ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.70–74 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.70–74*

УДК 517.537.72

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЛОГАРИФМІВ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Михайло ЗЕЛІСКО, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Нехай Φ – додатна, неперервно диференційовна на $(-\infty, 0)$ функція така, що $\Phi'(\sigma) \uparrow +\infty$ і $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$, а φ – функція, обернена до Φ'. Для ряду Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з нульовою абсцисою абсолютної збіжності приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma, F) : n \geqslant \geqslant 0\}, \sigma < 0$. Доведено, що за умови $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$ співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma(1 + o(1)))$ і $\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma(1 + o(1)))$ при $\sigma \uparrow 0$ є рівносильними.

Ключові слова: абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda; 0)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Для $\sigma < 0$ приймемо $M(\sigma, F) = = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma, F) : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1). Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [1] функція

Ψ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(-\infty,0)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до 0 на $(0,+\infty)$. Звідси випливає, що й обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до 0 на $(-\infty,0)$. В [2] доведено таке: якщо $\Phi\in\Omega(0)$ така, що $\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)\nearrow+\infty$ і $\ln\Phi'(\sigma)=o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma_0\geqslant\sigma\uparrow 0$, то для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda;0)$ співвідношення $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\Phi(\sigma)$ при $\sigma\uparrow 0$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln n(t)=o(\Phi(\Psi(\varphi(t))))$ при $t\to+\infty$, де $n(t)=\sum_{\lambda_n\leqslant t}1$ – лічильна функція послідовності Λ.

Зазначимо умову на Λ, за якої є рівносильними співвідношення

$$\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi((1+o(1))\sigma),\quad \sigma\uparrow 0 \tag{2}$$

і

$$\ln M(\sigma,F)\leqslant\Phi((1+o(1))\sigma),\quad \sigma\uparrow 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що для цілих рядів Діріхле подібна задача розв'язана в [2]. Зауважимо також таке: якщо $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)=O(1)$, $\sigma\uparrow 0$, то $\Phi((1+o(1))\sigma)=(1+o(1))\Phi(\sigma)$, $\sigma\uparrow 0$, тобто задача зводиться до задачі, розв'язаної в [3], тому надалі вважатимемо, що $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$, $\sigma\uparrow 0$.

Нарешті, зауважимо, що нерівність Коші $\mu(\sigma,F)\leqslant M(\sigma,F)$ свідчить про те, що з (3) випливає (2) для будь-якого ряду Діріхле. Отже, залишається дослідити умови на Λ, за яких з (2) випливає (3).

Для цього через $S^*(\Lambda;0)$ позначимо клас формальних рядів Діріхле (1) таких, що $|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}\to 0$, $n\to\infty$, для кожного $\sigma<0$, тобто максимальний член такого ряду існує для кожного $\sigma<0$, але абсциса абсолютної збіжності може бути <0. Будемо говорити, що такий ряд належить до класу $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda;0)$, якщо виконується співвідношення (2). Зрештою, через $S_{M,\Phi}(\Lambda;0)$ позначимо клас абсолютно збіжних в $\{s:\mathrm{Re}s<0\}$ рядів Діріхле (1), для яких виконується співвідношення (3).

Теорема. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що функція* $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ *при* $\sigma\uparrow 0$. *Для того щоб* $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda;0)\subset S_{M,\Phi}(\Lambda;0)$, *достатньо, щоб*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}|\varphi(t)|/|\Phi^{-1}(\ln n(t))|<1, \tag{4}$$

і якщо, додатково, $\ln\Phi'(\sigma)=o(\Phi(\sigma))$ *при* $\sigma\uparrow 0$, *то необхідно, щоб*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}|\varphi(t)|/|\Phi^{-1}(\ln n(t))|\leqslant 1. \tag{5}$$

Доведення. Передусім зауважимо, що з умови $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty(\sigma\uparrow 0)$ випливає, що $\Psi(\sigma)\sim\sigma$ при $\sigma\uparrow 0$ і $\{\sigma(\Phi'(\sigma))^2-(\Phi'(\sigma)+\sigma\Phi''(\sigma))\Phi(\sigma)\}/(\Phi'(\sigma))^2\geqslant 0$, тобто $|\sigma|\Phi''(\sigma/\Phi'(\sigma))\geqslant|\sigma|\Phi'(\sigma/\Phi(\sigma))$, $\sigma\uparrow 0$. Звідси $x\varphi'(x)/|\varphi(x)|\to 0$, $x\to+\infty$, тобто $|\varphi(x)|$ – повільно спадна функція.

Доведемо спочатку достатність умови (4). Для цього використаємо таке твердження [1]: для того щоб $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\geqslant\sigma_*$, необхідно і достатньо, щоб $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\geqslant n_*$. Оскільки $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma/(1+\varepsilon))$ для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $\sigma\in[\sigma_*(\varepsilon),0)$, то за цим твердженням маємо $\ln|a_n|\leqslant$

$\leqslant -(1+\varepsilon)\lambda_n\Psi(\varphi((1+\varepsilon)\lambda_n)) \leqslant (1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|$ для всіх $n \geqslant n_*(\varepsilon)$. Позначимо $N(\sigma) = \min\{n : \lambda_n \geqslant \Phi'(\sigma(1+\varepsilon)^{-3})\}$. Тоді $n_*(\varepsilon) \leqslant N(\sigma)$ для всіх, досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$ і з огляду на незростання $|\varphi|$, отримуємо

$$\begin{aligned} M(\sigma,F) &\leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda_{N(\sigma)}} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant \\ &\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\{(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)| - |\sigma|\lambda_n\} = \\ &= (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\Big\{(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\Big(1 - \frac{|\sigma|(1+\varepsilon)^{-2}}{|\varphi(\lambda_n)|}\Big)\Big\} \leqslant \\ &\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\Big\{(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\Big(1 - \frac{|\sigma|(1+\varepsilon)^{-2}}{|\varphi(\lambda_{N(\sigma)})|}\Big)\Big\} \leqslant \\ &\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\{-\varepsilon(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\} \qquad (6) \end{aligned}$$

З умови (4) випливає існування числа $q \in (0,1)$ такого, що для всіх досить великих $t > 0$ виконується $\ln n(t) \leqslant \Phi(\varphi(t)/q) \leqslant \Phi(\varphi(t))$, тобто $\ln n(t) = o(t|\varphi(t)|)$, $t \to +\infty$. Звідси випливає, що ряд $\sum\limits_{n\leqslant 0} \exp\{-\varepsilon(1+\varepsilon)^2\lambda_n|\varphi(\lambda_n)|\}$ збіжний, тому з (6) отримуємо нерівність $M(\sigma,F) \leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma,F) + o(1)$, $\sigma \uparrow 0$, тобто

$$\ln M(\sigma,F) \leqslant \ln(N(\sigma)-1) + \ln\mu(\sigma,F) + o(1), \quad \sigma \to +\infty. \qquad (7)$$

З означення $N(\sigma)$ випливає, що $\lambda_{N(\sigma)-1} \leqslant \Phi'((1+\varepsilon)^{-3}\sigma)$, тобто $\ln(N(\sigma)-1) \leqslant$ $\leqslant \ln n(\Phi'((1+\varepsilon)^{-3}\sigma)) \leqslant \Phi((1+\varepsilon)^{-3}\sigma/q)$ для деякого $q \in (0,1)$ і всіх $t \geqslant t_0(q)$.

Якщо тільки число $(1+\varepsilon)^2 q \leqslant 1$, то з (7) для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$ маємо $\ln M(\sigma,F) \leqslant 3\Phi(\sigma/(1+\varepsilon)) \leqslant \Phi(\sigma/(1+2\varepsilon))$, бо для деякого $\xi = \xi(\sigma) \in (\sigma/(1+\varepsilon), \sigma/(1+2\varepsilon))$ виконується

$$\ln\Phi\Big(\frac{\sigma}{1+2\varepsilon}\Big) - \ln\Phi\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\Big) \geqslant \frac{\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)}\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)} \geqslant \frac{\varepsilon|\xi|\Phi'(\xi)}{(1+\varepsilon)\Phi(\xi)} \to +\infty, \quad \sigma \to +\infty.$$

Завдяки довільності ε, достатність умови (4) доведено.

Перейдемо до доведення необхідності умови (5). Припустимо, що вона не виконується. Тоді $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} |\Psi(\varphi(t))|/|\Phi^{-1}(\ln n(t))| > 1$. Тому існує $q > 1$ таке, що $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (\ln n)/\Phi(\Psi(\varphi(\lambda))/q) > 1$, бо $\Phi(\sigma/q_1) = o(\Phi(\sigma/q_2))$, $\sigma \uparrow 0$, якщо $q_1 < q_2$. В [3] доведено таке: якщо (μ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (\ln n)/\mu_n > 1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\mu_k^*\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\mu_k^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j). Тому існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_k^*))/q)\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_{k_j}^*))/q)\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j).

Приймемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-\lambda_k^* \Psi(\varphi(\lambda_k^*))\}$.

Для ряду Діріхле (1) з такими коефіцієнтами за наведеним при доведенні достатності умови (4) твердженням з [1] маємо $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, тобто (2) виконується.

Нехай $m_j = [k_j - \sqrt{k_j}\,] + 2$. Тоді

$$\begin{aligned}\lambda_{m_j}^* &\geqslant \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln(m_j-1)))) \geqslant \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln(k_j-\sqrt{k_j})))) = \\ &= \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln k_j)))- \\ &-\{\Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln k_j))) - \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln(k_j-\sqrt{k_j}))))\} \geqslant \lambda_{k_j}^* - \delta_j,\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\delta_j &= \frac{q\Phi''(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))}{\Psi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))} \ln \frac{k_j}{k_j-\sqrt{k_j}} = \\ &= \frac{q\{\Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))\}^2}{\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))\Phi(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\xi_j)))}, \quad \ln(k_j-\sqrt{k_j}) \leqslant \xi_j \leqslant \ln k_j,\end{aligned}$$

а $\varepsilon_j \to 0$, $j \to +\infty$.

Приймемо, нарешті, $\sigma_j = \varphi(\lambda_{m_j}^*)$. Тоді

$$\begin{aligned}&\sum_{k=m_j}^{k_j} a_k^* \exp\{\sigma_j \lambda_k^*\} \geqslant \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_k^* \Psi(\varphi(\lambda_k^*)) + \sigma_j \lambda_k^*\} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_{m_j}^* \Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \sigma_j \lambda_{k_j}^*\} \geqslant \\ &\geqslant (m_j - k_j + 1)\exp\{-\lambda_{m_j}^* \Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \sigma_j \lambda_{m_j}^* + \delta_j \sigma_j\} \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{k_j}\,\exp\{\Phi(\sigma_j) + \delta_j \varphi(\lambda_{m_j}^*)\}\end{aligned}$$

і, якщо такий ряд збіжний для всіх $\sigma < 0$, тобто $M(\sigma, F)$ існує для таких σ, то

$$\begin{aligned}\ln M(\sigma_j, F) &\geqslant \frac{1}{2}\ln k_j + \Phi(\sigma_j) + \delta_j \varphi(\lambda_{m_j}^*) + o(1) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\Phi(\Psi(\sigma_j)/q) + \Phi(\sigma_j)\delta_j \varphi(\lambda_{m_j}^*) + o(1), \quad j \to \infty.\end{aligned}$$

Оскільки $\Psi(\sigma) \sim \sigma\,(\sigma \uparrow 0)$, то, завдяки умові $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $(\sigma \uparrow 0)$, для всіх досить великих j маємо

$$\begin{aligned}&\delta_j|\varphi(\lambda_{m_j}^*)| \leqslant \delta_j \leqslant \frac{(\Phi'(\Psi^{-1}(q\phi^{-1}(\xi_j))))^2}{\sqrt{k_j}} \leqslant \frac{(\Phi'(\Psi^{-1}(q\phi^{-1}(\ln k_j))))^2}{\sqrt{k_j}} = \\ &= \exp\Big\{2\ln \Phi'(\Psi^{-1}(q\Phi^{-1}(\ln k_j))) - \frac{1}{2}\ln k_j\Big\} \leqslant \exp\Big\{2\ln \Phi'(\Phi^{-1}(\ln k_j))) - \frac{1}{2}\ln k_j\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \exp\Big\{o(\ln k_j) - \frac{1}{2}\ln k_j\Big\} \to 0, \quad j \to \infty.\end{aligned}$$

Тому $\ln M(\sigma_j, F) \geqslant \Phi(\Psi(\sigma_j)/q)/2 = \Phi((1+o(1))\sigma_j/q)$, $j \to \infty$. Отже, якщо умова (5) не виконується, то існує ряд Діріхле з класу $S_{\mu,\Phi}^*(\Lambda, 0)$, який не належить до класу $S_{M,\Phi}(\Lambda, 0)$. Теорему повністю доведено.

1. *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* О пролизводной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн.– 1998.– Т. 39, №1.– С. 206-223.

2. *Зеліско М., Шеремета М.* Про асимптотичне поводження максимуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 2004.– Вип. 63.– С. 88-92.

3. *Шеремета М.Н.* О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле // Матем. заметки.– 2003.– Т. 73, №3.– С. 437-443.

4. *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics // Matem. studii – 2003.– Vol. 19. №1.– P. 83-88.

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF LOGARITHMS OF THE MAXIMUM MODULUS AND MAXIMAL TERM OF DIRICHLET SERIES ABSOLUTELY CONVERGENT IN HALF-PLANE

Myhajlo Zelisko, Myroslav Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Let Φ be a positive smooth function on $(-\infty, 0)$ such that $|\sigma|\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ and $\Phi'(\sigma)\uparrow+\infty$ as $\sigma\uparrow 0$, and φ be the inverse function to Φ'. For Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with null abscissa of absolute convergence we put $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$, $\sigma < 0$. It is proved that if $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$, then the relations $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+o(1))\sigma)$ and $\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+o(1))\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$ are equivalent.

Key words: Dirichlet series absolutely convergent in half-plane, maximum modulus, maximal term.

Стаття надійшла до редколегії 09.06.2005

Прийнята до друку 02.11.2006