УДК 539.377

ПРО ОДНУ ОСЬОСИМЕТРИЧНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРА

Микола БУГРІЙ

Львівський національний унівеситет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Сформульовано математичне формулювання й описано схему розв'язування однієї динамічної задачі оптимізації термопружного стану товстостінного циліндра при його нестаціонарному силовому навантаженні та нагріві. За критерій оптимізації прийнято функціонал Лагранжа, а функції керування – інтенсивність поверхневого силового навантаження і температура. Функції керування задовольняють додаткові інтегральні умови моментного типу.

Ключові слова: товстостінний циліндр, динамічна задача оптимізації.

Сформульовано математичне формулювання й описано схему розв'язування однієї задачі оптимізації динамічної поведінки термопружного товстостінного циліндра, який знаходиться під дією нормального поверхневого силового навантаження та нестаціонарного нагріву, які за певних умов викликають оптимально низький рівень термопружного стану циліндра з врахуванням інерційності деформаційних форм руху. Задачі оптимізації такого типу в квазістатичному формулюванні розглянуто раніше [1 – 4].

Розглянемо вільний на краях ізотропний пустотілий циліндр сталої товщини $2h$, радіусом серединної поверхні R, довжиною $2z_0$. Віднесемо циліндр до просторової системи координат (z, φ, γ), нормально пов'язаної з його серединною поверхнею (S_0). Це означає, що недеформована поверхня (S_0) віднесена до ліній головних кривин, тобто координатні лінії z і φ збігаються з лініями головних кривин циліндричної поверхні (S_0) (координата z – це відстань точки вздовж твірної від початкового центрального поперечного перерізу $z = 0$; φ – кут між початковою і довільною меридіанною площинами), а координатні лінії γ направлені вздовж нормалей до поверхні

(S_0) (координата γ – це відстань від точки до поверхні (S_0)). Така система координат називається змішаною [5]. Надалі всі співвідношення термопружності, потрібні для математичного формулювання і опису схеми розв'язування задачі оптимізації запишемо в змішаній системі координат (z, φ, γ).

Нехай циліндр перебуває під дією нестаціонарних осьосиметричного температурного поля $t(z, \gamma, \tau)$ і зовнішнього нормального поверхневого силового навантаження

$$f(z,\gamma,\tau) = \begin{cases} f_{3\gamma}^{(+)}(z,\tau), & (\gamma = h, \ -z_0 < z < z_0, \ 0 < \tau < \tau_0), \\ f_{3\gamma}^{(-)}(z,\tau), & (\gamma = -h, \ -z_0 < z < z_0, \ 0 < \tau < \tau_0), \end{cases} \tag{1}$$

прикладеного на бічних поверхнях циліндра $\gamma = \pm h$. Тут $\tau \in [0, \tau_0]$ – часова координата.

У цьому випадку базові співвідношення для визначення осьосиметричного термопружного стану циліндра, записані через відмінні від нуля компоненти вектора переміщень $\vec{u}(z, \gamma, \tau)$ та температуру $t(z, \gamma, \tau)$ з врахуванням відповідних системі координат (z, φ, γ) значень коефіцієнтів першої квадратичної форми серединної поверхні (S_0), її головних кривин, а також коефіцієнтів Ляме [5, 6], охоплюватимуть:

співвідношення Коші

$$e_{zz}(z,\gamma,\tau) = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \ e_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau) = \frac{u_\gamma}{R+\gamma}, \ e_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau) = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$
$$e_{z\gamma}(z,\gamma,\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right), \ e_{z\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0, \ e_{\gamma\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0; \tag{2}$$

закон Гука

$$\sigma_{zz}(z,\gamma,\tau) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau) = G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right] - \frac{\alpha_t E}{1-2\nu}t,$$
$$\sigma_{\gamma z}(z,\gamma,\tau) = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right), \ \sigma_{\gamma\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0, \ \sigma_{z\varphi}(z,\gamma,\tau) \equiv 0; \tag{3}$$

рівняння руху

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma} + \frac{u_z}{R+\gamma}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{u_z}{(R+\gamma)^2}\right] = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\rho(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} - F_z\right),$$
$$\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \gamma} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right) =$$
$$= \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial t}{\partial \gamma} + \frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \tau^2} - F_\gamma\right) \tag{4}$$

та рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2}+\frac{1}{(R+\gamma)}\frac{\partial t}{\partial \gamma}+\frac{Q}{\lambda}=\frac{1}{a_0}\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{5}$$

в області $(\Omega)=\{(z,\gamma,\tau): -z_0<z<z_0,\ -h<\gamma<h,\ 0<\tau<\tau_0\}$, такі механічні

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial \gamma}+\frac{u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)=\\ =\frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}t(\pm z_0,\gamma,\tau),\\ \frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial \gamma}+\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}=0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial \gamma}+\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial \gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial z}+\frac{u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{R\pm h}\right)=\\ =\frac{\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}t(z,\pm h,\tau)+\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}f_{3\gamma}^{(\mp)}(z,\tau)\end{gathered} \tag{6}$$

та теплові

$$\left[\frac{\partial t}{\partial \gamma}\pm H(t-t_\gamma^{(\pm)})\right]\Bigg|_{\gamma=\pm h}=0,\quad \left[\frac{\partial t}{\partial z}\pm H(t-t_z^{(\pm)})\right]\Bigg|_{z=\pm z_0}=0 \tag{7}$$

граничні умови на межі $\gamma=\pm h$, $z=\pm z_0$ області (Ω), а також початкові умови

$$\begin{gathered}u_z(z,\gamma,0)=0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\gamma,0)}{\partial \tau}=0,\\ u_\gamma(z,\gamma,0)=0,\ \ \frac{\partial u_\gamma(z,\gamma,0)}{\partial \tau}=0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$t(z,\gamma,0)=t_0(z,\gamma) \tag{9}$$

при $\tau=0$.

Тут G – модуль зсуву; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення; λ – коефіцієнт теплопровідності; a_0 – коефіцієнт температуропровідності; H – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні циліндра; $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$ – відмінні від нуля компоненти вектора переміщень; $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z,\tau)$ – інтенсивність зовнішнього силового навантаження відповідно на поверхнях $\gamma=\pm h$ циліндра; $F_z(z,\gamma,\tau), F_\gamma(z,\gamma,\tau)$ – відмінні від нуля компоненти вектора об'ємних сил, віднесених до одиниці об'єму; $t_\gamma^{(\pm)}(z,\tau)$, $t_z^{(\pm)}(\gamma,\tau)$ – температура зовнішнього середовища на межі області (Ω); $t_0(z,\gamma)$ – початкова температура циліндра; $Q(z,\gamma,\tau)$ – питома густина розподілу внутрішніх джерел тепла в області циліндра; $e_{zz}(z,\gamma,\tau)$, $e_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau)$, $e_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau)$, $e_{z\gamma}(z,\gamma,\tau)$ і $\sigma_{zz}(z,\gamma,\tau)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma,\tau)$, $\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma,\tau)$, $\sigma_{z\gamma}(z,\gamma,\tau)$ – відмінні від нуля компоненти тензора деформацій і напружень відповідно.

Наведені співвідношення (2) – (9) допомагають однозначно [6] визначити температурне поле $t(z,\gamma,\tau)$ і відповідний термопружний стан циліндра з врахуванням інерційних ефектів деформаційних форм руху при заданих функціях $f_{3\gamma}^{(\pm)}$, F_z, F_γ, $t_\gamma^{(\pm)}$, $t_z^{(\pm)}$, t_0, Q. Якщо ці функції (або окремі з них) прийняти за функції керування термопружним станом циліндра, то ми приходимо до розгляду відповідних задач оптимізації.

Математичне формулювання задач оптимізації для термопружних (пружних) систем передбачає вибір критерію оптимізації та конкретизацію множини допустимих функцій і функцій керування [5].

За критерій оптимізації приймемо функціонал Лагранжа [7]

$$L[\vec{u},t] = 2\pi \int_0^{\tau_0}\int_{-h}^{h}\int_{-z_0}^{z_0} \left\{ \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau}\right)^2\right] - W_0(\vec{u},t)\right\}(R+\gamma)\,dz\,d\gamma\,d\tau. \qquad (10)$$

Тут

$$W_0(\vec{u},t) = \frac{1}{2E}\Big[\sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{zz}) + + 2(1+\nu)\sigma_{z\gamma}^2\Big] -$$

питома енергія пружної деформації циліндра, де σ_{is}, $(i,s = z,\varphi,\gamma)$ – відмінні від нуля компоненти симетричного тензора напружень, виражені через переміщення u_z, u_γ і температуру t за допомогою співвідношення (3).

За функції керування в задачі оптимізації приймемо інтенсивність зовнішнього силового поверхневого навантаження $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z,\tau)$ та температуру $t(z,\gamma,\tau)$.

Функції керування термопружним станом циліндра підпорядкуємо додатковим обмеженням інтегрального типу

$$\begin{gathered}
\int_0^{\tau_0}\int_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z,\tau) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau = B_{ms}^{(1)},\\
\int_0^{\tau_0}\int_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z,\tau) P_r\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi v\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau = \tilde{B}_{rv}^{(1)},\\
\int_0^{\tau_0}\int_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z,\tau) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau = B_{ny}^{(2)},\\
\int_0^{\tau_0}\int_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z,\tau) P_j\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi w\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau = \tilde{B}_{jw}^{(2)},\\
(m=\overline{0,m_0}),\ \ (s=\overline{0,s_0}),\ \ (r=\overline{0,r_0}),\ \ (v=\overline{1,v_0}),\\
(n=\overline{0,n_0}),\ \ (y=\overline{0,y_0}),\ \ (j=\overline{0,j_0}),\ \ (w=\overline{1,w_0}); \qquad (11)
\end{gathered}$$

$$\int_0^{\tau_0}\int_{-z_0}^{z_0}\int_{-h}^{h} t(z,\gamma,\tau) P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right) P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau = T_{kl\alpha}^{(1)},$$

$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h} t(z,\gamma,\tau)P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau = T^{(2)}_{iq\beta},$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0})\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}), \qquad (12)$$

де $B^{(1)}_{ms}$, $\tilde{B}^{(1)}_{rv}$, $B^{(2)}_{ny}$, $\tilde{B}^{(2)}_{jw}$, $T^{(1)}_{kl\alpha}$, $T^{(2)}_{iq\beta}$ — задані параметри; $P_v(\cdot)$ — поліноми Лежандра; числа $m_0, s_0, r_0, v_0, n_0, y_0, j_0, w_0, k_0, l_0, \alpha_0, i_0, q_0, \beta_0$ визначають кількість інтегральних обмежень (11), (12).

Зробимо декілька зауважень стосовно суті інтегральних обмежень (11), (12).

Співвідношення (11), (12) є узагальненими моментними характеристиками функцій керування $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$ та $t(z,\gamma,\tau)$. За допомогою таких співвідношень можна задати значення головного вектора та головного момента поверхневих зусиль, середнє значення температури та температурний момент тощо.

Параметри $B^{(1)}_{ms}$, $\tilde{B}^{(1)}_{rv}$, $B^{(2)}_{ny}$, $\tilde{B}^{(2)}_{jw}$, $T^{(1)}_{kl\alpha}$, $T^{(2)}_{iq\beta}$ (або частина з них) можуть бути використані для того, щоб задовольнити конкректні умови локального силового навантаження (нагріву) у фіксованих перерізах циліндра. Методику розв'язування задач такого типу для тонкостінних оболонкових конструкцій розглянуто в [5].

Якщо функції $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$ та $t(z,\gamma,\tau)$ вважати достатньо гладкими в замиканні області (Ω), то їх можна розвинути в рівномірно збіжні ряди Фур'є за ортонормованою системою поліномів Лежандра та тригонометричною системою. У цьому зв'язку довільні скінченні відрізки таких рядів будуть з певною точністю апроксимувати ці функції в замиканні області (Ω). Праві частини інтегральних обмежень (11), (12) фактично є коефіцієнтами таких рядів Фур'є для вибраних функцій керування. Якщо ці параметри визначати в процесі розв'язування задачі оптимізації, то можна отримати певні аналітичні наближені розв'язки цієї задачі.

У нашій праці праві частини інтегральних обмежень (11), (12) вважаються заданими і їхні значення використовують для обчислення сталих множників Лагранжа.

Допустимими функціями в задачі оптимізації будемо вважати функції $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $t(z,\gamma,\tau)$, двічі неперервно диференційовні в області (Ω) і неперервно диференційовні на межі цієї області та функції $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$, неперервні в замиканні області $(\Omega_1) = \{(z,\tau) : -z_0 < z < z_0,\ 0 < \tau < \tau_0\}$ за умови, що ці функції справджують рівняння руху (4), механічні граничні умови (6), початкові умови (8) та інтегральні умови (11), (12).

Тепер задачу оптимізації термопружного стану циліндра сформулюємо так: серед функцій $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $t(z,\gamma,\tau)$, двічі неперервно диференційовних в області (Ω) і неперервно диференційовних на межі цієї області та функцій $f^{(\pm)}_{3\gamma}(z,\tau)$, неперервних у замиканні області (Ω_1), знайти екстремалі функціонала (10), які задовольняють умови (4), (6), (8), (11), (12).

Задачу на умовний екстремум розв'язуємо методами варіаційного числення з використанням множників Лагранжа [8].

Відшукання оптимальних розв'язків у цьому випадку зводиться до розв'язування задачі

$$\frac{\partial^2 u^*_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial u^*_z}{\partial \gamma} + \frac{u^*_z}{R+\gamma}\right) + \right.$$

$$+\frac{u_z^*}{(R+\gamma)^2}\Bigg]=\frac{\rho(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_\gamma^*}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z\partial\gamma}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u_\gamma^*}{\partial\tau^2}; \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right)+\frac{3}{4}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_z}{\partial\gamma}+\frac{u_z}{R+\gamma}\right)+$$
$$+\frac{u_z}{(R+\gamma)^2}\Bigg]=\frac{3\rho(1+\nu)}{2E}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial\tau^2}-F_z\right)-\frac{1+\nu}{2(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)+\frac{1+\nu}{2E}\Bigg[\Phi_{kl\alpha}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)\frac{d}{dz}P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+$$
$$+\tilde{\Phi}_{iq\beta}^*P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)\frac{d}{dz}P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\Bigg],$$
$$\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial z^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial\gamma}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}\right)=$$
$$=\frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial\tau^2}-F_\gamma\right)-\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{R+\gamma}\right)+$$
$$+\frac{2(1+\nu)}{3E}\Bigg[\Phi_{kl\alpha}^*\frac{d}{d\gamma}P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+$$
$$+\tilde{\Phi}_{iq\beta}^*\frac{d}{d\gamma}P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\Bigg],$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0}),\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}); \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)=0,$$
$$\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}=0,\ \ \frac{\partial u_z^*(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*(z,\pm h,\tau)}{\partial z}=0,$$
$$u_\gamma^*(z,h,\tau)+Z_{ms}^{(1)*}P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\tilde{Z}_{rv}^{(1)*}P_r\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi v\tau}{\tau_0}\right)=0,$$
$$u_\gamma^*(z,-h,\tau)+Z_{ny}^{(2)*}P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y\tau}{\tau_0}\right)+\tilde{Z}_{jw}^{(2)*}P_j\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi w\tau}{\tau_0}\right)=0,$$
$$(m=\overline{0,m_0}),\ \ (s=\overline{0,s_0}),\ \ (r=\overline{0,r_0}),\ \ (v=\overline{1,v_0}),$$
$$(n=\overline{0,n_0}),\ \ (y=\overline{0,y_0}),\ \ (j=\overline{0,j_0}),\ \ (w=\overline{1,w_0}); \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)=$$
$$=\frac{\partial u_z^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*(\pm z_0,\gamma,\tau)}{R+\gamma}\right)+$$
$$+\frac{1+\nu}{2E}\Bigg[(\pm1)^l\Phi_{kl\alpha}^*P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+(\pm1)^q\tilde{\Phi}_{iq\beta}^*P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\Bigg],$$
$$\frac{\partial u_z(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma(\pm z_0,\gamma,\tau)}{\partial z}=0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z(z,\pm h,\tau)}{\partial z}+\frac{u_\gamma(z,\pm h,\tau)}{R\pm h}\right)=$$
$$=\frac{\partial u^*_\gamma(z,\pm h,\tau)}{\partial\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*_z(z,\pm h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,\pm h,\tau)}{R\pm h}\right)+$$
$$+\frac{1+\nu}{2E}\left[(\pm1)^k\Phi^*_{kl\alpha}P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+(\pm1)^i\tilde{\Phi}^*_{iq\beta}P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\right],$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0}),\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}); \qquad (16)$$

$$u^*_z(z,\gamma,\tau_0)=0,\ \ \frac{\partial u^*_z(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau}=\frac{\partial u_z(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau},$$
$$u^*_\gamma(z,\gamma,\tau_0)=0,\ \ \frac{\partial u^*_\gamma(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau}=\frac{\partial u_\gamma(z,\gamma,\tau_0)}{\partial\tau}; \qquad (17)$$

$$u_z(z,\gamma,0)=0,\ \ \frac{\partial u_z(z,\gamma,0)}{\partial\tau}=0,$$
$$u_\gamma(z,\gamma,0)=0,\ \ \frac{\partial u_\gamma(z,\gamma,0)}{\partial\tau}=0; \qquad (18)$$

$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,h,\tau)}{(R+h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R+h)}B^{(1)}_{ms},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,h,\tau)}{(R+h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_r\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi v\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R+h)}\tilde{B}^{(1)}_{rv},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,-h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{(R-h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi y\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R-h)}B^{(2)}_{ny},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\frac{\partial u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{\partial\gamma}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u^*_z(z,-h,\tau)}{\partial z}+\frac{u^*_\gamma(z,-h,\tau)}{(R-h)}\right)\right]\times$$
$$\times P_j\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi w\tau}{\tau_0}\right)dz\,d\tau=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)(R-h)}\tilde{B}^{(2)}_{jw},$$
$$(m=\overline{0,m_0}),\ \ (s=\overline{0,s_0}),\ \ (r=\overline{0,r_0}),\ \ (v=\overline{1,v_0}),$$
$$(n=\overline{0,n_0}),\ \ (y=\overline{0,y_0}),\ \ (j=\overline{0,j_0}),\ \ (w=\overline{1,w_0}); \qquad (19)$$

$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}-\frac{\partial u^*}{\partial z}-\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial\gamma}-\frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}+\right.$$

$$+\frac{1-2\nu}{E}\left(\Phi^*_{\omega dp}P_\omega\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_d\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi p\tau}{\tau_0}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{\Phi}^*_{f\kappa g}P_f\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_\kappa\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi g\tau}{\tau_0}\right)\right)\right]\times$$
$$\times P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau=3\alpha_t T^{(1)}_{kl\alpha},$$
$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}-\frac{\partial u^*}{\partial z}-\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial\gamma}-\frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}+\right.$$
$$+\frac{1-2\nu}{E}\left(\Phi^*_{\omega dp}P_\omega\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_d\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi p\tau}{\tau_0}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{\Phi}^*_{f\kappa g}P_f\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_\kappa\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi g\tau}{\tau_0}\right)\right)\right]\times$$
$$\times P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)(R+\gamma)\,d\gamma\,dz\,d\tau=3\alpha_t T^{(2)}_{iq\beta},$$
$$(k,\omega=\overline{0,k_0}),\ \ (l,d=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha,p=\overline{0,\alpha_0}),$$
$$(i,f=\overline{0,i_0}),\ \ (q,\kappa=\overline{0,q_0}),\ \ (g,\beta=\overline{1,\beta_0}) \tag{20}$$

стосовно модифікованих множників Лагранжа $u^*_z(z,\gamma,\tau)$, $u^*_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $Z^{(1)*}_{ms}$, $\tilde{Z}^{(1)*}_{rv}$, $Z^{(2)*}_{ny}$, $\tilde{Z}^{(2)*}_{jw}$, $\Phi^*_{kl\alpha}$, $\tilde{\Phi}^*_{iq\beta}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $(s=\overline{0,s_0})$, $(r=\overline{0,r_0})$, $(v=\overline{1,v_0})$ $(n=\overline{0,n_0})$, $(y=\overline{0,y_0})$, $(j=\overline{0,j_0})$, $(w=\overline{1,w_0})$, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$, $(\alpha=\overline{0,\alpha_0})$, $(i=\overline{0,i_0})$, $(q=\overline{0,q_0})$, $(\beta=\overline{1,\beta_0})$ та компонент вектора переміщень $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$, через які виражається температура

$$t(z,\gamma,\tau)=\frac{1}{3\alpha_t}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{R+\gamma}-\frac{\partial u^*}{\partial z}-\frac{\partial u^*_\gamma}{\partial\gamma}-\frac{u^*_\gamma}{R+\gamma}+\right.$$
$$+\frac{1-2\nu}{E}\left(\Phi^*_{kl\alpha}P_k\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha\tau}{\tau_0}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{\Phi}^*_{iq\beta}P_i\left(\frac{\gamma}{h}\right)P_q\left(\frac{z}{z_0}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta\tau}{\tau_0}\right)\right)\right],$$
$$(k=\overline{0,k_0}),\ \ (l=\overline{0,l_0}),\ \ (\alpha=\overline{0,\alpha_0}),\ \ (i=\overline{0,i_0}),\ \ (q=\overline{0,q_0}),\ \ (\beta=\overline{1,\beta_0}). \tag{21}$$

Зауважимо, що у співвідношеннях (14) – (16), (21) за індексами k, l, m, n, r, s, i, j, q, v, w, y, α, β, а у співвідношенні (20) – за індексами ω, d, p, f, κ, g, які повторюються, проводиться підсумовування.

Розв'язавши задачу (13) – (20), знайдемо функції $u^*_z(z,\gamma,\tau)$, $u^*_\gamma(z,\gamma,\tau)$, $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$. Із співвідношення (21) визначаємо температуру $t(z,\gamma,\tau)$, зі співвідношень (2), (3) – оптимальний термопружний стан циліндра, а зі співвідношення (6) – відповідне йому оптимальне поверхневе силове навантаження. Крім того, використавши співвідношення (5), (7), (9), знайдемо функції $Q(z,\gamma,\tau)$, $t^{(\pm)}_\gamma(z,\tau)$, $t^{(\pm)}_z(\gamma,\tau)$, $t_0(z,\gamma)$, які характеризують умови нагріву циліндра, відповідні оптимальному температурному полю $t(z,\gamma,\tau)$, яке визначається співвідношенням (21).

Зауважимо, що задачі (13), (15), (17) та (14), (16), (18), які залежать від сталих множників Лагранжа $Z_{ms}^{(1)*}$, $\tilde{Z}_{rv}^{(1)*}$, $Z_{ny}^{(2)*}$, $\tilde{Z}_{jw}^{(2)*}$, $\Phi_{kl\alpha}^{*}$, $\tilde{\Phi}_{iq\beta}^{*}$, як від параметрів, за своєю структурою аналогічні крайовій задачі термопружності в переміщеннях, розв'язок якої, як відомо [6], існує і він єдиний у класі гладких функцій. У цьому зв'язку при кожному фіксованому векторі цих параметрів існує єдиний розв'язок задачі оптимізації, яку розглядаємо, і цей розв'язок в такому випадку можна побудувати в замкненій формі.

Справді, врахувавши загальний вигляд правих частин системи диференціальних рівнянь (14), граничних умов (15), (16) та інтегральні умови (19), (20), розв'язок системи рівнянь (13), (14) стосовно функцій $u_z^*(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma^*(z,\gamma,\tau)$ і $u_z(z,\gamma,\tau)$, $u_\gamma(z,\gamma,\tau)$ відповідно можна знайти у вигляді таких скінченних відрізків кратних рядів Фур'є:

$$\begin{gathered}
u_z^*(z,\gamma,\tau)=\sum_{k=0}^{M}\left[\varphi_{k0}^{(1)}(\gamma)P_k\left(\frac{z}{z_0}\right)+\right.\\
\left.+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ks}^{(1)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ks}^{(1)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_k\left(\frac{z}{z_0}\right)\right],\\
u_\gamma^*(z,\gamma,\tau)=\sum_{l=0}^{M}\left[\varphi_{l0}^{(2)}(\gamma)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)+\right.\\
\left.+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ls}^{(2)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ls}^{(2)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_l\left(\frac{z}{z_0}\right)\right],
\end{gathered}\tag{22}$$

$$\begin{gathered}
u_z(z,\gamma,\tau)=\sum_{m=0}^{M}\left[\varphi_{m0}^{(3)}(\gamma)P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)+\right.\\
\left.+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ms}^{(3)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ms}^{(3)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)\right],\\
u_\gamma(z,\gamma,\tau)=\sum_{n=0}^{M}\left[\varphi_{n0}^{(4)}(\gamma)P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)+\right.\\
\left.+\sum_{s=1}^{M}\left(\varphi_{ns}^{(4)}(\gamma)\cos\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)+\psi_{ns}^{(4)}(\gamma)\sin\left(\frac{\pi s\tau}{\tau_0}\right)\right)P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\right].
\end{gathered}\tag{23}$$

Тут $\varphi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $\psi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $(w^*=\overline{1,4})$, $(y^*=k,l,m,n)$ – невідомі функції; $M=max\{m_0,n_0,l_0,q_0,s_0,r_0,j_0,v_0,w_0,y_0,\alpha_0,\beta_0\}-1$, а числа m_0, n_0, l_0, q_0, s_0, r_0, j_0 v_0, w_0, y_0, α_0, β_0 визначають кількість інтегральних обмежень (11), (12) в задачі оптимізації.

Підставляючи вирази (22), (23) в рівняння (13), (14) відповідно, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь Ейлера стосовно невідомих функцій $\varphi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $\psi_{y^*s}^{(w^*)}(\gamma)$, $(w^*=\overline{1,4})$, $(y^*=k,l,m,n)$. Набір довільних сталих, які одержуємо при розв'язуванні цієї системи, а також сукупність множників Лагранжа $Z_{ms}^{(1)*}$, $\tilde{Z}_{rv}^{(1)*}$, $Z_{ny}^{(2)*}$, $\tilde{Z}_{jw}^{(2)*}$, $\Phi_{kl\alpha}^{*}$, $\tilde{\Phi}_{iq\beta}^{*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $(s=\overline{0,s_0})$, $(r=\overline{0,r_0})$, $(v=\overline{1,v_0})$, $(n=\overline{0,n_0})$, $(y=\overline{0,y_0})$, $(j=\overline{0,j_0})$, $(w=\overline{1,w_0})$, $(k=\overline{0,k_0})$, $(l=\overline{0,l_0})$, $(\alpha=\overline{0,\alpha_0})$, $(i=\overline{0,i_0})$, $(q=\overline{0,q_0})$, $(\beta=\overline{1,\beta_0})$, дають змогу задовольнити граничні умови

(15), (16), початкові умови (17), (18), інтегральні умови (19) на бічних поверхнях циліндра, а також інтегральні умови (20) в області (Ω).

---

1. *Бурак Я.Й., Бугрій М.І.* Оптимізація напружень в пустотілому циліндрі при силовому навантаженні //Доп. НАН України.– 1997.– N9.– С. 58-61.
2. *Бугрій М.І.* Оптимізація схем силового навантаження та нагріву товстостінних термопружних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1997.– Вип. 47.– С. 102-106.
3. *Бугрій М.І.* Оптимізація осесиметричного напружено-деформованого стану товстостінних циліндричних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1996.– Вип. 45.– С. 162-168.
4. *Бугрій М.І.* Про один метод побудови оптимальних розв'язків осесиметричних задач оптимізації термопружного стану циліндричних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.– 1997.– Вип. 48.– С. 128-135.
5. *Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин.– К., 1979.
6. *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек.– К., 1978.
7. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды.– М., 1983.
8. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление.– Л., 1980.

ON AN AXIALLY-SYMMETRIC DYNAMIC PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF THE THERMOELASTIC STATE OF THICK-WALLED CYLINDER

Mykola Bugriy

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Thermoelastic state of the thick-walled cylinder at their non-stationary force loading and heating is considered. The mathematical formulation and the scheme of a solution of optimization dynamic problems are proposed. The Lagrange functional is taken as the criterion of the optimization. The intensities of forse loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. These functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type.

Key words: thick-walled cylinder, optimization dynamic problems.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2004

Прийнята до друку 02.11.2006