ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип.66. С.20–34

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2006. Vol.66. P.20–34

УДК 517.95

ВАРІАЦІЙНІ НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ НЕРІВНОСТІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Микола БОКАЛО, Олена КУШНІР

Львівський національний унівеситет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Знайдено класи коректності задач для нелінійних еліптичних нерівностей вищих порядків зі змінними показниками нелінійності, які розглядаються в необмежених областях. Елементи цих класів можуть мати довільну поведінку на нескінченності. Отримано оцінку розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: варіаційні нелінійні еліптичні нерівності, узагальнені простори Лебега.

Вивчення нелінійних рівнянь і варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності в останні роки становить все більший інтерес. Це пов'язано з тим, що такі рівняння та нерівності знаходять своє застосування в багатьох прикладних задачах ([1]—[5]). Зокрема, велике технологічне значення мають електрореологічні речовини ([3]), властивості яких використовують у гідродинаміці та гідростатиці ([1],[4],[6]).

Варіаційні нерівності в обмежених областях досить добре вивчені ([7—12]). Гіперболічні та параболічні нелінійні варіаційні нерівності у необмежених за просторовими змінними областях розглядали багато авторів ([13]—[15]). Еліптичні нелінійні варіаційні нерівності з необмеженими областями їх задання досліджено в [16],[17] і з'ясовано, що для забезпечення єдиності розв'язку відповідної варіаційної нерівності необхідно накласти певні умови на його поведінку на нескінченності, а для існування розв'язку — умови на зростання вихідних даних на нескінченності ([18]). У [19] доведено єдиність розв'язку деякого класу нелінійних еліптичних систем зі змінними показниками нелінійності при довільній поведінці u та f при $|x| \to \infty$, а також визначено неперервну залежність узагальненого розв'язку розглянутої задачі від вихідних даних. Опираючись на [18], подібний результат отримано для певного класу варіаційних нерівностей вищих порядків (область задання — необмежена).

1. Основні позначення. Нехай n, m — які-небудь натуральні числа. Через $\mathbb{Z}_+^n$ позначатимемо множину мультиіндексів розмірності n, тобто множину, елементами якої є $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, де α_i — ціле невід'ємне число, $i = \overline{1, n}$. Приймемо $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ($|\alpha|$ — довжина мультиіндексу α).

Нехай $\mathbb{L}$ - підмножина множини $\mathbb{N}$. Кажуть, що на множині $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \in \mathbb{L}\}$ введено лексикографічний порядок, якщо вважається, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, де α, β - елементи заданої множини, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$.

Всі функції, які тут розглядаються, дійснозначні. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D}$ — якась функція, то під $v|_D$ розумітиметься її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Через $\mathbb{R}^n$ позначатиметься арифметичний простір впорядкованих наборів з n дійсних чисел, тобто лінійний простір, складений з елементів вигляду $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Нехай Ω — необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$. Для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$.

Приймемо $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \big\{v(x),\, x \in \Omega : v|_{\Omega_R} \in L_q(\Omega_R) \quad \forall\, R > 0\big\}$, де $q \in [1, \infty]$. На просторі $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводиться стандартна лінійна структура і сім'я півнорм: $\|\cdot\|_{L_q(\Omega_R)}$, $R > 0$, з якою він стає локально опуклим простором (якщо ототожнити функції, які дорівнюють майже всюди). Отож, збіжність послідовності елементів простору $L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ означає, що для кожного $R > 0$ послідовність звужень на Ω_R членів заданої послідовності є збіжною в $L_q(\Omega_R)$.

Для кожного $R > 0$ визначимо простір $H^m(\Omega_R)$ як замикання простору $C^m(\overline{\Omega}_R)$ (m раз неперервно диференційовних в Ω_R функцій, які разом з похідними до порядку m включно допускають неперервне продовження на $\overline{\Omega}_R$) за нормою $\|v\|_{H^m(\Omega_R)} \overset{\text{def}}{=} \bigg(\int\limits_{\Omega_R} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \big|D^\alpha v(x)\big|^2\, dx\bigg)^{1/2}$, де $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Замикання простору $C_0^m(\Omega_R)$ (який складається з функцій простору $C^m(\overline{\Omega}_R)$, носії яких лежать в Ω_R) за нормою $H^m(\Omega_R)$ позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_R)$.

На просторі $C^m(\overline{\Omega})$ введемо (див., наприклад, [8]) топологію лінійного опуклого простору за допомогою системи півнорм $\|\cdot\|_{H^m(\Omega_R)}$, $R > 0$. Замикання простору $C^m(\overline{\Omega})$ за введеною топологією (як підпростору простору $L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) позначимо через $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Тут і далі $H^0_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \overset{\text{def}}{=} L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до v в цьому просторі, якщо $\|v_k - v\|_{H^m(\Omega_R)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для кожного $R > 0$. Зауважимо, що $v\big|_{\Omega_R} \in H^m(\Omega_R)$ для будь-якого $R > 0$, якщо $v \in H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C_c^m(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^m(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$, а $C_0^m(\Omega)$ – підпростір простору $C_c^m(\overline{\Omega})$, елементами якого є фінітні функції, тобто функції, носії яких є компактами в Ω. Приймемо $C_c^{m,+}(\overline{\Omega}) \overset{\text{def}}{=} \{v \in C_c^m(\overline{\Omega}) : v \geqslant 0 \text{ на } \Omega\}$. Очевидно, що простір $C_c^m(\overline{\Omega})$ є щільним в

$H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Позначимо через $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору $C^m_0(\Omega)$ за топологією простору $H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Підпростір простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, що складається з функцій, носії яких є компактами в $\overline{\Omega}$, позначатимемо через $\overset{\circ}{H}{}^m_c(\overline{\Omega})$. Під простором $H^m_{\Gamma_R}(\Omega_R)$ розумітимемо простір, який складається зі звужень елементів простору $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ на Ω_R, $R>0$.

Нехай $p\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причому $p(x)\geqslant 1$ для майже всіх $x\in\Omega$. На просторі $C(\overline{\Omega}_R)$, де $R>0$ – довільне число, введемо норму

$$\|v\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\{\lambda>0:\rho_{p,R}(v/\lambda)\leqslant 1\},\quad \text{де}\quad \rho_{p,R}(v)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\Omega_R}|v(x)|^{p(x)}\,dx.$$

Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega}_R)$ за цією нормою позначимо через $L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ (див. [20]). Множина $L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_R)$ і називається узагальненим простором Лебега. Позначимо через $L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору $C(\overline{\Omega})$ (неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій) за топологією, породженою системою півнорм $\|\cdot\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$, і нехай $L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega)=\big\{v\in L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\sup_{R>0}\|v\|_{L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}<\infty\big\}$.

2. Формулювання задачі і основних результатів. Нехай M – підмножина множини $\{0,1,\ldots,m\}$ така, що $\{0,m\}\subset M$, а $M_0\overset{\mathrm{def}}{=}M\backslash\{0\}$. Позначимо через N_M – кількість мультиіндексів $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, довжини яких $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^{N_M}$ – множину векторів $\xi=(\xi_{\overline{0}},\ldots,\xi_\alpha,\ldots)$, компоненти яких дійсні числа, пронумеровані мультиіндексами розмірності n, які мають довжини з M і впорядковані лексикографічно. Тут і далі $\overline{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів. Приймемо $|\xi|=\Big(\sum\limits_{|\alpha|\in M}|\xi_\alpha|^2\Big)^{\frac12}$, $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$.

Приймемо $\mathbb{P}\overset{\mathrm{def}}{=}\big\{p\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}):\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega}p(x)>1\big\}$. Якщо $p\in\mathbb{P}$, то через p^* позначатимемо функцію з $\mathbb{P}$ таку, що $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p^*(x)}=1$ для м. в. $x\in\Omega$.

Нехай $p\in\mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_{\overline{0}},\ldots,a_\alpha,\ldots)\equiv(a_\alpha)$ з N_M визначених на $\Omega\times\mathbb{R}^{N_M}$ дійснозначних функцій, які пронумеровані мультиіндексами з $\mathbb{Z}^n_+$, що мають довжини з M та впорядковані лексикографічно, і функції з будь-якого такого набору (a_α) задовольняють умови:

1) для кожного α ($|\alpha|\in M$) функція $a_\alpha(x,\xi)$, $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^{N_M}$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x\in\Omega$ функція $a_\alpha(x,\cdot\,):\mathbb{R}^{N_M}\to\mathbb{R}$ неперервна і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$ функція $a_\alpha(\cdot\,,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

2) для майже всіх $x\in\Omega$ та будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$ виконуються нерівності

$$|a_{\overline{0}}(x,\xi)|\leqslant h_{\overline{0}}(x)\left(|\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1}+|\xi|^{2/p^*(x)}\right)+g_{\overline{0}}(x),$$

$$|a_\alpha(x,\xi)|\leqslant h_\alpha(x)|\xi|+g_\alpha(x),\quad |\alpha|\in M_0,$$

де $h_\alpha\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $|\alpha|\in M$, $g_{\overline{0}}\in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $g_\alpha\in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $|\alpha|\in M_0$.

Нехай $\mathbb{F}_p$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_{\overline{0}},\ldots,\, f_\alpha,\ldots) \equiv (f_\alpha)$ з N_M визначених на Ω дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи множини $\mathbb{A}_p$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову

3) $f_{\overline{0}} \in L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ f_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\quad |\alpha| \in M_0.$

На $\mathbb{F}_p$ вводиться топологія локально опуклого простору за допомогою відповідної системи півнорм так, що $\mathbb{F}_p = L_{p^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times \cdots \times L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Позначимо

$$\mathbb{U}_p \overset{\mathrm{def}}{=} H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \cap L_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad \mathring{\mathbb{U}}_p \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{U}_p \cap \mathring{H}^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),$$

і введемо на $\mathbb{U}_p$ систему півнорм $\|\cdot\|_{H^m(\Omega_R)\cap L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R > 0$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ збігається в $\mathbb{U}_p$, якщо для будь-якого $R > 0$ послідовність $\{v_k\big|_{\Omega_R}\}$ збігається в $H^m(\Omega_R) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$.

Приймемо $\varphi+\mathring{\mathbb{U}}_p \overset{\mathrm{def}}{=} \{\varphi+v : v \in \mathring{\mathbb{U}}_p\}$, де $\varphi \in \mathbb{U}_p$ — яка-небудь функція, і позначимо через $\mathbb{O}_{\varphi,p}$, де $p \in \mathbb{P}$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$, множину опуклих замкнених підмножин множини $\varphi + \mathring{\mathbb{U}}_p$.

Нехай $\widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ і для $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ $\widetilde{\mathbb{A}}_p \subset \mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p \subset \mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p \subset \mathbb{U}_p$ та для $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ $\widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} \subset \mathbb{O}_{\varphi,p}$. Задача, яку назвемо $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ (**V**ariational **I**nequality of **H**igher order) і будемо далі розглядати, є така: для кожних $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ і $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ знайти множину $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ функцій $u \in K$ (the set of **S**olutions of **V**ariational **I**nequality of **H**igher order), які задовольняють нерівність

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta_M u) D^\alpha(w(v-u))\,dx \geqslant \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha(w(v-u))\,dx \tag{1}$$

для довільних $w \in C^{m,+}_c(\overline{\Omega})$ і $v \in K$.

Тут і далі через $\delta_M u$ позначатимемо вектор, компонентами якого є похідні $D^\alpha u$ функції u порядків $|\alpha|$ з M, які впорядковуються так само, як компоненти векторів $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$.

Задача $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ називається *однозначною (розв'язною, однозначно розв'язною)*, якщо для будь-яких $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ і довільних $(a_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ множина $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ містить *не більше* одного елемента (*хоча б один* елемент, *один і тільки один* елемент).

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ і елементи множини $\widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ для кожних $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$ є топологічними просторами. Задача $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ — *коректна*, якщо вона є однозначно розв'язною і для кожних $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p$, довільної множини $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ та будь-яких елементів $(a_\alpha), (f_\alpha)$ і послідовностей елементів $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$ відповідно з $\widetilde{\mathbb{A}}_p$ та $\widetilde{\mathbb{F}}_p$ таких, що $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a_\alpha)$ в $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f_{\alpha,k})$ в $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, маємо $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в K, де $u_k \in \mathbf{SVIH}((a_{\alpha,k}),(f_{\alpha,k}),K)$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$.

Зрозуміло, що множини $\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p}$ $(p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$, за яких задача $\mathbf{VIH}(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_{\varphi,p} : p \in \widetilde{\mathbb{P}},\ \varphi \in \widetilde{\mathbb{U}}_p)$ є розв'язною, однозначною чи коректною можуть бути різноманітними. Нас цікавитиме вибір $\mathbb{P}^* \subset \mathbb{P}$ і $\mathbb{A}_p^* \subset \mathbb{A}_p$, $\mathbb{F}_p^* \subset \mathbb{F}_p$, $\mathbb{U}_p^* \subset \mathbb{U}_p$, $\mathbb{O}_{\varphi,p}^* \subset \mathbb{O}_{\varphi,p}$ при $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in {\mathbb{U}_p}^*$ таких, щоби множини $\mathbb{F}_p^*$ і $K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}^*$ ($p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$) складалися із функцій з довільною поведінкою при $|x| \to +\infty$ і задача $\mathbf{VIH}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p^*, \mathbb{O}_{\varphi,p}^* : p \in \mathbb{P}^*,\ \varphi \in \mathbb{U}_p^*)$ була коректною. Тобто, наша мета — отримати результати, аналогічні до результатів [18] і [19]. Враховуючи це, введемо $\mathbb{P}^*$ і $\mathbb{A}_p^*$, $\mathbb{F}_p^*$, $\mathbb{U}_p^*$, $\mathbb{O}_{\varphi,p}^*$ ($p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$) так.

Нехай $\mathbb{P}^*$ — множина, яка складається з елементів $p \in \mathbb{P}$ таких, що

$$2 < p_0 \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x), \qquad p_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty.$$

Для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ введемо множину $\mathbb{A}_p^*$ наборів функцій $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють додатково ще дві умови;

4) існують сталі $B_1 \geqslant 0$ і $B_2 > 0$ такі, що для кожного α, $|\alpha| \in M_0$, майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$|a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta)| \leqslant \Big(B_1|\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^2 + B_2 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2\Big)^{1/2}$$

(B_1 та B_2 залежать від (a_α));

5) існують (залежні від (a_α)) сталі $K_1 \geqslant 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $x \in \Omega$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant$$

$$\geqslant K_1|\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^2 + K_2 \sum_{|\alpha|\in M_0} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2 + K_3|\xi_{\overline{0}} - \eta_{\overline{0}}|^{p(x)};$$

якщо виконується одна з двох умов $B_1 > 0$ або $p_1 \geqslant \frac{2n}{n-2\mu}$, де $\mu = \min M_0$, то $K_1 > 0$ (зазначимо, що $\min M_0 \overset{\text{def}}{=} \min\{i \in M_0\}$).

Скажемо, що послідовність $\big\{(a_{\alpha,k})\big\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{A}_p^*$ збіжна до (a_α) в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи $(a_{\alpha,k})$, $k \in \mathbb{N}$, і елемент (a_α) задовольняють умови **4**) і **5**) з тими самими сталими B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 і для кожного $R > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_R} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}} \bigg(\frac{|a_{\overline{0},k}(x,\xi) - a_{\overline{0}}(x,\xi)|}{|\xi_{\overline{0}}|^{p(x)-1} + |\xi|^{2/p^*(x)} + 1} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M_0} \frac{|a_{\alpha,k}(x,\xi) - a_\alpha(x,\xi)|}{|\xi| + 1} \bigg) = 0.$$

Теорема 1. *Задача* $\mathbf{VIH}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{O}_{\varphi,p} : p \in \mathbb{P}^*,\ \varphi \in \mathbb{U}_p)$ *є однозначною і, якщо* $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),\ (f_\alpha), K) \neq \varnothing$ *для деяких* $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$ *і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$,

$K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}$, то для $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ і будь-яких R_0, R, $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[K_1|u(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha u(x)|^2 + |u(x)|^{p(x)}\Big]\,d\,x \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \Big[C_1\, R^{n-\frac{2\mu q}{q-2}} +$$

$$+C_2 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{\Big|f_{\overline{0}}(x) - a_{\overline{0}}\big(x,\delta_M\varphi(x)\big)\Big|^{p^*(x)} + \sum_{|\alpha|\in M_0} \Big|f_\alpha(x) - a_\alpha\big(x,\delta_M\varphi(x)\big)\Big|^2\Big\}\,d\,x\Big] +$$

$$+C_3 \int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big\{K_1|\varphi(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha\varphi(x)|^2 + |\varphi(x)|^{p(x)}\Big\}\,d\,x, \qquad (2)$$

*де $\mu = \min M_0$; $q = p_1$, якщо $K_1 = 0$, і $q \in (2;p_0] \cup \{p_1\}$ при $K_1 > 0$; $\varkappa > \max\Big\{\frac{2m\,p_0}{p_0-2}, \frac{2m\,q}{q-2}\Big\}$ — довільне число; C_1, C_2, C_3 — деякі додатні сталі, які залежать тільки від B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 (з умов **4**) і **5**)), $p_0, p_1, n, m, q, \varkappa$.*

Введемо ще деякі позначення. Нехай $\mathbb{U}_p^*$ та $\mathbb{A}_p^{**}$ — підмножини множин $\mathbb{U}_p$ та $\mathbb{A}_p^*$ відповідно такі, що $a_\alpha(\cdot,\delta_M\varphi(\cdot)) \in H^{|\alpha|}_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \in M$, для довільної функції $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$ та набору функцій $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$.

Для довільних функцій $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$ та $p \in \mathbb{P}^*$ через $\mathbb{O}^*_{\varphi,p}$ позначимо підмножину множини $\mathbb{O}_{\varphi,p}$, яка складається з одного елемента $K = \{v \in \varphi + \mathring{\mathbb{U}}_p : v \geqslant \varphi$ майже всюди на $\Omega\}$.

Позначимо через $\mathbb{F}^*$ підмножину $\mathbb{F}_p$, елементи якої (f_α) такі, що f_α належить $H^{|\alpha|}_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, коли $|\alpha| \in M$.

Теорема 2. *Задача $\mathbf{VIH}(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}^*, \mathbb{O}^*_{\varphi,p} : p \in \mathbb{P}^*,\ \varphi \in \mathbb{U}_p^*)$ є коректною.*

Зауваження 1. Коли $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}^*$, $K \in \mathbb{O}^*_{\varphi,p}$, то для $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha), (f_\alpha), K)$ правильна оцінка (2) з відповідними спрощеннями.

3. Допоміжні твердження. Важливою підставою для доведення теорем 1 і 2 є таке твердження.

Лема 1. *Нехай $R_* \geqslant 1$, $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$ і $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_{\alpha,1}), (f_{\alpha,2}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}$, $u_1, u_2 \in K$ такі, що*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta_M u_l)\ D^\alpha(w(v-u_l))\,d\,x \geqslant \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l}(x)\ D^\alpha(w(v-u_l))\,d\,x \qquad (3)$$

для довільних $l \in \{1,2\}$, $v \in K$, $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, supp $w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$, $R_0 < R \leqslant R_*$ правильна нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[K_1|u^{1,2}(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha u^{1,2}(x)|^2 + |u^{1,2}(x)|^{p(x)}\Big]\,d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}\Big[C_4 R^{n-\frac{2\mu q}{q-2}} + C_5 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{|(f_{\overline{0},1} - f_{\overline{0},2})(x)|^{p^*(x)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M_0} |(f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})(x)|^2\Big\}\, d\,x\Big], \tag{4}$$

де $u^{1,2} \stackrel{def}{=} u_1 - u_2$*; а* $\varkappa$, μ, q *— такі самі, як у формулюванні теореми 1;* C_4, C_5 *— деякі додатні сталі, які залежать тільки від* B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 *(з умов* **4)** *і* **5)**), $p_0, p_1, n, m, q, \varkappa$.

Доведення. Виберемо і зафіксуємо які-небудь числа R_0, R за умови, що $0 < R_0 < R \leqslant R_*$, $R \geqslant 1$. Додавши інтегральні нерівності, отримані з (3) при $l = 1$ і $l = 2$, та прийнявши $v = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} \Big(a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2)\Big) D^\alpha(w\, u^{1,2})\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha|\in M} \Big(f_{\alpha,1}(x) - f_{\alpha,2}(x)\Big) D^\alpha(w\, u^{1,2})\, d\,x,$$

де $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\, w \subset \overline{\Omega}_{R_*}$.

Приймемо в цій нерівності $w = \zeta^\varkappa$ (див. [18]), де

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases}$$

а $\varkappa > m$ — достатньо велике число. У результаті одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2)) D^\alpha(u^{1,2}\, \zeta^\varkappa)\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) D^\alpha(u^{1,2}\, \zeta^\varkappa)\, d\,x. \tag{5}$$

Тепер зауважимо таке. Нехай $v \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для деякого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $0 < |\alpha| \leqslant m$. Очевидно, що

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha\, D^\alpha(v\, \zeta^\varkappa)\, d\,x = \int\limits_{\Omega} g_\alpha\, (D^\alpha v)\, \zeta^\varkappa\, d\,x + \int\limits_{\Omega} g_\alpha \Big(D^\alpha(v\, \zeta^\varkappa) - (D^\alpha v)\, \zeta^\varkappa\Big)\, d\,x. \tag{6}$$

З леми 3.1 праці [18] випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha \Big(D^\alpha(v\, \zeta^\varkappa) - (D^\alpha v)\, \zeta^\varkappa\Big)\, d\,x \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} |g_\alpha|^2 \zeta^\varkappa\, d\,x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} |D^\beta v|^2\Big)\, \zeta^\varkappa\, d\,x +$$

$$+ C_\alpha(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |v|^2 \, \zeta^{\varkappa - 2|\alpha|} \, dx, \tag{7}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число, $C_\alpha(\varepsilon) > 0$ – стала, яка від R не залежить.

Отож, з (5) на підставі (6) і (7) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha| \in M} \Big(a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2) \Big) (D^\alpha u^{1,2}) \, \zeta^\varkappa \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha| \in M_0} \Big| a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2) \Big|^2 \zeta^\varkappa \, dx +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha| \in M_0} \Big| f_{\alpha,1}(x) - f_{\alpha,2}(x) \Big|^2 \zeta^\varkappa \, dx + 2\varepsilon \int\limits_{\Omega_R} \Big(\sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha u^{1,2}|^2 \Big) \zeta^\varkappa \, dx +$$

$$+ C_6(\varepsilon) \int\limits_{\Omega_R} |u^{1,2}|^2 \Big(\sum_{i \in M_0} \zeta^{\varkappa - 2i} \Big) \, dx + \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha| \in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) (D^\alpha u^{1,2}) \zeta^\varkappa \, dx, \tag{8}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_6(\varepsilon) > 0$ – стала, яка від R не залежить.

Міркуючи далі аналогічно як при доведенні леми праці [16, с. 73], завершуємо доведення цього твердження.

Нехай $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p^*$ і $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}^*$, k — яке-небудь натуральне число. Під U_k розумітимемо простір $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k) \cap L_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$. Позначимо через U_k^* — спряжений до U_k простір, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, $[\cdot, \cdot]_k$ — скалярні добутки відповідно на $U_k^* \times U_k$ і в $L_2(\Omega_k)$.

Визначимо оператор

$$L_k : U_k \longrightarrow U_k^*$$

за правилом

$$\langle L_k v, w \rangle_k \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha| \in M} \Big[a_\alpha(x, \delta_M \varphi + \delta_M v) - a_\alpha(x, \delta_M \varphi) \Big] \, D^\alpha w \, dx, \quad v, w \in U_k.$$

Лема 2. *Оператор $L_k : U_k \longrightarrow U_k^*$ є обмеженим, коерцитивним, семінеперервним і строго монотонним.*

Доведення леми 2 проводимо подібно до випадку сталого показника нелінійності, використовуючи при цьому нерівності з твердження 1 праці [13].

Для будь-якого дійсного числа t приймемо

$$t^- = \begin{cases} -t, & \text{якщо} \quad t < 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Позначимо через $f_{\alpha,k}(\cdot)$ звуження $f_\alpha(\cdot) - a_\alpha(\cdot, \delta_M\varphi(\cdot))$ на Ω_k, $|\alpha| \in M$. Оскільки $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}^*$, то функція

$$F_k = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_{\alpha,k}$$

належить простору $L_2(\Omega_k)$.

Лема 3. *Для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує єдина функція $v^{k,l}$ з простору U_k така, що*

$$\langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k - l[(v^{k,l})^-, v]_k = [F_k, v]_k \tag{9}$$

для будь-яких $v \in U_k$, причому послідовність $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ є обмеженою в U_k, а послідовності $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$, $\{L_k v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ — обмеженими в $L_2(\Omega_k)$.

Доведення. Нехай $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Розглянемо оператор $\mathcal{D}_{k,l} : U_k \longrightarrow U_k^*$, який діє за правилом

$$\langle \mathcal{D}_{k,l} v, \widetilde{v}\rangle_k \overset{\text{def}}{=} \langle L_k v, \widetilde{v}\rangle_k - l[v^-, \widetilde{v}]_k, \quad v, \widetilde{v} \in U_k.$$

Тоді тотожність (9) можна записати як операторне рівняння

$$\mathcal{D}_{k,l} v^{k,l} = F_k, \qquad v^{k,l} \in U_k. \tag{10}$$

Використовуючи лему 2, легко переконатися, що оператор $\mathcal{D}_{k,l}$ обмежений, семінеперервний, монотонний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір U_k — рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [7,Гл.2,§2], отримаємо існування розв'язку рівняння (10). Його єдиність випливає зі строгої монотонності оператора L_k.

Покажемо, що послідовність $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ — обмежена в U_k. Прийнявши у (9) $v = v^{k,l}$, де $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число, отримаємо

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k + l\|(v^{k,l})^-\|^2_{L_2(\Omega_k)} = [F_k, v^{k,l}]_k. \tag{11}$$

З умови **5)** і того, що $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^{**}$, випливає нерівність

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k \geqslant \int\limits_{\Omega_k} [K_1|v^{k,l}(x)|^2 + K_2 \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v^{k,l}(x)|^2 + K_3|v^{k,l}(x)|^{p(x)}]\, dx. \tag{12}$$

Використовуючи нерівності Фрідріхса, Коші-Буняковського і Юнга, одержимо

$$[F_k, v^{k,l}]_k \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha|=\mu} |D^\alpha v^{k,l}|^2\, dx + C_7(\varepsilon)\|F_k\|^2_{L_2(\Omega_k)}, \tag{13}$$

де μ — яке-небудь число з M_0, $C_7 > 0$ — стала, яка не залежить від $v^{k,l}$, а $\varepsilon > 0$ — довільна стала.

З (11) — (13), вибравши значення ε досить малим та використавши нерівність Фрідріхса, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k} \Big[|v^{k,l}(x)|^2 + \sum_{|\alpha|\in M_0} |D^\alpha v^{k,l}(x)|^2 + |v^{k,l}(x)|^{p(x)}\Big]\, d\,x \leqslant C_8 \|F_k\|^2_{L_2(\Omega_k)}, \tag{14}$$

де $C_8 > 0$ — стала, яка від l не залежить.

З (14) випливає обмеженість послідовності $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ в U_k.

Тепер покажемо, що послідовність $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$ обмежена в $L_2(\Omega_k)$. Нехай $l \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Оскільки $(v^{k,l})^- \in U_k$, то, прийнявши в (9) $v = (v^{k,l})^-$, одержимо

$$\langle L_k v^{k,l}, (v^{k,l})^-\rangle_k - l\|(v^{k,l})^-\|^2_{L_2(\Omega_k)} = [F_k, (v^{k,l})^-]_k\,. \tag{15}$$

Враховуючи те, що на підставі оцінки (12) виконується нерівність

$$\langle L_k v^{k,l}, (v^{k,l})^-\rangle_k = \int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha|\in M} \Big[a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v^{k,l}) - a_\alpha(x, \delta_M\varphi)\Big]\, D^\alpha (v^{k,l})^-\ d\,x =$$

$$= -\int\limits_{\Omega^-_{k,l}} \sum_{|\alpha|\in M} \Big[a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v^{k,l}) - a_\alpha(x, \delta_M\varphi)\Big]\, D^\alpha v^{k,l}\ d\,x \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha|\in M} \Big[a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v^{k,l}) - a_\alpha(x, \delta_M\varphi)\Big]\, D^\alpha v^{k,l}\ d\,x =$$

$$= -\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k \leqslant 0, \tag{16}$$

де $\Omega^-_{k,l}$ — підмножина області Ω_k така, що $(v^{k,l})^-(x) \neq 0$ для майже всіх $x \in \Omega^-_{k,l}$, з (15), використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо

$$l\|(v^{k,l})^-\|^2_{L_2(\Omega_k)} = \langle L_k v^{k,l}, (v^{k,l})^-\rangle_k - [F_k, (v^{k,l})^-]_k \leqslant \Big|[F_k, (v^{k,l})^-]_k\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|F_k\|_{L_2(\Omega_k)} \|(v^{k,l})^-\|_{L_2(\Omega_k)}. \tag{17}$$

З (17) випливає обмеженість послідовності $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$ в $[L_2(\Omega_k)]^N$.

З (9), врахувавши (17), отримаємо

$$\langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k = l[(v^{k,l})^-, v]_k + [F_k, v]_k \leqslant 2\|F_k\|_{L_2(\Omega_k)} \|v\|_{L_2(\Omega_k)},\ v \in U_k, l \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Оскільки простір U_k — щільний в $L_2(\Omega_k)$, то з (18) випливає, що $L_k v^{k,l} \in L_2(\Omega_k)$ і $\|L_k v^{k,l}\|_{L_2(\Omega_k)} \leqslant 2\|F_k\|_{L_2(\Omega_k)}$, $l \in \mathbb{N}$, звідки маємо обмеженість послідовності $\{L_k v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$ в $L_2(\Omega_k)$. Лему доведено.

4. Доведення основних результатів. *Доведення теореми 1.* Припустимо супротивне. Нехай для деяких $p \in \mathbb{P}^*$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$ і $(a_\alpha) \in \mathbb{A}^*_p$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_{\varphi,p}$

множина $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)$ складається з більше як одного елемента. Міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми з [16, с.79], отримаємо протиріччя з нашим припущенням.

Тепер зауважимо, що правильна нерівність

$$|a-b|^q \geqslant 2^{1-q}|a|^q - |b|^q \tag{19}$$

для будь-яких $a,b\in\mathbb{R}$ і $q\geqslant 1$. Справді, для $q=1$ ця нерівність очевидна. Нехай $q>1$. Використавши нерівність Гельдера, отримаємо $|a|^q=|a-b+b|^q\leqslant \big(|a-b|+|b|\big)^q\leqslant 2^{\,q-1}\big(|a-b|^q+|b|^q\big)$, звідки випливає (19).

Нехай $\mathbf{SVIH}((a_\alpha),(f_\alpha),K)\neq\emptyset$. На підставі леми 1, взявши $u_1(x)=u(x)$, $u_2(x)=\varphi(x)$, $f_{\alpha,1}(x)=f_\alpha(x)$, $f_{\alpha,2}(x)=a_\alpha\big(x,\delta_M\varphi(x)\big)$, $|\alpha|\in M$, $x\in\Omega$, одержимо нерівність, з якої, використавши оцінку (19), отримаємо (2). Теорему доведено.

Доведення теореми 2. Нехай $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p^{**}$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}^*$, $K\in\mathbb{O}^*_{\varphi,p}$ для деяких $p\in\mathbb{P}^*$, $\varphi\in\mathbb{U}_p^*$. Візьмемо довільне натуральне число k і зафіксуємо його. Побудуємо послідовність функцій $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$, про яку йдеться в лемі 3. За цією ж лемою для довільного $l\in\mathbb{N}$ маємо такі оцінки:

$$\|v^{k,l}\|_{U_k}\leqslant C_9(k),\quad l\|(v^{k,l})^-\|_{L_2(\Omega_k)}\leqslant C_{10}(k),\quad \|L_kv^{k,l}\|_{L_2(\Omega_k)}\leqslant C_{11}(k), \tag{20}$$

де $C_9(k),C_{10}(k),C_{11}(k)>0$ — сталі, які від l не залежать.

З (20) випливає існування функцій $v^k\in U_k$, $\psi,\chi\in L_2(\Omega_k)$ та підпослідовностей відповідно послідовностей $\{v^{k,l}\}_{l=1}^\infty$, $\{l(v^{k,l})^-\}_{l=1}^\infty$ (за якими залишимо те саме позначення, що і позначення відповідних послідовностей) таких, що

$$v^{k,l}\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}v^k \ \text{ слабо в } U_k,\qquad \text{сильно в } L_2(\Omega_k),\quad \text{м. в. на } \Omega_k, \tag{21}$$

$$l(v^{k,l})^-\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}\psi\quad \text{слабо в } L_2(\Omega_k),$$

$$(v^{k,l})^-\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}0\quad \text{сильно в } L_2(\Omega_k),\qquad \text{м.в. на } \Omega_k, \tag{22}$$

$$L_kv^{k,l}\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}\chi\qquad \text{слабо в}\qquad L_2(\Omega_k). \tag{23}$$

Взявши до уваги (21) і (23), отримаємо

$$[L_kv^{k,l},v^{k,l}]_k\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}[\chi,v^k]_k\,. \tag{24}$$

Врахувавши (24), одержимо

$$\langle L_kv^{k,l},v^{k,l}\rangle_k=[L_kv^{k,l},v^{k,l}]_k\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}[\chi,v^k]_k=\langle\chi,v^k\rangle_k\,. \tag{25}$$

Доведемо, що

$$\chi=L_kv^k. \tag{26}$$

На підставі монотонності оператора L_k маємо

$$\langle L_k v^{k,l} - L_k v, v^{k,l} - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k, \tag{27}$$

тобто

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k - \langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k - \langle L_k v, v^{k,l} - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k. \tag{28}$$

Враховуючи, що $\langle L_k v^{k,l}, v\rangle_k = [L_k v^{k,l}, v]_k$, оскільки $L_k v^{k,l} \in L_2(\Omega_k)$, то з (28) отримаємо

$$\langle L_k v^{k,l}, v^{k,l}\rangle_k - [L_k v^{k,l}, v]_k - \langle L_k v, v^{k,l} - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k,\ \forall l \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Врахувавши співвідношення (21), (23) та (25), перейдемо в (29) до границі при $l \to \infty$. У результаті одержимо

$$\langle \chi, v^k\rangle_k - [\chi, v]_k - \langle L_k v, v^k - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k. \tag{30}$$

На підставі того, що $[\chi, v]_k = \langle \chi, v\rangle_k$, здобудемо

$$\langle \chi - L_k v, v^k - v\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall v \in U_k. \tag{31}$$

Взявши в (31) $v = v^k - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in U_k$, матимемо

$$\lambda\langle \chi - L_k(v^k - \lambda w), w\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall w \in U_k,$$

звідки

$$\langle \chi - L_k(v^k - \lambda w), w\rangle_k \geqslant 0 \qquad \forall w \in U_k. \tag{32}$$

Спрямуємо в (32) λ до 0, врахувавши, що оператор L_k — семінеперервний. У результаті отримаємо $\langle \chi - L_k v^k, w\rangle_k \geqslant 0 \quad \forall w \in U_k$, звідки легко випливає (26).

Оскільки $L_k v^{k,l} \in L_2(\Omega_k)$, $l \in \mathbb{N}$, то (9) можна записати у вигляді

$$[L_k v^{k,l}, \widetilde{v}]_k - l[(v^{k,l})^-, \widetilde{v}]_k = [F_k, \widetilde{v}]_k \tag{33}$$

для будь-яких $\widetilde{v} \in L_2(\Omega_k)$.

Нехай $K_k \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in U_k : v \geqslant 0 \text{ на } \Omega_k\}$. Приймемо в (33) $w(v - v^{k,l})$ замість $\widetilde{v}$, де $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $v \in K_k$. У результаті, врахувавши, що $[(v)^- - (v^{k,l})^-, v - v^{k,l}]_k \leqslant 0$, отримаємо

$$[L_k v^{k,l}, w(v - v^{k,l})]_k \geqslant [F_k, w(v - v^{k,l})]_k \tag{34}$$

для будь-яких $v \in K_k$. Перейшовши в (34) до границі при $l \to \infty$, на підставі (21), (23), (24), (26), одержимо нерівність

$$[L_k v^k, w(v - v^k)]_k \geqslant [F_k, w(v - v^k)]_k \tag{35}$$

для будь-яких $v \in K_k$, $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$.

Зауважимо, що на підставі (21) і (22) $v^k \geqslant 0$ м. в. на Ω_k, і довизначимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію v^k нулем на $\Omega \backslash \overline{\Omega}_k$, залишивши за цим продовженням позначення v^k. Введемо позначення $u^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi + v^k$. Очевидно, що $u^k \in K$.

Згідно з нерівністю (35), врахувавши означення L_k і F_k, маємо

$$\int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta_M u^k) D^\alpha \Big(w(v - u^k) \Big)\, d\,x \geqslant \int\limits_{\Omega_k} \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha(x) D^\alpha \Big(w(v - u^k) \Big)\, d\,x \tag{36}$$

для будь-яких $k > 1$, $v \in K_k$, $w \in C_c^{m,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}_{k-1}$.

Тепер зауважимо, що для довільних натуральних чисел R, R_0, k і j таких, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, $k > R$, $j > R$, з леми 1 та нерівності (36) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big(\sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha (u^k - u^j)(x)|^2 + |(u^k - u^j)(x)|^{p(x)} \Big)\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^{\varkappa} R^{n - \frac{2\mu q}{q-2}}, \tag{37}$$

де $C_4 > 0$, $\varkappa > 0$, $q > 2$ — сталі, які не залежать від k, j, R_0, R, причому значення q таке, що $n - 2\mu q/(q-2) < 0$ (його можна таким вибрати, враховуючи умови теореми).

Зафіксувавши довільно вибране R_0, перейдемо в (37) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що звуження членів послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ на Ω_{R_0} утворює фундаментальну послідовність в просторі $H^m(\Omega_{R_0}) \bigcap L_{p(\cdot)}(\Omega_{R_0})$. Позаяк R_0 — довільне, то існує функція $u \in K$ така, що

$$u^k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad H^m_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \bigcap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,. \tag{38}$$

Міркуючи так як при доведенні теореми з [16, с. 78] і використовуючи нерівність (36), доводимо, що u є $\mathbf{SVIH}((a_\alpha), (f_\alpha), K)$.

Залишилось показати, що для множини $K \in \mathbb{O}^*_{\varphi,p}$ та будь-яких елементів (a_α), (f_α) і послідовностей елементів $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$ відповідно з $\mathbb{A}_p^{**}$ та $\mathbb{F}^*$ таких, що $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a_\alpha)$ в $\mathbb{A}_p^*$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f_\alpha)$ в $\mathbb{F}_p$, маємо $u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $\mathbb{U}_p$, де $u \in \mathbf{SVIH}((a_\alpha), (f_\alpha), K)$, $u^k \in \mathbf{SVIH}((a_{\alpha,k}), (f_{\alpha,k}), K)$, $k \in \mathbb{N}$. Це теж робиться аналогічно як при доведенні теореми роботи [16, с. 80]. Теорему доведено.

---

1. *Winslow W. M.* Indyced Fibration of Suspentions // J. Appl. Phys.– 1949.– Vol.20.– P.1137-1140.

2. *Zhikov V. V.* Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR. – 1987.– Vol.9.– P.33-66.

3. *Hasley T. C.* Electrorheological Fluids // Science. – 1992.– Vol. 258.– P.761-766.

4. *Růžička M.* Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory.– Springer. Berlin, 2000.

5. *Diening L.* Theorical and numerical results for electrorheological fluids// Ph. D. thesis, University of Frieburg. Germany, 2002.

6. *Pfeiffer C., Mavroidis C., Bar-Cohen Y. and Dolgin B.* Electrorheological fluid based force feedback device// Proceedings of the 1999 SPIE Telemanipulator and Telepresence Technologies VI Conference (Boston, MA) – 1999.– Vol.3840.– P.88-99.

7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 1972.

8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.

9. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Acta Math. Hungar.– 1990.– Vol.55.– №34.– P.379-392.

10. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundness of solutions of degenerate nonlinear elliptic variational inequalities // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.– 1999.– Vol.35. – №8.– P.987-999.

11. *Lin Zh.-H.* Elliptic hemivariational inequalities // Appl. Math. Lett.– 2003.– Vol.16.– №6.–P.871-876.

12. *Carl S., Le V. K. and Motreanu D.* Existence, comparison and compact ness results for quasilinear variational-hemivariational inequalities // Internetional Journal of Mathematics and Marhematical Sciences.– 2005.– Vol.3.– P.401-417.

13. *Бугрій О. М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наукові записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського.– Серія фіз.–мат.– 2002.– Вип. 1.– С.310-321.

14. *Пукач П. Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами// Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2004.– Т.47.– № 4.– С.149-154.

15. *Лавренюк С. П., Пукач П. Я.* Варіаційна гіперболічна нерівність у необмежених за просторовими змінними областях// Доп. НАН України.– 2006.– № 2.– С.30-35.

16. *Brezis H., Kinderlehrer D.* The Smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities // Indiana Univ. Math. J. – 1974.– Vol.17.– P.831-844.

17. *Mustonen V.* Strongly nonlinear elliptic variational inequalities in unbounded domains // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica.– 1977.– Vol.3.– P.59-74.

18. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity// Arch. Ration. Mech. and Anal.– 1989.– Vol.106.– №3.– P.217-241.

19. *Бокало М. М., Кушнір О. В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Математичні Студії.– 2005.– Т.24.– №1.– С.69-82.

20. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$// Czechosl. Math. J.– 1991.– Vol.41.– №4.– P.592-618.

VARIATIONAL NONLINEAR ELLIPTIC INEQUALITIES OF HIGHER ORDER WITH CHANGEABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Mykola Bokalo, Olena Kushnir

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The correctness classes to the problems for nonlinear elliptic inequalities of higher order with changeable exponents of nonlinearity given in unbounded domains has been established. The elements of these classes have no conditions on the behaviour at infinity. The estimation of solutions of the investigated problems has also been obtained.

Key words: variational nonlinear elliptic inequalities, general Lebesgue spaces.

Стаття надійшла до редколегії 02.06.2006

Прийнята до друку 02.11.2006