ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.60–69 *Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.60–69*

УДК 519.212

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ З НЕОДНОРІДНИМИ ЗАМОВЛЕННЯМИ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Для систем масового обслуговування G/G/1/0 і M/G/1/m з неоднорідними замовленнями визначено умови існування та ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

Ключові слова: одноканальна система масового обслуговування, неоднорідні замовлення, граничний стаціонарний процес, розподіл імовірностей.

1. Існування граничного стаціонарного процесу для марковських систем масового обслуговування (СМО), які функціонують за схемою „загибелі-розмноження“, випливає з ергодичності відповідного марковського процесу [1, 2]. Опираючись на теорію марковських процесів з дискретними станами і неперервним часом, для класичних СМО з відмовами, СМО з чергою та деяких модифікацій цих систем, починаючи від досліджень А. К. Ерланга [3], були отримані формули для стаціонарних імовірностей станів у припущенні показникового розподілу часу між моментами надходження замовлень і часу обслуговування. Для СМО з відмовами Б. А. Севастьянов [4] довів придатність цих формул для довільного розподілу часу обслуговування. Середню кількість замовлень у черзі для одноканальної СМО з необмеженою чергою у випадку найпростішого потоку замовлень і довільного часу обслуговування можна знайти за формулою Полячека-Хінчина [5]. Для такої СМО з рекурентним потоком замовлень існують лише наближені оцінки середньої довжини черги і середнього часу перебування у черзі. Для СМО M/G/1/m вдалося визначити [6] ймовірності станів граничного стаціонарного процесу.

Задача про обслуговування неоднорідних замовлень розглянута (див. [6, розд. 4]) лише для СМО з найпростішими потоками у такому формулюванні: на вхід СМО надходять два незалежні потоки замовлень з показниковим розподілом часу між сусідніми подіями потоків з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Час обслуговування для кожного типу замовлень також показниковий відповідно з параметрами μ_1 і μ_2.

Дослідження ергодичних властивостей систем масового обслуговування з непуассонівськими потоками у переважній більшості випадків не вдається провести за допомогою теорії марковських процесів. Одним з шляхів вирішення цієї проблеми може бути детальний аналіз процесів масового обслуговування на великому проміжку часу. У цій праці з'ясовано умови існування граничного стаціонарного процесу і визначено стаціонарні ймовірності станів для СМО G/G/1/0 та M/G/1/m з неоднорідними замовленнями. Формулювання задачі про неоднорідні замовленння відрізняється від розглянутого в [6] і дає змогу розглядати n типів замовлень з різними розподілами часу обслуговування.

2. Одноканальна СМО з відмовами. У класичній СМО з відмовами замовлення, які прибувають у момент зайнятості всіх каналів, отримують відмову, покидають систему і не повертаються.

Розглянемо одноканальну СМО з відмовами і неоднорідними замовленнями. Припустимо, що на вхід системи надходить стаціонарний ординарний потік замовлень з довільно розподіленим часом T_λ між сусідніми подіями потоку. Серед замовлень, які потрапили на обслуговування, розрізнятимемо n типів замовлень. Нехай α_i $(i=\overline{1,n})$ — ймовірність того, що замовлення, яке надійшло на обслуговування, є замовленням i-го типу з часом обслуговування T_{μ_i} (довільно розподілена випадкова величина). Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, а випадкові величини T_λ і T_{μ_i} $(i=\overline{1,n})$ мають скінченні математичні сподівання $m_\lambda = M(T_\lambda)$, $m_{\mu_i}=M(T_{\mu_i})$ $(i=\overline{1,n})$.

Проаналізуємо роботу системи на дуже великому проміжку часу T. За початок відліку часу приймемо момент надходження першого замовлення і зупинимо відлік часу в момент завершення обслуговування чергового замовлення.

Процес функціонування системи є чергуванням випадкових проміжків часу тривалістю T_{μ_i} (з якимось одним $i=\overline{1,n}$) і T_{0i} з тим самим i (час від моменту завершення обслуговування чергового замовлення типу i до моменту прибуття наступного). Якщо N — кількість замовлень, що надійшли в систему за час T, $N_{\text{обс}}$ — кількість обслужених замовлень за цей час, то виконується наближена рівність

$$T \approx (N-1)m_\lambda + \tilde{m}_\mu \approx \sum_{i=1}^{n}\alpha_i N_{\text{обс}}(m_{\mu_i}+m_{0i}) - m_{0j}, \tag{1}$$

де $m_{0i}=M(T_{0i})$, j — тип останнього обслуженого замовлення, $\tilde{m}_\mu$ — час від моменту надходження останнього замовлення до завершення часу T. Якщо останнє замовлення, що надійшло за час T, встигло пройти обслуговування, то в (1) треба прийняти $\tilde{m}_\mu = m_{\mu_j}$.

Рівність (1) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядається (чим більше N). Виразивши з (1) відношення $N_{\text{обс}}/N$ і перейшовши до границі при $N\to\infty$, визначимо ймовірність обслуговування замовлення, що надійшло в систему,

$$P_{\text{обс}} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\text{обс}}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{m_\lambda + \dfrac{\tilde{m}_\mu + m_{0j} - m_\lambda}{N}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})} = \frac{m_\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})}. \qquad (2)$$

Отриманий результат не зміниться, якщо за початок чи кінець проміжка часу T взяти будь-який інший момент функціонування системи, тому одержана формула для ймовірності обслуговування відповідає граничному стаціонарному процесу для одноканальної СМО з відмовами. Вигляд правої частини (2) дає підстави стверджувати, що **умовою існування граничного стаціонарного процесу є існування скінченних математичних сподівань випадкових величин** T_λ**,** T_{μ_i} **і** T_{0i} $(i = \overline{1,n}\,)$.

Пронумеруємо стани системи, які відповідають граничному стаціонарному процесу, відповідно до кількості замовлень у системі: s_0 — система вільна, s_1 — в системі є одне замовлення, s_{1i} — в системі є одне замовлення i-го типу. Оскільки для стаціонарного процесу ймовірність перебування системи в певному стані дорівнює середньому відносному часу перебування системи у цьому стані, то для ймовірностей станів граничного стаціонарного процесу з (1) отримаємо формули

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{0i}, \\ p_1 = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\mu_i}, \qquad p_{1i} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \alpha_i m_{\mu_i} \quad (i = \overline{1,n}\,), \end{gathered} \qquad (3)$$

де p_j, p_{1i} — стаціонарна ймовірність перебування системи в стані s_j $(\,j = 0, 1\,)$, s_{1i} $(i = \overline{1,n}\,)$ відповідно.

Перейдемо до аналізу випадкової величин T_{0i} $(i = \overline{1,n}\,)$. Оскільки для всіх $i = \overline{1,n}$ проміжки часу T_λ і T_{μ_i} починаються одночасно, то тривалість часу T_{0i} залежить від кількості замовлень, що надійшли в систему за час обслуговування одного замовлення T_{μ_i}. Маємо $T_{0i} = T_\lambda - T_{\mu_i}$, якщо за час T_{μ_i} не надійшло жодного замовлення (подія A_{1i}); $T_{0i} = T_\lambda + T_\lambda - T_{\mu_i}$, якщо за час T_{μ_i} надійшло одне замовлення (подія A_{2i}); $T_{0i} = T_\lambda + T_\lambda + T_\lambda - T_{\mu_i}$, якщо за час T_{μ_i} надійшло два замовлення (подія A_{3i}) і так далі. Ймовірності подій A_{ki} $(\,k = 1, 2, \dots\,)$ відповідно дорівнюють

$$\begin{gathered} P(A_{1i}) = q_{1i} = P\{T_{\mu_i} < T_\lambda\}; \quad P(A_{2i}) = q_{2i} = P\{T_\lambda \leqslant T_{\mu_i} < T_\lambda + T_\lambda\}; \\ P(A_{3i}) = q_{3i} = P\{T_\lambda + T_\lambda \leqslant T_{\mu_i} < T_\lambda + T_\lambda + T_\lambda\}, \ \dots \quad (i = \overline{1,n}\,). \end{gathered}$$

Визначимо математичне сподівання випадкової величини T_{0i}: $M(T_{0i}) = m_\lambda - m_{\mu_i}$ з імовірністю q_{1i}; $M(T_{0i}) = 2m_\lambda - m_{\mu_i}$ з імовірністю q_{2i}; $M(T_{0i}) = 3m_\lambda - m_{\mu_i}$ з імовірністю q_{3i} і так далі. Математичне сподівання m_{0i} можемо обчислити за формулою повного математичного сподівання

$$m_{0i} = \sum_{k=1}^{\infty} (k m_\lambda - m_{\mu_i}) q_{ki} = m_\lambda \sum_{k=1}^{\infty} k q_{ki} - m_{\mu_i} \quad (i = \overline{1,n}\,).$$

Тут враховано, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ki} = 1$, оскільки події A_{ki} $(k = 1, 2, \ldots)$ утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Підсумуємо викладені міркування.

Теорема. *Якщо потік замовлень і потоки обслуговувань є стаціонарними ординарними потоками зі скінченними математичними сподіваннями інтервалів часу між сусідніми подіями $M(T_\lambda) = m_\lambda$, $M(T_{\mu_i}) = m_{\mu_i}$ $(i = \overline{1,n})$ і збігаються числові ряди*

$$\begin{gathered} S_{qi} = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{ki} \qquad (i = \overline{1,n}) \\ q_{ki} = P\{\underbrace{T_\lambda + \ldots + T_\lambda}_{(k-1)\ \text{доданків}} \leqslant T_{\mu_i} < \underbrace{T_\lambda + \ldots + T_\lambda}_{k\ \text{доданків}}\}, \quad (k = 1, 2, \ldots, \quad i = \overline{1,n}), \end{gathered} \tag{5}$$

то для одноканальної СМО з відмовами і неоднорідними замовленнями існує граничний стаціонарний процес, для якого ймовірність обслуговування і ймовірності станів системи визначаються за формулами:

$$\begin{gathered} P_{\text{обс}} = \frac{m_\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (m_{\mu_i} + m_{0i})} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i S_{qi}}, \qquad p_0 = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{0i}, \\ p_1 = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\mu_i}, \qquad p_{1i} = \frac{P_{\text{обс}}}{m_\lambda} \alpha_i m_{\mu_i} \quad (i = \overline{1,n}), \\ m_{0i} = m_\lambda S_{qi} - m_{\mu_i} \qquad (i = \overline{1,n}). \end{gathered} \tag{6}$$

Оскільки $S_{qi} = M(X_i) + 1$ $(i = \overline{1,n})$, де X_i — кількість замовлень, що надійшли у систему за час T_{μ_i}, то збіжність i-го ряду (5) означає, що середня кількість замовлень, що надходять у систему за час обслуговування одного замовлення i-го типу T_{μ_i} $(i = \overline{1,n})$, є скінченною.

Якщо в формулах (6) прийняти $\alpha_j = 1$, $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1,n},\ i \neq j)$, то отримаємо розподіл імовірностей, що відповідає граничному стаціонарному процесу для СМО G/G/1/0 з однотипними замовленнями.

Наведемо результати обчислення сум рядів (5) і ймовірностей (6) для деяких типових розподілів випадкових величин T_λ і T_{μ_i} $(i = \overline{1,n})$.

Приклад 2.1. *Випадкові величини T_λ і T_{μ_i} $(i = \overline{1,n})$ розподілені за законами Ерланга другого порядку з параметрами λ і μ_i $(i = \overline{1,n})$ відповідно.*

Маємо

$$S_{q_i}=\mu_i^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\big(2k\lambda+(2k-1)(\lambda+\mu_i)\big)\lambda^{2k-2}}{(\lambda+\mu_i)^{2k+1}}=$$
$$=\frac{(\lambda+\mu_i)(4\lambda^2+3\lambda\mu_i+\mu_i^2)}{\mu(2\lambda+\mu_i)^2}\qquad(i=\overline{1,n});$$

$$P_{\text{обс}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(\lambda+\mu_i)(4\lambda^2+3\lambda\mu_i+\mu_i^2)}{\mu_i(2\lambda+\mu_i)^2}\right)^{-1},\ p_1=\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{\mu_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(\lambda+\mu_i)(4\lambda^2+3\lambda\mu_i+\mu_i^2)}{\mu_i(2\lambda+\mu_i)^2}},$$

$$p_0=1-p_1;\qquad p_{1i}=\frac{\lambda\alpha_i}{\mu_i\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k(\lambda+\mu_k)(4\lambda^2+3\lambda\mu_k+\mu_k^2)}{\mu_k(2\lambda+\mu_k)^2}}\quad(i=\overline{1,n}).$$

Приклад 2.2. *Час T_λ розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром λ, потоки обслуговувань регулярні ($T_{\mu_i}=T_i=const,\ i=\overline{1,n}$).*

$$S_{q_i}=e^{-\lambda T_i}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{(\lambda T_i)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(\lambda T_i)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)=\frac{1}{4}\big(3+2\lambda T_i+e^{-2\lambda T_i}\big)\quad(i=\overline{1,n});$$

$$P_{\text{обс}}=\frac{4}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\big(3+2\lambda T_i+e^{-2\lambda T_i}\big)},\qquad p_1=\frac{2\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iT_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\big(3+2\lambda T_i+e^{-2\lambda T_i}\big)},$$
$$p_0=1-p_1;\qquad p_{1i}=\frac{2\lambda\alpha_iT_i}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\big(3+2\lambda T_k+e^{-2\lambda T_k}\big)}\quad(i=\overline{1,n}).$$

Приклад 2.3. *Потік замовлень регулярний ($T_\lambda=T=const$), потоки обслуговувань найпростіші ($T_{\mu_i}=1/\mu_i,\ i=\overline{1,n}$).*

$$S_{q_i}=\sum_{k=1}^{\infty}k\big(e^{-(k-1)\mu_iT}-e^{-k\mu_iT}\big)=\frac{1}{1-e^{-\mu_iT}}\qquad(i=\overline{1,n});$$

$$P_{\text{обс}}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{1-e^{-\mu_iT}}};\qquad p_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{\mu_i}}{T\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{1-e^{-\mu_iT}}},\qquad p_0=1-p_1;$$
$$p_{1i}=\frac{\alpha_i}{\mu_iT\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k}{1-e^{-\mu_kT}}}\qquad(i=\overline{1,n}).$$

3. Одноканальна СМО з обмеженою кількістю місць у черзі. Розглянемо СМО M/G/1/m з найпростішим потоком замовлень ($M(T_\lambda)=m_\lambda=1/\lambda$), в якій кількість місць у черзі не може перевищувати числа m. Як і раніше, розрізнятимемо n типів замовлень з часом обслуговування, який дорівнює відповідно T_{μ_i} $(i=\overline{1,n})$ для замовлення i-го типу; α_i $(i=\overline{1,n})$ — ймовірність того, що замовлення, яке надійшло на обслуговування, є замовленням i-го типу. Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, і випадкові величини T_{μ_i} $(i=\overline{1,n})$ мають скінченні математичні сподівання $m_{\mu_i}=M(T_{\mu_i})$ $(i=\overline{1,n})$.

Введемо нумерацію станів системи: станові s_i $(i=\overline{0,\,m+1})$ відповідає наявність у системі i замовлень.

Нехай N_k — кількість замовлень, які залишаються в системі в той момент, коли k-е обслужене замовлення, завершивши обслуговування, покидає систему. Тоді подія $\{N_k=j\}$ означає, що k-е обслужене замовлення, покидаючи систему, миттєво переводить її до стану s_j. За формулою повної ймовірності $P\{N_k=\ j\}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i P\{N_{ki}=j\}$, де N_{ki} – кількість замовлень, які перебувають у системі в той момент, коли k-е обслужене замовлення, яке є замовленням i-го типу, завершивши обслуговування, покидає систему.

Знову, використовуючи формулу повної ймовірності, можемо записати

$$\begin{gathered}P\{N_{k+1,\,i}=j\}=\sum_{s=0}^{m}P\{N_{k+1,\,i}=j\,|\,N_k=s\}P\{N_k=s\},\\ j=\overline{0,\,m-1};\quad k=1,\,2,\ldots;\quad i=\overline{1,\,n}.\end{gathered}\tag{7}$$

Перехідні ймовірності $P\{N_{k+1,\,i}=j\,|\,N_k=s\}$ не залежать від номера обслуженого замовлення k, а визначаються з врахуванням кількості замовлень, які надходять у систему за час обслуговування одного замовлення i-го типу T_{μ_i}

$$p_{jsi}=P\{N_{k+1,\,i}=j\,|\,N_k=s\}=\begin{cases}\pi_{ji}, & s=0;\\ \pi_{j-s+1,\,i}, & s=\overline{1,\,j+1};\\ 0, & s>j+1,\end{cases}$$

де π_{ji} — ймовірність того, що в найпростішому потоці інтенсивності λ за час T_{μ_i} відбудеться j подій. Якщо T_{μ_i} — неперервна випадкова величина, то

$$\pi_{ji}=\int\limits_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}p_i(t)\,dt\qquad(j=\overline{0,\,m},\quad i=\overline{1,\,n}).$$

Тут $p_i(t)$ — щільність розподілу ймовірностей випадкової величини T_{μ_i}.

Для СМО M/G/1/m з однотипними замовленнями існування граничного стаціонарного процесу випливає з ергодичної теореми для однорідного ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів (див. [7, с. 61] або [8, с. 67]). Оскільки час обслуговування одного замовлення має довільний розподіл, то моменти зміни станів процесу, що описує еволюцію системи, вибирають так, щоб цей процес володів марковською властивістю. Для цього достатньо за моменти зміни станів вибрати саме ті моменти, коли чергове обслужене замовлення покидає систему, а в саму множину станів включити всілякі можливі значення числа j ($j = \overline{0,\, m}$) — кількості замовлень, що залишаються в системі в момент завершення обслуговування замовлення [2, с. 98]. Для системи з неоднорідними замовленнями однорідність аналогічно побудованого ланцюга Маркова збережеться, оскільки перехідні ймовірності для нього, використавши формулу повної ймовірності, можна записати у вигляді

$$p_{js} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_{jsi} \qquad (j,\, s = \overline{0,\, m}\,).$$

Отже, існують границі

$$\Pi_{ji} = \lim_{k\to\infty} P\{\, N_{k,\,i} = j\,\}, \quad \Pi^*_{ji} = \lim_{k\to\infty} P\{\, N_k = j\,\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi_{ji} \quad (\,j = \overline{0,\, m}\,),$$

і для граничного стаціонарного процесу обслуговування співвідношення (7) набувають вигляду

$$\Pi_{ji} = \pi_{ji}\, \Pi^*_0 + \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k+1,\,i}\, \Pi^*_k + \pi_{0i}\, \Pi^*_{j+1} \quad (\,j = \overline{0,\, m-1}\,, \quad i = \overline{1,\, n}\,). \tag{8}$$

Просумуємо рівняння (8) за i, домноживши кожне i-е рівняння на α_i ($i = \overline{1,\, n}\,$). Матимемо

$$\Pi^*_j = \pi_j\, \Pi^*_0 + \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k+1}\, \Pi^*_k + \pi_0\, \Pi^*_{j+1} \qquad (\,j = \overline{0,\, m-1}\,),$$

де $\pi_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_{ji}$ ($j = \overline{0,\, m-1}\,$). Звідси отримаємо рекурентні співвідношення, які дають змогу послідовно визначати Π^*_j — стаціонарні ймовірності події $\{$обслужене замовлення, покидаючи систему, миттєво переводить її до стану $s_j\,\}$

$$\Pi^*_{j+1} = \pi_0^{-1}\left(\Pi^*_j - \pi_j\, \Pi^*_0 - \sum_{k=1}^{j} \pi_{j-k+1}\, \Pi^*_k\right) \qquad (\,j = \overline{0,\, m-1}\,); \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Pi^*_j = 1. \tag{10}$$

Зокрема, для $m = 1,\, 2$ з (9), (10) отримаємо

$$\Pi^*_0 = \pi_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \pi_{0i}, \qquad \Pi^*_1 = 1 - \pi_0 \qquad (\,m = 1\,);$$

$$\Pi^*_0 = \frac{\pi_0^2}{1-\pi_1}, \qquad \Pi^*_1 = \frac{\pi_0(1-\pi_0)}{1-\pi_1}, \qquad \Pi^*_2 = \frac{1-\pi_0-\pi_1}{1-\pi_1} \qquad (\,m = 2\,).$$

Для граничного стаціонарного процесу обслуговування позначимо через p_j $(j = \overline{0,\, m+1})$ ймовірність перебування системи в стані s_j. Опираючись на теорему [6, с. 187], яка поширюється на всі процеси, що відбуваються за схемою „загибелі–розмноження", і враховуючи, що потік замовлень найпростіший, можемо стверджувати, що розподіл імовірностей Π_j^* $(j = \overline{0,\, m})$ збігається з розподілом імовірностей p_j, за умови, що $j \le m$. Це означає, що для $j \le m$ імовірності p_j є розв'язками системи рівнянь (9), але без умови (10), тобто

$$p_j = c\Pi_j^* \qquad (j = \overline{0,\, m}), \tag{11}$$

де c – додатна стала, яку треба знайти.

Враховуючи, що система одноканальна, а потік замовлень найпростіший, математичне сподівання кількості зайнятих каналів (середню кількість зайнятих каналів) можемо визначити у вигляді

$$\overline{k} = 1 - p_0 = \lambda m_\mu (1 - p_{m+1}), \qquad m_\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{\mu_i},$$

звідки

$$p_{m+1} = \frac{\lambda m_\mu - (1 - p_0)}{\lambda m_\mu}. \tag{12}$$

Підставивши (11) і (12) в ліву частину рівності $\sum\limits_{j=0}^{m+1} p_j = 1$ і використавши (10), одержимо

$$c \sum_{j=0}^{m} \Pi_j^* + \frac{1}{\lambda m_\mu}(c\Pi_0^* - 1 + \lambda m_\mu) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\lambda m_\mu \sum\limits_{j=0}^{m} \Pi_j^* + \Pi_0^*} = \frac{1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}\,.$$

Отже, можемо записати остаточні формули для стаціонарного розподілу ймовірностей станів системи, а також для деяких показників ефективності цієї СМО:

$$\begin{gathered} p_j = \frac{\Pi_j^*}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*} \quad (j = \overline{0,\, m}), \quad p_{m+1} = 1 - \frac{1 - p_0}{\lambda m_\mu} = \frac{\lambda m_\mu + \Pi_0^* - 1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}; \\ P_{\text{обс}} = 1 - p_{m+1} = \frac{1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}; \qquad \overline{k} = 1 - p_0 = \frac{\lambda m_\mu}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*}, \end{gathered} \tag{13}$$

де $P_{\text{обс}}$ – стаціонарна ймовірність обслуговування для замовлення, що надійшло в систему.

Прийнявши $\alpha_j = 1$, $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1, n}\,,\ i \ne j)$, з формул (13) як частковий випадок одержимо розподіл імовірностей [6, с. 237], що відповідає граничному стаціонарному процесу для СМО M/G/1/m з однотипними замовленнями.

Використовуючи знайдені ймовірності p_j $(j = \overline{0,\, m+1})$, можна обчислити середню кількість замовлень у черзі $\overline{r} = \sum\limits_{j=2}^{m+1} (j-1)p_j$, а у випадку $m = 1$, коли $\Pi_0^* = \pi_0$

і

$$\overline{r} = p_2 = \frac{\lambda m_\mu + \pi_0 - 1}{\lambda m_\mu + \Pi_0^*} = \frac{m_\mu - \dfrac{1-\pi_0}{\lambda}}{m_\mu + \dfrac{\Pi_0^*}{\lambda}},$$

можна знайти і середній час перебування замовлення у черзі

$$\overline{t}_r = m_\mu - \frac{1-\pi_0}{\lambda}\,.$$

Приклад 3.1. *Розглянемо СМО $M/G/1/1$ з замовленнями n типів: з імовірністю α_i $(\,i=\overline{1,n},\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1\,)$ замовлення, що потрапило на обслуговування, є замовленням i-го типу, і для нього час обслуговування T_{μ_i} — випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(\,a_i,\,b_i\,)$ $(\,i=\overline{1,n}\,)$.*

Маємо

$$m_{\mu_i} = \frac{a_i+b_i}{2}, \quad m_\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i); \qquad \Pi_0^* = \pi_0 = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i},$$

$$\Pi_1^* = 1-\pi_0; \qquad p_0 = \frac{\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i}}{\dfrac{\lambda}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i)+\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i}};$$

$$p_1 = \frac{1-\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i}}{\dfrac{\lambda}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i)+\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i}};$$

$$P_{\text{обс}} = \frac{1}{\dfrac{\lambda}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i)+\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i}}; \qquad p_2 = \overline{r} = 1-P_{\text{обс}};$$

$$\overline{t}_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i) - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda b_i})}{b_i-a_i}\,.$$

Правильність отриманих у цій праці формул для ймовірностей граничного стаціонарного процесу обслуговування підтверджена результатами числових експериментів на імітаційних моделях, проведених за допомогою комп'ютерної системи GPSS World.

---

1. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания.– М., 1963.

2. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания.– М., 1982.

3. *Brockmeyer E., Halström H. L., Jensen A.* The life and works of A. K. Erlang // Danish Acad. Tech. Sci.– 1948.– Trans. 2.– P. 1–277.

4. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее применение к телефонным системам с отказами // Теория вероятн. и ее прилож.– 1957.– Т. 2.– №2.– С. 106–116.

5. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей.– М., 1983.

6. *Cooper R. B.* Introduction to queueing theory.– New York, 1981.

7. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания.– М., 1969.

8. *Жерновий Ю. В.* Марковські моделі масового обслуговування.– Львів, 2004.

INVESTIGATION OF THE STATISTICAL-EQUILIBRIUM QUEUEING PROCESS FOR SINGLE-SERVER SYSTEMS WITH DIFFERENT SERVICE TIME CUSTOMERS

Yuriy Zernovyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The statistical-equilibrium state existence conditions and probabilities distribution for the G/G/1/0 and M/G/1/m queueing systems with different service time customers are obtained.

Key words: single-server queueing systems, customers with different service time, statistical-equilibrium state, probabilities distribution.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2006

Прийнята до друку 02.11.2006