УДК 517.95

# ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

**Надія ГРИНЦІВ**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

В області з вільною межею визначено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта при старшій похідній у параболічному рівнянні зі слабким виродженням, який прямує до нуля при $t \to 0$ як степенева функція $t^{\beta}$, $0 < \beta < 1$.

*Ключові слова:* обернена задача з виродженням, вільна межа, параболічне рівняння.

Мета нашої праці – в області з невідомою рухомою частиною межі дослідити обернену задачу для параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом, який у початковий момент часу перетворюється в нуль як степенева функція $t^{\beta}, 0 < \beta < 1$. Подібну задачу в області зі сталими межами досліджено в [1]. Випадок без виродження, коли невідомий коефіцієнт строго додатний для всіх $t \in [0, T]$ в області з вільною межею, вивчено в [2]. Для кожної задачі визначено умови існування та єдиності розв'язку. Обернені задачі з виродженням для рівнянь еліптичного та гіперболічного типів в області зі сталими межами вивчали в [3, 4], а обернена задача з вільною межею для параболічного рівняння без виродження - в [5].

**1. Формулювання задачі.** В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in (0, T]$ в рівнянні

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(h(t),t)=\mu_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t)=\mu_3(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx=\mu_4(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5}$$

Вводячи нові змінні $y=\dfrac{x}{h(t)}, t=t$, зведемо задачу (1)-(5) до оберненої стосовно невідомих $(a(t),h(t),v(y,t))$, де $v(y,t)=u(yh(t),t)$, в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t):0<y<1, 0<t<T\}:$

$$v_t=\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}+\frac{b(yh(t),t)+yh'(t)}{h(t)}v_y+c(yh(t),t)v+f(yh(t),t),\qquad (y,t)\in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0)=\varphi(yh(0)),\qquad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{7}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t),\ v(1,t)=\mu_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{8}$$

$$\frac{a(t)}{h(t)}v_y(0,t)=\mu_3(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{9}$$

$$h(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{10}$$

**Означення 1.** *Розв'язком задачі (6)-(10) назвемо трійку функцій* $(a(t),h(t),v(y,t))$ $\in C[0,T]\times C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, *де* $a(t)>0, t\in(0,T]$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0}a(t)t^{-\beta}>0,\ 0<\beta<1,\ h(t)>0, t\in[0,T]$, *що задовольняє умови (6)-(10).*

**2. Існування розв'язку задачі (6)-(10).**

**Теорема 1.** *Припустимо, що виконуються умови:*

*A1)* $\varphi\in C[0,\infty)$, $\varphi(x)\geqslant\varphi_0>0,\ x\in[0,\infty)$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $\mu_i(t)>0$, $t\in[0,T],\ i=1,2,4$, $b,c,f\in C([0,\infty)\times[0,T])$, $f(x,t)\geqslant 0,\ (x,t)\in[0,\infty)\times$ $\times[0,T]$, $\mu_3\in C[0,T]$, $\mu_3(t)>0,\ t\in(0,T]$, $\exists\lim\limits_{t\to+0}\mu_3(t)t^{-\beta}=M>0;$

*A2)* $\varphi \in C^1[0,h_0]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $b \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $f, c \in H^{\alpha,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $\alpha \in (0,1)$,

*де* $h_0 = h(0)$ *– розв'язок рівняння* $\int\limits_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_4(0)$,

$H_1 = C_1 \max\limits_{[0,T]} \mu_4(t) \left( \min\{ \min\limits_{[0,h_0]} \varphi(x), \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t), \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t) \} \right)^{-1}, C_1 = const > 0;$

*A3)* $\varphi(0) = \mu_1(0),\ \varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

*Тоді можна зазначити таке число* $T_0 :\ 0 < T_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(10) існує при* $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T_0$.

*Доведення.* Згідно з умовою (A1) теореми та умовами (2), (5), існує єдине значення $h(0) = h_0 > 0$, яке задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Використовуючи принцип максимуму [6, с.25] для розв'язку задачі (6)-(8), отримуємо

$$v(y,t) \geqslant C_1 \min\{ \min_{[0,h_0]} \varphi(x), \min_{[0,T]} \mu_1(t), \min_{[0,T]} \mu_2(t) \} \equiv M_0 > 0, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

звідки з врахуванням (10) матимемо

$$h(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)}{M_0} \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T].$$

Оцінимо функцію $v(y,t)$ зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y,t) \leqslant C_2 \max\{ \max_{[0,h_0]} \varphi(x), \max_{[0,T]} \mu_1(t), \max_{[0,T]} \mu_2(t), \max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t) \} \equiv$$
$$\equiv M_1 < \infty,\ (y,t) \in \overline{Q}_T$$

і згідно з (10) маємо

$$h(t) \geqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_4(t)}{M_1} \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,T].$$

Отож,

$$0 < M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1 < \infty, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{11}$$

$$0 < H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Позначимо $\omega(y,t) = v_y(y,t)$, $p(t) = h'(t)$. Пряма задача (6)-(8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t), h(t), p(t)$ еквівалентна такій системі інтегральних рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{13}$$

$$\omega(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\eta h(\tau),\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{14}$$

де

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0)d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau, \tag{15}$$

$$v_{0y}(y,t) = h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau, \tag{16}$$

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big) + (-1)^k \exp\Big(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Big), \qquad \theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau, \qquad k = 1,2.$$

Зрозуміло, що $G_k(y,t,\eta,\tau), k = 1,2$ – функція Гріна відповідно першої та другої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}.$$

З умови (9) знаходимо

$$a(t)\omega(0,t) = \mu_3(t)h(t), \qquad t \in [0,T], \tag{17}$$

а з умови (10)

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \qquad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Продиференціюємо умову (10) за часом. Враховуючи умови теореми, з одержаної рівності отримуємо

$$p(t) = \left(\mu_4'(t) - \frac{a(t)}{h(t)}(\omega(1,t)-\omega(0,t)) + b(0,t)\mu_1(t) - b(h(t),t)\mu_2(t) + \int\limits_0^1 b_y(yh(t),t) \times \right.$$
$$\left. \times v(y,t)dy - h(t)\int\limits_0^1 (c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t))dy\right)\mu_2^{-1}(t),\ t \in [0,T]. \tag{19}$$

Отож, задачу (6)-(10) зведено до системи рівнянь (13), (14), (17)-(19) з невідомими $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t))$. Задача (6)-(10) та згадана система еквівалентні в тому сенсі: якщо трійка функцій $(a(t), h(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10) у сенсі наведеного вище означення, то $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t))$ — неперервний розв'язок системи (13), (14), (17)-(19). Правильним є і обернене твердження: якщо $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t))$ — неперервний розв'язок системи (13), (14), (17)-(19), то функції $(a(t), h(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10). Для цього достатньо довести, що ці функції належать класу $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і задовольняють умови (6)-(10).

Отже, нехай $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t)) \in (C[0,T])^3 \times (C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (13), (14), (17)-(19). Припущення теореми дають змогу продиференціювати рівність (13) за $y$. Праві частини отриманої рівності і рівності (14) збігаються, тому $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. На підставі (13) робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість, задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yp(t)}{h(t)}v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t) \tag{20}$$

й умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t), h(t), p(t)$.

Оскільки $v(y,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і $\mu_4(t) \in C^1[0,T]$, то $h(t) \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо рівність (18) за $t$, використовуючи рівняння (20). Одержимо

$$p(t)\left(\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h(t)}\right) = \mu_4'(t) - \frac{a(t)(v_y(1,t)-v_y(0,t))}{h(t)} - b(h(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) +$$
$$+ \int\limits_0^1 b_y(yh(t),t)v(y,t)dy - h(t)\int\limits_0^1 (c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t))dy - \frac{h'(t)\mu_4(t)}{h(t)}.$$

Віднімаючи від останньої рівності рівність (19), отримаємо

$$\frac{\mu_4(t)}{h(t)}(p(t)-h'(t))=0,$$

звідки, враховуючи умови теореми, маємо $h'(t)=p(t)$. Використовуючи це в рівнянні (20), приходимо до рівняння (6). Умова (17) еквівалентна умові (9), умова (18) — умові (10).

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (13), (14), (17)-(19) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків системи.

Розглянемо рівняння (14). Оскільки $\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta=1$, то згідно з умовою (A2) теореми матимемо додатність першого доданка (16), всі інші доданки (14) та (16) при $t\to 0$ прямують до нуля. Отож, існує таке число $t_1 : 0<t_1\leqslant T$, яке визначається нерівністю

$$\frac{h_0}{2}\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta \geqslant \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau.$$

Тоді з (14) отримуємо оцінку $\omega(y,t)$ знизу

$$\omega(y,t)\geqslant\frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\equiv M_2>0,\qquad t\in[0,t_1]. \tag{21}$$

З (17), враховуючи (12) та умову (A1) теореми, знаходимо

$$a(t)\leqslant\frac{H_1\mu_3(t)}{M_2}\leqslant A_1t^{\beta},\qquad A_1>0,\qquad t\in[0,t_1]. \tag{22}$$

Позначимо $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$. Використовуючи рівняння (19), отримуємо

$$|p(t)|\leqslant C_3+C_4a(t)W(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{23}$$

Враховуючи (23) та оцінки функції Гріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau)\leqslant C_5\bigg(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\bigg),\qquad \int\limits_0^1|G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta\leqslant\frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

з (14) та (16), одержуємо

$$W(t) \leqslant C_7 + C_8 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_9 \int_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau + C_{10} \int_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau. \quad (24)$$

Враховуючи нерівність

$$\frac{1}{a(t)} \leqslant \frac{W(t)}{\mu_3(t)},$$

для першого інтеграла правої частини нерівності (24) отримаємо

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \int_0^t \frac{a(\tau)W(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Аналогічно

$$\int_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \int_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Позначимо $W_1(t) = W(t) + 1$. Тоді нерівність (24) можна переписати у вигляді

$$W_1(t) \leqslant C_{11} + C_{12} \int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (25)$$

Піднесемо обидві частини нерівності (25) до квадрата, використовуючи нерівності Коші та Коші-Буняковського

$$W_1^2(t) \leqslant 2C_{11}^2 + 2C_{12}^2 \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \int_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \quad (26)$$

Розглянемо інтеграл $J_1 = \int_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\mu_3^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$. Враховуючи (22) та вигляд функції $\theta(t)$, знаходимо

$$\theta(t) \leqslant \frac{A_1}{H_0^2(1+\beta)} t^{1+\beta}$$

або

$$t \geqslant (\theta(t))^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\frac{H_0^2(1+\beta)}{A_1}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Тоді, використовуючи умову (A1) теореми і оцінку (22), одержуємо

$$J_1 \leqslant C_{13} \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\tau^\beta \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leqslant \int_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\theta(\tau)^{\frac{\beta}{1+\beta}} \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Після заміни змінних $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$ отримуємо

$$J_1 \leqslant C_{14}(\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(1+\beta)}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z^{\frac{\beta}{1+\beta}}\sqrt{1-z}} \leqslant C_{15}. \tag{27}$$

Враховуючи (27) в нерівності (26), знаходимо

$$W_1^2(t) \leqslant C_{16} + C_{17} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

В останній нерівності змінимо $t$ на $\sigma$ і, домноживши на $\dfrac{a(\sigma)}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$, проінтегруємо її по $\sigma$ від 0 до $t$. Використовуючи (27) та рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

з отриманої нерівності матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)}{\mu_3(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}d\sigma \leqslant C_{18} + C_{19}\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau.$$

Підставляючи останню нерівність в (25), одержуємо

$$W_1(t) \leqslant C_{20} + C_{21}\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau.$$

Позначимо $H(t) = C_{20} + C_{21}\displaystyle\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau$. Тоді

$$H'(t) = C_{21}\frac{W_1^4(t)}{t^\beta} \leqslant C_{21}\frac{H^4(t)}{t^\beta}.$$

Проінтегрувавши, з цієї нерівності знаходимо

$$H(t) \leqslant \frac{C_{20}\sqrt[3]{(1-\beta)}}{\sqrt[3]{1-\beta-3C_{20}^3C_{21}t^{1-\beta}}} \leqslant M_3, \qquad t\in[0,t_2],$$

де число $t_2 : 0 < t_2 \leqslant T$ задовольняє умову

$$1-\beta-3C_{20}^3C_{21}t_2^{1-\beta} > 0.$$

Повертаючись до введених позначень, отримуємо

$$|\omega(y,t)| \leqslant M_3, \qquad t \in [0,t_2], \; y \in [0,1]. \tag{28}$$

Остання нерівність дає змогу оцінити $a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{H_0\mu_3(t)}{M_3} \geqslant A_0 t^{\beta}, \qquad A_0 > 0, \quad t \in [0,t_2]. \tag{29}$$

Використовуючи (28), (29), з (23), одержуємо

$$|p(t)| \leqslant M_4, \qquad t \in [0,t_2]. \tag{30}$$

Отож, оцінки розв'язків системи (13), (14), (17)-(19) з'ясовано.

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{a(t)}{t^{\beta}} > 0$. З умов теореми випливає, що

$$\lim_{t\to+0} v_y(0,t) = \lim_{t\to+0} h_0 \int\limits_0^1 G_2(0,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta = h_0\varphi'(0).$$

Тоді

$$\lim_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^{\beta}} = \lim_{t\to+0}\frac{\mu_3(t)h(t)}{t^{\beta}v_y(0,t)} = \frac{M}{\varphi'(0)} > 0.$$

Подамо систему (13), (14), (17)-(19) у вигляді операторного рівняння $w = Pw$, де $w = (a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (13), (14), (17)-(19). Через $N$ позначимо множину $N = \{(a(t),h(t),p(t),v(y,t),\omega(y,t)) \in (C[0,T_0])^3 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : 0 < A_0 \leqslant \dfrac{a(t)}{t^{\beta}} \leqslant A_1 < \infty, 0 < H_0 \leqslant h(t) \leqslant H_1 < \infty, |p(t)| \leqslant M_4 < \infty, 0 < M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1 < \infty, |\omega(y,t)| \leqslant M_3 < \infty\}$, де $T_0 = \min\{t_1,t_2\}$. Визначені оцінки дають право стверджувати, що множина $N$ опукла і замкнена, а оператор $P$ переводить її в себе. Те, що оператор $P$ цілком неперервний, доводиться аналогічно як в [1] і [7]. Тоді згідно з теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (13), (14), (17)-(19), а, отже, і розв'язок задачі (6)-(10) при $t \in [0,T_0], \; y \in [0,1]$.

**3. Єдиність розв'язку задачі (6)-(10).**

**Теорема 2.** *Припустимо, що виконуються умови:*

*B1)* $b,c,f \in C^{1.0}([0,\infty)\times[0,T]), \; \varphi \in C^2[0,h_0], \; \mu_i \in C^1[0,T], \; i=1,2;$

*B2)* $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0, \quad x \in [0,\infty), \quad \mu_4(t) > 0, \quad t \in [0,T];$

*B3)* $\mu_2(t) \neq 0, \; t \in [0,T], \quad \dfrac{\mu_3(t)}{t^{\beta}} \neq 0, \; t \in [0,T].$

*Тоді розв'язок задачі (6)-(10) єдиний.*

*Доведення.* Припустимо, що існує два розв'язки $(a_i(t),h_i(t),v_i(y,t)), \; i=1,2$ задачі (6)-(10). Позначимо

$$r_i(t) = \frac{a_i(t)}{h_i^2(t)}, \; q_i(t) = \frac{h_i'(t)}{h_i(t)}, \quad i=1,2, \tag{31}$$

$$r(t)=r_1(t)-r_2(t),\ q(t)=q_1(t)-q_2(t),\ v(y,t)=v_1(y,t)-v_2(y,t). \tag{32}$$

Зазначені різниці задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t \ &= \ r_2(t)v_{yy}+\left(\frac{b(yh_2(t),t)}{h_2(t)}+yq_2(t)\right)v_y+c(yh_2(t),t)v+r(t)v_{1yy}+ \\ &+\left(\frac{b(yh_1(t),t)-b(yh_2(t),t)}{h_1(t)}+b(yh_2(t),t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)+yq(t)\right)v_{1y}+ \\ &+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))v_1+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t),\ (y,t)\in Q_T \end{aligned} \tag{33}$$

та умови

$$v(y,0)=0,\ y\in[0,1],\quad v(0,t)=v(1,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{34}$$

$$r(t)v_{1y}(0,t)+r_2(t)v_y(0,t)=\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right),\qquad t\in[0,T], \tag{35}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right),\qquad t\in[0,T]. \tag{36}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t=\frac{a_2(t)}{h_2^2(t)}v_{yy}+\left(\frac{b(yh_2(t),y)}{h_2(t)}+yq_2(t)\right)v_y+c(yh_2(t),t)v$$

розв'язок задачі (33), (34) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} v(y,t) \ &= \ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(r(\tau)v_{1\eta\eta}+\Bigg(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)-b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}+b(\eta h_2(\tau),\tau)\times \\ &\times\left(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\right)+\eta q(\tau)\Bigg)v_{1\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1+ \\ &+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{37}$$

Позначимо $\omega_i(y,t)=v_{iy}(y,t),\ i=1,2,\quad \omega(y,t)=v_y(y,t)$. Продиференціювавши (37) за $y$, отримаємо

$$\begin{aligned} \omega(y,t) \ &= \ \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(r(\tau)v_{1\eta\eta}+\Bigg(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)-b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}+b(\eta h_2(\tau),\tau)\times \\ &\times\left(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\right)+\eta q(\tau)\Bigg)v_{1\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1+ \\ &+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg)d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{38}$$

Знайдемо оцінку функції $v_{1yy}(y,t)$. Позначимо через $G_k^{(1)}(y,t,\eta,\tau),\ k=1,2$ функції Гріна для рівняння

$$v_{1t}=\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}v_{1yy}$$

з крайовими умовами відповідно першого та другого роду. Тоді розв'язок $v_1(y,t)$ задачі (6)-(8) подамо у вигляді (15). Використовуючи властивості функції Гріна, знаходимо

$$\begin{aligned} v_{1yy}(y,t) \;=\; & h_0^2\int_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,0)\,\varphi''(\eta h_0)d\eta+\int_0^t G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)\left(\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)-\right.\\ & \left.-\frac{b(0,\tau)}{h_1(\tau)}\omega_1(0,\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau)\right)d\tau-\int_0^t G_{1\eta}^{(1)}(y,t,1,\tau)\left(\mu_2'(\tau)-\right.\\ & \left.-f(h_1(\tau),\tau)-\frac{b(h_1(\tau),\tau)+p_1(\tau)}{h_1(\tau)}\omega_1(1,\tau)-c(h_1(\tau),\tau)\mu_2(\tau)\right)d\tau-\\ & -\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\left(h_1(\tau)f_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)+\frac{h_1(\tau)b_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)+p_1(\tau)}{h_1(\tau)}\times\right.\\ & \left.\times\omega_1(\eta,\tau)+h_1(\tau)c_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)v_1(\eta,\tau)+c(\eta h_1(\tau),\tau)\omega_1(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau-\\ & -\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}+\frac{\eta p_1(\tau)}{h_1(\tau)}\right)v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau=\sum_{i=1}^4 I_i-\\ & -\int_0^t\int_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\,\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)+\eta p_1(\tau)}{h_1(\tau)}v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau,\ (y,t)\in Q_T. \end{aligned} \tag{39}$$

Оцінимо кожен з доданків інтегрального рівняння (39). Оскільки $G_1^{(1)}(y,t,\eta,0)<$ $<G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)$, то для $I_1$ отримуємо

$$|I_1|\leqslant h_0^2\max_{y\in[0,1]}|\varphi''(yh_0)|\int_0^1 G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)d\eta\leqslant C_{22}.$$

Оцінимо $I_2$, використовуючи вигляд функції $G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)$

$$|I_2|\leqslant C_{23}\int_0^t|G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)|d\tau\leqslant C_{24}t^{-\frac{3\beta+1}{2}}\int_0^1 z^{-\frac{2}{3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y+2n|\exp\left(-\frac{C_{25}(y+2n)^2}{t^{1+\beta}z}\right)dz.$$

Після заміни змінних $\sigma=\sqrt{\dfrac{C_{25}}{t^{1+\beta}z}}(y+2n)$, використовуючи вигляд інтеграла ймовірності та його властивості, отримуємо

$$|I_2| \leqslant \frac{C_{26}}{t^\beta}.$$

Аналогічно $|I_3| \leqslant \dfrac{C_{27}}{t^\beta}$. Для $I_4$ запишемо

$$|I_4| \leqslant C_{28} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)| d\eta d\tau \leqslant C_{29} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} \leqslant C_{30} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{31} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^4 |I_i| \leqslant \frac{C_{32}}{t^\beta}. \tag{40}$$

З оцінки для $I_4$ випливає, що ядро інтегрального рівняння (39) має інтегровну особливість. Тоді, враховуючи (40), отримуємо таку оцінку для функції $v_{1yy}(y,t)$

$$|v_{1yy}(y,t)| \leqslant \frac{C_{33}}{t^\beta}. \tag{41}$$

Згідно з умовою $(B3)$ теореми $v_{1y}(0,t) \neq 0,\ t \in [0,T]$. Тоді з умови (35) знаходимо

$$r(t) v_{1y}(0,t) = -r_2(t) v_y(0,t) + \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad t \in [0,T]. \tag{42}$$

Оскільки $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t)),\quad i=1,2$ – розв'язки задачі (6)-(10), то для $q_i(t),\ i=1,2$ правильні рівності

$$q_i(t)\mu_2(t) = \frac{\mu_4'(t)}{h_i(t)} - r_i(t)(\omega_i(1,t)-\omega_i(0,t)) - \frac{1}{h_i(t)} \int\limits_0^1 b(yh_i(t),t)\omega_i(y,t)dy - \int\limits_0^1 (c(yh_i(t),t)\times$$

$$\times v_i(y,t) + f(yh_i(t),t))dy,\ i=1,2.$$

Віднявши їх, приходимо до рівняння

$$\begin{aligned}\mu_2(t)q(t) \quad = \quad & \mu_4'(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)-r(t)(\omega_1(1,t)-\omega_1(0,t))-r_2(t)(\omega(1,t)-\omega(0,t))- \\ & -\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)\int\limits_0^1 b(yh_1(t),t)\omega_1(y,t)dy-\frac{1}{h_2(t)}\int\limits_0^1\Big((b(yh_1(t),t)- \\ & -b(yh_2(t),t))\omega_1(y,t)+b(yh_2(t),t)\omega(y,t)\Big)dy-\int\limits_0^1((c(yh_1(t),t)- \\ & -c(yh_2(t),t))v_1(y,t)+c(yh_2(t),t)v(y,t))dy+\int\limits_0^1(f(yh_1(t),t)- \\ & -f(yh_2(t),t))dy, \quad t\in[0,T]. \qquad (43)\end{aligned}$$

Виразимо $h_i(t),\ i=1,2$ через $q_i(t),\ i=1,2$. Для цього скористаємося позначенням (31)

$$h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int\limits_0^t q_i(\tau)d\tau\right), \qquad i=1,2.$$

Згідно з умовою $(B2)$ теореми $h_1(0)=h_2(0)=h_0$. Тоді, використовуючи рівність

$$e^x-e^y=(x-y)\int\limits_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримуємо

$$h_1(t)-h_2(t)=h_0\int\limits_0^1 q(\tau)d\tau\int\limits_0^1\exp\left(\int\limits_0^t(\sigma q(\tau)+q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \qquad (44)$$

$$\frac{1}{h_1^k(t)}-\frac{1}{h_2^k(t)}=-\frac{k}{h_0^k}\int\limits_0^1 q(\tau)d\tau\int\limits_0^1\exp\left(-k\int\limits_0^t(\sigma q(\tau)+q_2(\tau))d\tau\right)d\sigma, \quad k=1,2. \qquad (45)$$

Припущення $(B1)$ теореми забезпечує правильність перетворення

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma. \qquad (46)$$

Аналогічні перетворення виконуються для функцій $b(y,t)$ та $c(y,t)$.

Підставивши (37), (38), (44)-(46) в (42), (43), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $r(t), q(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З єдиності розв'язку таких систем одержуємо

$$r(t) \equiv 0, \quad q(t) \equiv 0, \ t \in [0, T],$$

або згідно з (31), (32)

$$a_1(t) \equiv a_2(t), \quad h_1(t) \equiv h_2(t), \quad t \in [0, T].$$

Використовуючи це в задачі (33), (34), знаходимо

$$v_1(y,t) \equiv v_2(y,t), \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

що й завершує доведення теореми.

1. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.– мат.– 2005.– Вип. 64.– С. 245-257.

2. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн.– 2003.– 55, №7.– С. 901-910.

3. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функц. анал. в уравнениях мат. физ.– Новосибирск, 1987.– С. 66-71.

4. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.– 1987.– №3.– С. 27-29.

5. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems.– 2001.– Vol. 9, №6.– P. 1-27.

6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М., 1967.

7. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type.– Lviv: VNTL Publishers, 2003.

# AN INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

**Nadiya Hryntsiv**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

In a free boundary domain we establish conditions of the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the higher-order derivative which vanishes at the initial moment as a power $t^{\beta}, 0 < \beta < 1$.

*Key words:* inverse problem with degeneration, free bondary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 19.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006