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha}\right),$$

*еволюція ризикового активу відбувається за законом*

$$S_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = e^{rt} S_0 E_\alpha\{e^{T(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}) - \xi_T^*} | \mathcal{F}_t^{0,\alpha}\}, \tag{6}$$

*де*

$$\xi_t^* = -\sum_{i=1}^m g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha), \;\; m = \max\{i, a_{i+1}^\alpha \leqslant t\} \;\; \omega_i^\alpha \in [a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha). \tag{7}$$

*Існує перетворення* $R$ *ймовірнісного простору* $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$ *у ймовірнісний простір* $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$, *яке задається (5) таке, що для довільного наперед заданого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$, *для якого за умови* $\Delta_\alpha = \max\limits_i |a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha| < \delta$ *справджується*

$$\sup_{t \in [0,T]} E_1[S_t(\omega) - RS_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})]^2 < \varepsilon. \tag{8}$$

*Якщо функція* $f(x)$, *яка задає виплати в момент* $T$ *виконання опціону*

$$f_T(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = f(S_T^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})) = f(S_0 e^{rT} e^{T(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}) - \xi_T^*})$$

*задовольняє умову*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|, \;\; 0 < C < \infty, \;\; x_1, \;\; x_2 \in \mathbb{R},$$

*то для еволюції* $S_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ *на ймовірнісному просторі* $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$ *існує мінімальний гедж* $\pi_t^*$; *еволюція капіталу інвестора* $X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$, *справедлива ціна опціону* $X_0^*(\alpha)$ *і самофінансовна стратегія* $\{\beta_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}), \gamma_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})\}$, *які відповідають* $\pi_t^*$, *задаються формулами*

$$X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = e^{r(t-T)} E_\alpha\{f(S_T^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})) | \mathcal{F}_t^{0,\alpha}\}, \tag{9}$$

$$X_0^*(\alpha) = e^{-rT} E_\alpha f(S_T^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})), \tag{10}$$

$$\gamma_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}) = \psi_{k(\alpha)}(t | \{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)}), \tag{11}$$

$$\beta_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}) = \frac{X_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}) - \gamma_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})S_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})}{B(t)}, \tag{12}$$

*де* $$\psi_{k(\alpha)}(t|\{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{k(\alpha)} \chi_{[a_i^\alpha,\ a_{i+1}^\alpha)}(t)\frac{\varphi_i^{\alpha,f}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{\varphi_i^{0,\alpha}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1})},$$

$$\varphi_i^{0,\alpha}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{S_0}{B_0}[g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},t) - \frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int\limits_{(t,\ a_{i+1}^\alpha)} g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},x)\phi_i^\alpha(dx)],$$

$$\varphi_i^{\alpha,f}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},t) - \frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int\limits_{(t,\ a_{i+1}^\alpha)} \bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1},x)\phi_i^\alpha(dx),$$

$$\bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i) = \frac{1}{B_0e^{rT}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(B_0e^{rT}g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i)e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\right)F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy),$$

$$g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i) = \frac{S_0}{B_0}e^{a_{i+1}^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi^*_{a_{i+1}^\alpha}}.$$

*На ймовірнісному просторі* $\{\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_1\}$ *для еволюції ціни ризикового активу* $\bar{S}_t(\omega) = RS_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})$ *існує мінімальний гедж, який може бути поданий у формі*

$$\bar{\beta}_t(\omega) = R\beta_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}), \qquad \bar{\gamma}_t(\omega) = R\gamma_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}), \tag{13}$$

*еволюція капіталу інвестора та справедлива ціна контракту з опціоном задаються відповідно формулами*

$$\bar{X}_t(\omega) = RX_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}), \qquad \bar{X}_0(\omega) = RX_0^*(\{\alpha,\omega_\alpha\}). \tag{14}$$

*В* $L_1(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ *існують границі*

$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0} RX^*_{c_i^\alpha}(\{\alpha,\omega_\alpha\}) = X_t^{\pi^*}(\omega), \qquad \lim_{\Delta_\alpha\to 0} RX_0^*(\alpha) = X_0,$$

$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0} R\gamma^*_{c_i^\alpha}(\{\alpha,\omega_\alpha\})\} = \gamma_t^{\pi^*}(\omega),$$

*де* $c_i^\alpha$ *– точка з* $[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ *така, що* $g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(c_i^\alpha) = 0$, *для яких правильні формули*

$$X_t^{\pi^*}(\omega) = e^{r(t-T)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(e^{r(T-t)}S_t(\omega)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\right)F_{(T-t)}(dy),$$

$$X_0 = e^{-rT}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(e^{rT}S_0e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\right)F_T(dy). \tag{15}$$

$$\gamma_t^{\pi^*}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'\left(e^{r(T-t)}S_t(\omega)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\right)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}F_{(T-t)}(dy),$$

$$F_t(dy) = \frac{\sqrt{t\delta}}{2\pi\sigma}\int\limits_0^\infty \exp\Big\{-\frac{(q-y)^2}{2t\sigma^2} - \frac{t^2\delta}{2\sigma q}\Big\}\frac{1}{\sqrt{q^3}}\,dq\,dy.$$

$$\beta_t^{\pi^*}(\omega) = \frac{X_t^{\pi^*}(\omega) - S_t(\omega)\gamma_t^{\pi^*}(\omega)}{B_t}.$$

*Ці формули відповідають опціону, для якого еволюція базового ризикового активу задається узагальненою моделлю Блека-Шоулса, причому $X_t^{\pi^*}(\omega)$ задає еволюцію капіталу інвестора, $X_0$ — ціну контракту з опціоном, а $\{\gamma_t^{\pi^*}(\omega), \beta_t^{\pi^*}(\omega)\}$ — самофінансовну стратегію інвестора, що відповідає мінімальному геджу. Існування мінімального геджа дає право стверджувати, що знайдена ціна опціону є справедливою.*

*Доведення.* Процеси $W_t$ та $\zeta_t$ є однорідними з незалежними приростами, тому повністю описуються своїми одновимірними функціями розподілу. Одновимірна функція розподілу $F_t(x) = P_1(\xi_t \leqslant x)$ процесу (3), за допомогою якої будується міра на просторі $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha\}$, є згорткою одновимірних функцій розподілу $F_t^W(x) = P_1(-\sigma W_t \leqslant x)$ та $F_t^\zeta(x) = = P_1(\delta\zeta_t \leqslant x)$ незалежних процесів $-\sigma W_t$ та $\delta\zeta_t$ відповідно. Заміною змінних зводимо $F_t(x)$ до вигляду, зручного для обчислень

$$F_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t^W(x-z)F_t^\zeta(dz) = \frac{\sqrt{t\delta}}{2\pi\sigma}\int\limits_{-x}^{\infty}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{(y+q)^2}{2t\sigma^2} - \frac{t^2\delta}{2q\sigma}\right\}\frac{1}{\sqrt{q^3}}\,dq\,dy.$$

У нас є початковий ймовірнісний простір $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$ та випадковий процес $\xi_t$, функцією якого є еволюція ризикового активу. За ймовірнісними характеристиками цього процесу та функцією $g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$ будується ймовірнісний простір $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha\}$ і на цьому новому ймовірнісному просторі будується випадковий процес $\xi_t^*(\{\omega_\alpha\}_{k(\alpha)})$ за формулою (7). Вибір функції $g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)$ однозначно визначає цей процес і простір $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha^0, P_\alpha\}$. Зауважимо, що цей вибір не принциповий, важливо, щоб виконувалися умови, наведені при означенні ізометрії.

Застосувавши теорему 12.7.1 з [3, с. 778] для $S_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ з простору $\{\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha\}$, побудованого в теоремі 1, та неризикового активу, що еволюціонує за (1), отримаємо твердження (8), формули для обчислення справедливої ціни контракту з опціоном $X_0(\alpha)$ (10), вирази для еволюції капіталу інвестора $X_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})$ (9) та самофінансовної стратегії $\{\beta_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\}), \gamma_t^*(\{\alpha, \omega_\alpha\})\}$, яка відповідає мінімальному геджу $\pi_t^*$ – (12) та (11) відповідно.

Враховуючи введену ізометрію, одержуємо, що для випадкового процесу $\bar{S}_t(\omega) = RS_t(\{\alpha, \omega_\alpha\})$, який описує еволюцію ризикового активу на ймовірнісному просторі $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$, існує мінімальний гедж, а відповідний йому капітал і портфель інвестора подаються формулами (13), (14). Щоб отримати результати для закону $S_t(\omega)$, спрямуємо діаметр розбиття $\Delta_\alpha = \max\limits_i \Delta_i^\alpha = \max\limits_i |a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha|$ до нуля.

Тепер знайдемо явний вигляд формул, про які йдеться. Позначимо

$$\gamma^f_{c_i^\alpha} = \frac{R\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}.$$

Правильна така лема, доведення якої винесене в додаток.

**Лема 1.** *1. Для* $f(x)=x^n$ *в* $L_1(\Omega_1,P_1)$ *існує границя*

$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0}\gamma_{c_i^\alpha}^{x^n}=[e^{r(T-t)}S_t]^{n-1}n\int_{-\infty}^{\infty}e^{n(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-yn}F_{(T-t)}(dy).$$

*2. Для будь-якого полінома* $P_m(x)=\sum\limits_{n=0}^{m}c_nx^n$ *в* $L_1(\Omega_1,P_1)$ *існує границя*

$$\lim_{\Delta_i^\alpha\to 0}\gamma_{c_i^\alpha}^{P_m}=\int_{-\infty}^{\infty}P_m'\big(e^{r(T-t)}S_te^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\big)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}F_{(T-t)}(dy).$$

*3. Для неперервно-диференційовної функції* $f(x)$*, яка задовольняє умови*

$$\exists l\in\mathbb{Z},l\geqslant 0:\frac{f'(x)}{(1+x^2)^l}\to 0,|x|\to\infty, \tag{16}$$

*в* $L_1(\Omega_1,P_1)$ *існує границя*

$$\gamma_t(\omega)=\lim_{\Delta_\alpha\to 0}\gamma_{c_i^\alpha}^{f}=\int_{-\infty}^{\infty}f'\big(e^{r(T-t)}S_t(\omega)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}\big)e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}F_{(T-t)}(dy).$$

Отримаємо формулу для капіталу інвестора та справедливої ціни контракту з опціоном. Позаяк функція платежу має вигляд

$$f\big(S_T^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})\big)=f\big(e^{rT}S_0e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_T^*}\big),$$

то капітал інвестора $X_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})$ на $\{\Omega_\alpha,\mathcal{F}_\alpha^0,P_\alpha\}$, задається формулою (9). Для $t\in[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)$ одержимо

$$X_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})=e^{r(t-T)}E_\alpha\Big\{E_\alpha\big\{f\big(e^{rT}S_0e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_T^*}\big)|\mathcal{F}^{0,\alpha}_{a_{i+1}^\alpha}\big\}|\mathcal{F}_t^{0,\alpha}\Big\},$$

$$E_\alpha\big\{f\big(e^{rT}S_0\exp\{T\big(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\big)-\xi_T^*\}\big)|\mathcal{F}^{0,\alpha}_{a_{i+1}^\alpha}\big\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f\Big(e^{rT}S_0\exp\{T\big(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\big)-\xi^*_{a_{i+1}^\alpha}-y\}\Big)F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy)=\hat g(\{\omega_\alpha\}_i).$$

Нехай
$$X_t^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})=\sum_{i=1}^{k(\alpha)}\chi_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(t)X_t^{*,i}(\{\omega_\alpha\}_i),$$

де
$$X_t^{*,i}(\{\omega_\alpha\}_i)=e^{r(t-T)}[\hat g(\{\omega_\alpha\}_i)\chi_{[a_i^\alpha,\ t]}(\omega_i^\alpha)+$$
$$+\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int_t^{a_{i+1}^\alpha}\hat g(\{\omega_\alpha\}_{i-1},y_1)\phi_i^\alpha(dy_1)\chi_{(t,\ a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha)].$$

Тому $$X^{*,i}_{c_i^\alpha}(\{\omega_\alpha\}_i) = e^{r(c_i^\alpha - T)}\Big[\chi_{[a_i^\alpha, c_i^\alpha]}(\omega_i^\alpha) E_\alpha\big\{f\big(S_T^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})\big)\big|\mathcal{F}^{0,\alpha}_{a_{i+1}^\alpha}\big\} +$$

$$+\chi_{(c_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(\omega_i^\alpha) E_\alpha\big\{f\big(S_T^*(\{\alpha,\omega_\alpha\})\big)\big|\mathcal{F}^{0,\alpha}_{a_i^\alpha}\big\}\Big].$$

Існує границя $RX^{*,i}_{c_i^\alpha}(\{\omega_\alpha\}_i)$ в метриці $L_1(\Omega_1, P_1)$ і вона обчислюється за формулою

$$X_t(\omega) = \lim_{\Delta_\alpha \to 0} RX^{*,i}_{c_i^\alpha}(\{\omega_\alpha\}_i) = e^{r(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \xi_t - y}\Big) F_{(T-t)}(dy) =$$

$$= e^{r(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(e^{r(T-t)} S_t(\omega) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - y}\Big) F_{(T-t)}(dy).$$

Для справедливої ціни контракту з опціоном отримуємо формулу (15) з попередньої при $t = 0$. Теорему доведено.

**3. Додаток. Доведення Леми 1.**

Зауважимо, що

$$\varphi_i^{0,\alpha}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})[e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(t)} -$$

$$-\frac{1}{1 - \phi_i^\alpha(t)}\int_t^{a_{i+1}^\alpha} e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(y)} \phi_i^\alpha(dy)],$$

$$\bar{\phi}_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i) = \frac{1}{B_0 e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(S_0 e^{rT}\exp\big\{T\big(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\big) - \xi^*_{a_{i+1}^\alpha} - y\big\}\Big) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) =$$

$$= \frac{1}{B_0 e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(B_0 e^{rT} g_i^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i)\exp\big\{(T - a_{i+1}^\alpha)\big(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\big) - y\big\}\Big) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

$$\varphi_i^{\alpha,f}(t|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{1}{B_0 e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[f\big(K_i(y,t,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) -$$

$$-\frac{1}{1 - \phi_i^\alpha(t)}\int_t^{a_{i+1}^\alpha} f\big(K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big)\phi_i^\alpha(dy_1)\Big] F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy),$$

де $$K_i(y,t,\{\omega_\alpha\}_{i-1}) =$$

$$= B_0 e^{rT} g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1}) e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(t)} e^{(T - a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta} - \frac{\sigma^2}{2}\right) - y}.$$

Спочатку з'ясуємо пункт 1. Нехай $f(x) = x^n$. Тоді

$$\varphi_i^{\alpha,x^n}(s|\{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{1}{B_0 e^{rT}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\big(K_i(y,t,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big)^n -$$

$$-\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(t)}\int\limits_t^{a_{i+1}^\alpha}\left(K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right)^n\phi_i^\alpha(dy_1)\Big]F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy)=$$

$$=\left(B_0e^{rT}\right)^{n-1}\left(g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})(T-a_{i+1}^\alpha)}\right)^n\times$$

$$\times\Big[e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(s)}-\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(s)}\int\limits_s^{a_{i+1}^\alpha}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(y_1)}\phi_i^\alpha(dy_1)\Big]\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

Позначимо

$$A_n(s,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))=e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(s)}-$$

$$-\frac{1}{1-\phi_i^\alpha(s)}\int\limits_s^{a_{i+1}^\alpha}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n\Delta_i^\alpha-ng^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(y_1)}\phi_i^\alpha(dy_1),$$

З урахуванням позначень, одержимо

$$\frac{\varphi_i^{\alpha,x^n}(s|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{\varphi_i^{0,\alpha}(s|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}=\left(B_0e^{rT}g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right)^{n-1}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n(T-a_{i+1}^\alpha)}\times$$

$$\times\frac{A_n(s,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}{A_1(s,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

Прийнявши $s=c_i^\alpha$, де $c_i^\alpha$ — така точка, що $g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(c_i^\alpha)=0$, отримаємо

$$\frac{R\varphi_i^{\alpha,x^n}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})}=\left(B_0e^{rT}Rg_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})\right)^{n-1}e^{(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})n(T-a_{i+1}^\alpha)}\times$$

$$\times\frac{A_n(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}{A_1(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

$$Rg_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i)=\frac{S_0}{B_0}e^{a_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_{a_i^\alpha}}.$$

Одержимо

$$\lim_{\Delta_\alpha\to0}\frac{A_n(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}{A_1(c_i^\alpha,[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha))}=\lim_{\Delta_\alpha\to0}e^{(n-1)\Delta_i^\alpha(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2})}\cdot\frac{\int_0^\infty[1-e^{-ny}]F_{\Delta_i^\alpha}(dy)}{\int_0^\infty[1-e^{-y}]F_{\Delta_i^\alpha}(dy)}=n.$$

Внаслідок стохастичної неперервності процесу $\xi_t$ отримаємо такі границі за ймовірністю:

$$\lim_{\Delta_i^\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ny}F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy)=\lim_{\Delta_i^\alpha\to 0}E_1\{e^{-n\xi_{(T-a_{i+1}^\alpha)}}\}=$$

$$=E_1\{e^{-n\xi_{(T-t)}}\}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ny}F_{(T-t)}(dy),$$

$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0}Rg_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_i)=\frac{S_0}{B_0}e^{a_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi_t}.$$

Отже,
$$\lim_{\Delta_\alpha\to 0}\gamma_{c_i^\alpha}^{x^n}=[e^{r(T-t)}S_t]^{n-1}n\int_{-\infty}^{\infty} e^{n(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-yn}F_{T-t}(dy)$$

за ймовірністю. Ця границя буде і у $L_1(\Omega_1,P_1)$, оскільки $\gamma_{c_i^\alpha}^{x^n}$ рівномірно інтегровні.

Пункт 2 є наслідком 1. Переходимо до доведення третього пункту. Введемо позначення

$$D_i(y,y_1,\tau,c_\alpha^i,\{\omega_\alpha\}_{i-1})=$$

$$=K_i(y,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})+\tau[K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})-K_i(y,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})].$$

З урахуванням цього, отримаємо

$$\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})=\frac{-1}{B_0e^{rT}(1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha))}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha}\int_0^1 f'\big(D_i(y,y_1,\tau,c_\alpha^i,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big)\times$$

$$\times[K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})-K_i(y,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})]d\tau\phi_i^\alpha(dy_1)F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

Завдяки умові (16) існують число $0<c<\infty$ та послідовність поліномів $P_n(x)$ такі, що $\forall a>0\ \sup\limits_{x\in[-a,a]}|f'(x)-P_n'(x)|\to 0, n\to\infty$, $|f'(x)|\leqslant c(1+x^2)^l$, $|P_n'(x)|\leqslant c(1+x^2)^l$, $x\in[-a,a]$. Позначимо $O_m$ - множину реалізацій процесу $\xi_t$ таку, що $O_m=\big\{\omega\in\Omega_1,\ \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\xi_t|\leqslant m\big\}, m\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}O_m=\Omega_0\subseteq\Omega_1$, $P_1(\Omega_0)=1$. Оцінимо на множині $O_m$ вираз

$$\frac{|R\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})-R\varphi_i^{\alpha,P_n}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})|}{|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})|}.$$

Згадаємо, що

$$\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha|\{\omega_\alpha\}_{i-1})=g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})\frac{e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)}\int_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha}(1-e^{-g^{-1}_{[a_i^\alpha,a_{i+1}^\alpha)}(x)})\phi_i^\alpha(dx),$$

тоді

$$\int_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha}\big|-K_i(y,c_i^\alpha,\{\omega_\alpha\}_{i-1})+K_i(y,y_1,\{\omega_\alpha\}_{i-1})\big|\phi_i^\alpha(dy_1)\frac{B_0e^{rT}g_{i-1}^\alpha(\{\omega_\alpha\}_{i-1})}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)}\times$$

$$\times e^{\Delta_i^\alpha\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)} e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} \int\limits_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \left| -1+e^{-g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(y_1)} \right| \phi_i^\alpha(dy_1) =$$

$$= \frac{B_0 e^{rT} e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \left| \varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \right|.$$

Позначимо $H_n(x) = |f'(x) - P_n'(x)|$ і розглянемо вираз

$$RI_1^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{1}{B_0 e^{rT}} \int\limits_{-\infty}^{-d} \int\limits_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \int\limits_0^1 RH_n\big(D_i(y, y_1, \tau, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \times$$
$$\times |RK_i(y, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) - RK_i(y, y_1, \{\omega_\alpha\}_{i-1})| d\tau \phi_i^\alpha(dy_1) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

На множині $O_m$ та для $y_1 \in [c_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)$ виконується оцінка

$$0 \leqslant RD_i\big(y, y_1, \tau, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}\big) = e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\xi^*_{a_i^\alpha}-y} \times$$
$$\times \Big(1+\tau\big(-1+e^{-g^{-1}_{[a_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha)}(y_1)}\big)\Big) \leqslant e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m-y}.$$

Тому

$$RH_n\big(D_i(y, y_1, \tau, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \leqslant 2c(1+v_m e^{-2y})^l,$$

де $v_m = \big[S_0 e^{rT} e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m}\big]^2$.
Для $RI_1^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})$ правильна оцінка

$$RI_1^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant \frac{2ce^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{-y}(1+v_m e^{-2y})^l F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) \left| R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \right|.$$

Для наперед заданого $\varepsilon > 0$ виберемо $d > 0$ таким, щоб

$$\frac{2ce^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{-y}(1+v_m e^{-2y})^l F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) < \varepsilon,$$

тоді $RI_1^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant \varepsilon \big| R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \big|$.
Тепер оцінимо $RI_2^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})$.

$$RI_2^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) = \frac{1}{B_0 e^{rT}} \int\limits_{-d}^{\infty} \int\limits_{c_i^\alpha}^{a_{i+1}^\alpha} \int\limits_0^1 RH_n\big(D_i(y, y_1, \tau, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1})\big) \times$$
$$\times \big| RK_i(y, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) - RK_i(y, y_1, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \big| d\tau \phi_i^\alpha(dy_1) F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy).$$

На множині $O_m$ та для $y_1 \in [c_i^\alpha, a_{i+1}^\alpha), y \in [-d, \infty)$ виконується оцінка

$$0 \leqslant RD_i(y, y_1, \tau, c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant e^{rT} S_0 e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m+d} = l_m.$$

Виберемо ціле число $N_0(\varepsilon)$ таким, щоб виконувалась нерівність $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant l_m} H_n(x) < \varepsilon_1$, $n \geqslant N_0(\varepsilon_1)$, де $\varepsilon_1 = \dfrac{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)}{e^d e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}$. Матимемо

$$RI_2^d(c_i^\alpha, \{\omega_\alpha\}_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \int\limits_{-d}^{\infty} e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)} e^{-y} F_{(T-a_{i+1}^\alpha)}(dy) \times$$

$$\times \left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1})\right| \leqslant \varepsilon_1 \frac{e^d e^{(T-a_{i+1}^\alpha)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{1-\phi_i^\alpha(c_i^\alpha)} \left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1})\right|.$$

Отже, $\exists N_0(\varepsilon, m)$ таке, що для $n > N_0(\varepsilon, n)$

$$\frac{\left|R\varphi_i^{\alpha,f}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1}) - R\varphi_i^{\alpha,P_n}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1})\right|}{\left|R\varphi_i^{0,\alpha}(c_i^\alpha | \{\omega_\alpha\}_{i-1})\right|} \leqslant 2\varepsilon.$$

На множині $O_m$ справджується нерівність

$$e^{r(T-t)} S_t(\omega) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)} \leqslant S_0 e^{rT} e^{T\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)+m}.$$

Тому $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(e^{r(T-t)} S_t(\omega) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y}) e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} F_{(T-t)}(dy) \leqslant$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{-d} e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} 2c(1+v_m e^{-2\sigma y})^l F_{(T-t)}(dy) +$$

$$+\varepsilon \int\limits_{-d}^{\infty} e^{(T-t)\left(\sqrt{2\delta}-\frac{\sigma^2}{2}\right)-y} F_{(T-t)}(dy) \leqslant \varepsilon + c\varepsilon,$$

якщо $d$ вибрати досить великим, а $n > N_0(\varepsilon, m)$. Внаслідок довільності $m$ і того, що $P_1\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} O_m\right) = 1$, отримуємо твердження Леми 1.

**4.Висновки.** Для узагальненої моделі Блека-Шоулса для опціонів європейського типу з широким класом вимог вперше отримано формули для інвестиційного портфеля інвестора, що відповідає мінімальному геджу, для еволюції капіталу інвестора та справедливої ціни опціону. Щоб застосувати модель на практиці, треба оцінити значення параметрів $\delta$ та $\sigma$ з історичних даних про ціни акції.

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Economy.– 1973.– Vol.81.– P.637-657.

2. *Mittnik S., Rachev S.* Stable distributions for assets returns//Appl. Math. Lett.– 1989.– Vol.2.– №3.– P.301-304.

3. *Гончар М.С.* Фондовий ринок і економічний ріст.– К., 2001.

4. *Kramkov D.* Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets// Prob. Theory Relat. Fields.– 1996.– Vol.105.– P.459-479.

5. *Гончар М.С., Ковтун С.А.* Застосування випадкових процесів з незалежними приростами до теорії контрактів з опціонами// Вісник Київського Національного Університету ім.Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.– 2001.– Випуск №**5**.– С.38-43.

## GENERALISATION OF BLACK-SCHOLES MODEL

**Svitlana Kovtun**

*Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of Kyiv*
*Metrolohichna str., 14b, 03680 Kyiv, Ukraine*

Generalisation of Black-Scholes model by adding in exponent one-side $\frac{1}{2}$-stable Levy process is proposed. The existanse of minimal hege is prooved for such a model. The explicite formulae for investment portfolio that corresponds to the minimal hege, for capital evolution an the option price are given. As the minimal hege exists the option price is fair.

*Key words:* option, minimal hege, option fair value, random processes with independent increments.

Стаття надійшла до редколегії 17.07.2005

Прийнята до друку 02.11.2006