УДК 512.544

# ПРО КІЛЬЦЯ СКРУЧЕНИХ ПОЛІНОМІВ І КІЛЬЦЯ СКРУЧЕНИХ ФОРМАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

**Орест АРТЕМОВИЧ, Іван ЛІЩИНСЬКИЙ**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Досліджуються диференціювання кілець поліномів (Лорана), кілець формальних степеневих рядів (Лорана), ліві дуо-кільця мнгочленів Лорана.

*Ключові слова:* диференціювання, кільце поліномів (Лорана), кільце формальних степеневих рядів (Лорана), ліве дуо-кільце.

**0.** Нехай $\sigma : R \to R$ – ендоморфізм кільця $R$, тобто $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ і $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ для будь-яких елементів $a, b \in R$. Як звичайно, відображення $\delta : R \to R$ називається $\sigma$-диференціюванням кільця $R$, якщо $\delta(x+y) = \delta(x)+\delta(y)$ та $\delta(xy) = \delta(x)y^\sigma + x\delta(y)$ для всіх $x, y \in R$. Якщо $\sigma = 1$ – тотожне відображення кільця $R$ в себе, то замість терміна „1-диференціювання“ будемо вживати коротший термін „диференціювання“, а сукупність всіх диференціювань кільця $R$ позначатимемо через $DerR$. Нехай $Z(R) = \{z \in R|\ za = az,\ \forall a \in R\}$ – центр кільця $R$. Як відомо (див., наприклад, [1, частина IV, §4, 3°], або [2, частина II, §7]), якщо $c \in Z(R)$, а $d_1, d_2 \in DerR$, то $cd_1, d_1 \pm d_2, d_1d_2 - d_2d_1 \in DerR$, тобто $DerR$ – $Z(R)$-алгебра Лі і лівий $Z(R)$-модуль.

Мета нашої праці – дослідити диференціювання кілець поліномів (Лорана) і кілець формальних степеневих рядів (Лорана) та дуо-кільця поліномів Лорана.

Надалі, якщо $R$ – кільце, то $EndR$ – кільце його ендоморфізмів, $AutR$ – група його автоморфізмів, $Z_k = \{r \in R | ra^{\sigma^k} = ar$ для кожного $a \in R\}$ і $a^\sigma = \sigma(a)$ для $\sigma \in EndR$, $\circ$ – композиція (суперпозиція) відображень, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\prod_{i\in S} M_i$ – прямий добуток $M_i (i \in S)$ і, зокрема, якщо $M_i \cong M$ для всіх $i \in S$, то цей прямий добуток позначатимемо через $M^S$. Нагадаємо також, якщо $I$ – зліченна множина, то родина диференціювань $\delta = \{\delta_i | i \in I\}$ кільця $R$ називається локально скінченною, якщо для кожного елемента $a \in R$ маємо $\delta_i(a) = 0$

майже для всіх індексів $i \in I$. Через $(DerR)^\infty$ позначимо сукупність всіх локально скінченних родин диференціювань кільця $R$. Нехай $\delta, \gamma \in (DerR)^\infty$, де $\delta = \{\delta_i | i \in I\} \gamma = \{\gamma_i | i \in I\}$. Якщо для $c \in Z(R)$ визначити $c\delta = \{c\delta_i | i \in I\}$, $\delta \pm \gamma = \{\delta_i \pm \gamma_i | i \in I\}$, $[\delta, \gamma] = \{\delta_i \gamma_i - \gamma_i \delta_i | i \in I\}$, то отримаємо, що $(DerR)^\infty$ – $Z(R)$-алгебра Лі і лівий $Z(R)$-модуль.

Всі інші поняття і факти можна знайти в [1], [2], [3], [4].

Надалі $R$ – асоціативне кільце з одиницею.

**1.** Нас цікавлять диференціювання різних кілець поліномів і кілець формальних степеневих рядів. Наведемо деякі відомі приклади.

1. Кожен елемент $f(x_1, \ldots, x_n)$ кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$ від $n$ комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем $R$ є скінченною сумою вигляду

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

де $i_j \in \mathbb{N}_0,\ a_{i_1 \ldots i_n} \in R$ $(j = 1, \ldots, n)$. Нехай $d \in DerR$. Тоді правило

$$d(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum d(a_{i_1 \ldots i_n}) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

визначає диференціювання кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$.

2. У кільці $R[x_1, \ldots, x_n]$ інше диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_j}$ можна визначити за правилом

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum i_j a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_{j-1}^{i_{j-1}} x_j^{i_j - 1} x_{j+1}^{i_{j+1}} \ldots x_n^{i_n}.$$

Це диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_j}$ кільця $R[x_1, \ldots, x_n]$ називається частковим диференціюванням стосовно $x_j$. Серед його властивостей зазначимо, що $\frac{\partial x_s}{\partial x_j} = \delta_{sj}$ – функція Кронекера-Шекспіра (тобто $\delta_{sj} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } s \neq j \\ 1, \text{ якщо } s = j \end{cases}$) та $\frac{\partial a}{\partial x_j} = 0$ для будь-якого $a \in R$ $(i, j = 1 \ldots n)$.

**Твердження 1.1.** ([1, частина IV, §4, 3°, твердження 9]). *Якщо* $D \in DerR[x_1, \ldots, x_n]$, *то*

$$D(f(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} D(x_j)$$

*для будь-якого полінома*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

3. У кільці $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ формальних степеневих рядів від $n$ комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$, яке складається з нескінченних сум вигляду

$$u = \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{\nu_1 \ldots \nu_n} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n},$$

де підсумовування ведеться за всіма $n$-ками $(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n$, правило

$$D(u)=\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n} d(a_{\nu_1\ldots\nu_n})x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n}$$

визначає диференціювання $D$ цього кільця для будь-якого $d\in DerR$.

4. Кожне часткове диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_j}$ кільця поліномів $R[x_1,\ldots,x_n]$ продовжується до часткового диференціювання кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1,\ldots,x_n]]$ (яке позначатимемо тим самим символом $\frac{\partial}{\partial x_j}$) і, крім того,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n}\nu_j a_{\nu_1\ldots\nu_n}x_1^{\nu_1}\ldots x_{j-1}^{\nu_{j-1}}x_j^{\nu_j-1}x_{j+1}^{\nu_{j+1}}\ldots x_n^{\nu_n}.$$

**Твердження 1.2.** ([1, частина IV, §5, 8°, твердження 8]). *Якщо $D$ – диференціювання кільця $R[[x_1,\ldots,x_n]]$, то*

$$D(u)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}D(x_j)$$

*для будь-якого формального степеневого ряду*

$$u=\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}_0^n}a_{\nu_1\ldots\nu_n}x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n}.$$

5. У будь-якому кільці $R$ правило $\partial_a(x)=ax^\sigma-xa$ визначає $\sigma$-диференціювання кільця $R$, де $a\in R,\sigma\in EndR$, яке називається внутрішнім $\sigma$-диференціювання кільця $R$, породженим елементом $a$. Внутрішнє 1-диференціювання коротко називається внутрішнім диференціюванням. Диференціювання кільця $R$, яке не є внутрішнім, прийнято називати зовнішнім. Крім того, надалі $m(\partial)=a$ означає, що $\partial$ є внутрішнім диференціюванням, породженим елементом $a$ (для $\partial$ елемент $a$ може визначатися неоднозначно). Сукупність всіх внутрішніх $\sigma$ -диференціювань кільця $R$ позначатимемо через $IDer(R,\sigma)$.

Диференціюванням різних кілець присвячено чимало праць. В [5] описано диференціювання алгебр інцидентності. Диференціювання групових алгебр скінченно породжених нільпотентних груп без скруту та групових кілець періодичних груп вивчали відповідно в [6] і [7]. В [8] з'ясовано, що кожне диференціювання групового кільця $\mathbb{Z}G$ скінченної групи $G$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ є внутрішнім. Вивчали також диференціювання квазіматричних кілець [9-10] та деяких інших (див., наприклад, [11-14]). Особлива увага зосереджена на дослідженнях диференціювань кілець поліномів. Це пояснюється різними причинами. Можливо, однією з них є все ще відкрита відома проблема якобіана (детальніше див. [15]), яка також формулюється в термінах локально нільпотентних диференціювань. Серед праць присвячених диференціюванням кілець поліномів виділимо дослідження В.Д.Буркова [16], Д.Пассмана [17], А. Новіцкого [18] та ін.

У першій частині досліджуються диференціювання кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$ і кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. Наступне твердження дещо розширює теорему 1 із [19]. Цей результат анонсовано в [23].

**Твердження 1.3.** *Нехай $R[x_1, \ldots, x_n]$ – кільце поліномів від $n$ комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем $R$. Тоді правильний ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$DerR[x_1, \ldots, x_n] \cong (DerR)^\infty \times Z(R)[x_1, \ldots, x_n]^n.$$

*Доведення.* 1. Нехай $D$ – яке-небудь диференціювання кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$. Тоді для кожного елемента $r \in R$ його похідна $D(r) \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Оскільки $R[x_1, \ldots, x_n]$ – підкільце в кільці формальних степеневих рядів $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, то формально $D(r)$ можна записати у вигляді степеневого ряду (в якому майже всі коефіцієнти є нульовими) так:

$$D(r) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n} \delta_{i_1 \ldots i_n}(r) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

де $\delta_{i_1 \ldots i_n}(r) \in R$ для кожної $n$-ки $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Легко з'ясувати, що відображення $\delta : R \to R$, де $\delta(r) = \delta_{i_1 \ldots i_n}(r) \quad (r \in R)$, є диференціюванням кільця $R$ і, як наслідок, родина диференціювань

$$\delta = \{\delta_{i_1 \ldots i_n} | (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n\} \tag{1}$$

кільця $R$ є локально скінченною.

2. Тепер нехай $d_j = D(x_j)$, де $j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$d_j = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \tag{2}$$

– деякий поліном кільця $R[x_1, \ldots, x_n]$. Позаяк $ax_j = x_j a$ та $D(a)x_j = x_j D(a)$ для кожного $a \in R$, то $aD(x_j) = D(x_j)a$, а звідси

$$\sum a a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \sum a_{i_1 \ldots i_n} a x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

Оскільки $a$ довільний елемент із $R$, то $a_{i_1 \ldots i_n} \in Z(R)$ для всіх коефіцієнтів полінома $d_j$. Це означає, що $d_j \in Z(R)[x_1, \ldots, x_n]$.

Підсумовуючи 1 та 2, легко зрозуміти, що відображення

$$\varphi : DerR[x_1, \ldots, x_n] \to (DerR)^\infty \times Z(R)[x_1, \ldots, x_n]^n,$$

де $\varphi(D) = (\delta, d_1, \ldots, d_n)$, $\delta$ – локально скінченна родина (1) диференціювань кільця $R$, а $d_j$ – поліном (2), є ізоморфізмом лівих $Z(R)$-модулів. Твердження доведено.

**Твердження 1.4.** *Нехай $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ – кільце формальних степеневих рядів від $n$ комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем $R$. Тоді справджується ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$DerR[[x_1, \ldots, x_n]] \cong (DerR)^\infty \times Z(R)[[x_1, \ldots, x_n]]^n.$$

*Доведення* аналогічне як і для твердження 1.3. Тільки родина $\delta$ (див.(1)) не обов'язково буде локально скінченною. Замість полінома $d_j$ (див.(2)) матимемо формальний ряд

$$d_j = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}.$$

Нагадаємо [20], якщо $DerA = \{0\}$, то кільце $A$ називається диференційно тривіальним.

**Наслідок 1.5.** *Якщо $A$ – диференційно тривіальне кільце, то*

$$DerA[x_1,\ldots,x_n] \cong A[x_1,\ldots,x_n]^n$$

*та*

$$DerA[[x_1,\ldots,x_n]] \cong A[[x_1,\ldots,x_n]]^n.$$

**2.** Нехай $\sigma \in EndR$, $\delta \in DerR$. Диференціювання кільця скручених поліномів ендоморфного типу $R[x,\sigma]$ і кільця скручених поліномів диференційного типу $R[x,\delta]$ вивчав В.Д.Бурков[15]. Ми розглянемо диференціювання кільця скручених формальних степеневих рядів ендоморфного типу

$$R[[x,\sigma]] = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R,\ i\in\mathbb{N}_0\right\}\ (\sigma\in EndR),$$

в якому множення індукується співвідношенням $xa = a^\sigma x$ для $a \in R$; та диференціювання кільця скручених формальних степеневих рядів диференційного типу

$$R[[x,\delta]] = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R,\ i\in\mathbb{N}_0\right\}\ (\delta\in DerR),$$

в якому множення індукується співвідношенням $xa = ax + \delta(a)$ для $a \in R$. Крім того, розглянемо диференціювання кільця поліномів Лорана

$$R[x,x^{-1},\sigma] = \left\{\sum_{i=-n}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R,\ n\in\mathbb{N}_0,\ \text{де } i=-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n\right\}$$

і кільця формальних степеневих рядів Лорана

$$R[[x,x^{-1},\sigma]] = \left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R,\ i\in\mathbb{Z}\right\}\ (\sigma\in AutR),$$

в яких множення визначається співвідношенням $xa = a^\sigma x$ для всіх $a \in R$.

Наступний результат анонсовано в [21].

**Твердження 2.1.** *Нехай $R$ – кільце, $\sigma \in AutR$. Кожному диференціюванню $D$ кільця скручених формальних степеневих рядів $R[[x,\sigma]]$ взаємно однозначно відповідає пара $(\delta, d)$, родина $\delta = \{\delta_i | i\in\mathbb{N}_0\}$ і ряд $d = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x,\sigma]]$, які задовольняють умови:*

*а)* $\delta_i$ – $\sigma^i$*-диференціювання кільця* $R$ $(i \in \mathbb{N}_0)$*;*

*б)* $d_0 a = a^\sigma d_0$*;*

*в)* $\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}$ – *внутрішнє* $\sigma^{k-1}$*-диференціювання кільця* $R (k \in \mathbb{N})$*;*

*г)* $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$.

*Доведення.* Нехай $D \in DerR[[x, \sigma]]$, де $\sigma \in AutR$. Тоді, як і в доведенні твердження 1.3,

$$D(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r) x^i \qquad (r \in R),$$

де $\delta = \{\delta_i | i \in \mathbb{N}_0\}$ – родина $\sigma^k$-диференціювань кільця $R$.

Нехай $d = D(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$. Продиференціювавши рівність $xa = a^\sigma x$, де $a \in R$, отримуємо

$$D(x)a + xD(a) = D(xa) = D(a^\sigma x) = D(a^\sigma)x + a^\sigma D(x),$$

звідки

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \right) a + x \left( \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a) x^i \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a^\sigma) x^i \right) x + a^\sigma \left( \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \right).$$

По-іншому це можна записати так:

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i a^{\sigma^i} x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)^\sigma x^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a^\sigma) x^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} a^\sigma d_i x^i$$

або

$$\begin{gathered} d_0 a = a^\sigma d_0, \\ d_1 a^\sigma + \delta_0(a)^\sigma = \delta_0(a^\sigma) + a^\sigma d_1, \\ d_2 a^{\sigma^2} + \delta_1(a)^\sigma = \delta_1(a^\sigma) + a^\sigma d_2, \\ \dots \\ d_n a^{\sigma^n} + \delta_{n-1}(a)^\sigma = \delta_{n-1}(a^\sigma) + a^\sigma d_n, \\ \dots \end{gathered}$$

Позначимо $a^\sigma$ через $c$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$d_k c^{\sigma^{k-1}} + \left( \delta_{k-1} \left( c^{\sigma^{-1}} \right) \right)^\sigma = c d_k + \delta_{k-1}(c)$$

або

$$d_k c^{\sigma^{k-1}} - c d_k = \delta_{k-1}(c) - \delta_{k-1} \left( c^{\sigma^{-1}} \right)^\sigma,$$

тобто $\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}$ – внутрішнє $\sigma^{k-1}$-диференціювання кільця $R$. Нехай $x = m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})$. Якщо $(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})(c) = xc^{\sigma^{k-1}} - cx$, то отримуємо, що $(d_k - x)c^{\sigma^{k-1}} = c(d_k - x)$. Твердження доведено.

**Твердження 2.2.** *Нехай $R[x, x^{-1}, \sigma]$ – кільце поліномів Лорана від змінної $x$, $\sigma \in AutR$ і $xa = a^\sigma x$ для будь-якого $a \in R$. Кожному диференціюванню $D \in Der\ R[x, x^{-1}, \sigma]$ взаємно-однозначно відповідає пара $(\Sigma, d)$, де родина $\Sigma = \{\delta_i |\ i \in \mathbb{Z}\}$ і поліном $d \in R[x, x^{-1}, \sigma]$ мають властивості:*

*а) $\delta_i$ – $\sigma^i$-диференціювання кільця $R$;*

*б) $\Sigma$ – локально скінченна родина диференціювань;*

*в) $\delta_i \circ \sigma = \sigma \circ \delta_i$ майже для всіх $i \in \mathbb{Z}$;*

*г) $\delta_i - \sigma \circ \delta_i \circ \sigma^{-1} \in IDer(R, \sigma^i)$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$;*

*ґ) $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ для довільного $k$ $(-n \leqslant k \leqslant n)$.*

*Доведення.* Нехай $D$ – яке-небудь диференціювання кільця $R[x, x^{-1}, \sigma]$, $a \in R$. Оскільки $D(a) \in R[x, x^{-1}, \sigma]$, то запишемо $D(a)$ у вигляді формально степеневого ряду

$$D(a) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i,$$

де $\delta_i(a) \in R$ та $\delta_i(a) = 0$ для майже всіх індексів $i \in \mathbb{Z}$. Крім того, $D(x) \in R[x, x^{-1}, \sigma]$, а отже,

$$D(x) = d = \sum_{i=-n}^{n} d_i x^i$$

для певних елементів $d_i \in R$ $(i = -n, \ldots, 0, \ldots, n)$.

а) Позаяк $D \in Der\ R[x, x^{-1}, \sigma]$, то

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a+b) x^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(b) x^i$$

та

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(ab) x^i = \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i \right) b + a \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(b) x^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) b^{\sigma^i} x^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} a\delta_i(b) x^i$$

для будь-яких $a, b \in R$.

б) Також родина $\Sigma$ локально скінченна, оскільки $D(a)$ є поліномом Лорана, а тому майже всі його коефіцієнти дорівнюють нулеві.

в) Диференціюючи співвідношення $xa = a^\sigma x$, отримуємо $da + xD(a) = a^\sigma d + D(a^\sigma)x$ або

$$\left( \sum_{i=-n}^{n} d_i x^i \right) a + x \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a) x^i = a^\sigma \sum_{i=-n}^{n} d_i x^i + \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(a^\sigma) x^i \right) x.$$

Звідси легко випливає, що

$$(\delta_{k-1}(a))^\sigma = \delta_{k-1}(a^\sigma),\ k \leqslant -n-1 \text{ або } k \geqslant n+1, \tag{3}$$

$$d_k a^{\sigma^k} + (\delta_{k-1}(a))^\sigma = a^\sigma d_k + \delta_{k-1}(a^\sigma),\ -n \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Як бачимо, зі співвідношення (3) випливає умова (в).

г) Зробивши у співвідношеннях (3)-(4) заміну $c = a^\sigma$, отримаємо

$$(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})(c) = 0,\ \text{де } k \leqslant -n-1 \text{ або } k \geqslant n+1,$$

$$(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1})(c) = d_k c^{\sigma^{k-1}} - c d_k,\ \text{де } -n \leqslant k \leqslant n, \tag{5}$$

а це означає, що $\delta_i - \sigma \circ \delta_i \circ \sigma^{-1} \in IDer(R, \sigma^i)$ для всіх індексів $i \in \mathbb{Z}$.

ґ) Із рівності (5) випливає, що $d_k$ є одним з тих елементів, які породжують внутрішнє диференціювання $\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}$ для $-n \leqslant k \leqslant n$. Отож, $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ для довільного $k$, $-n \leqslant k \leqslant n$.

Отже, диференціюванню $D \in Der\ R[x, x^{-1}, \sigma]$ відповідає пара $(\Sigma, d)$, яка задовольняє умови (а)-(ґ). Легко з'ясувати, що навпаки також правильно. Твердження доведено.

**Твердження 2.3.** *Нехай $R[[x, x^{-1}, \sigma]]$ – кільце формальних степеневих рядів Лорана від змінної $x$, $\sigma \in AutR$ і $xa = a^\sigma x$ для будь-якого $a \in R$. Кожному диференціюванню $D \in Der\ R[[x, x^{-1}, \sigma]]$ взаємно однозначно відповідає пара $(\Sigma, d)$, де родина $\Sigma = \{\delta_i |\ i \in \mathbb{Z}\}$ і поліном $d \in R[x, x^{-1}, \sigma]$ мають такі властивості:*

*а) $\delta_i$ – $\sigma^i$-диференціювання кільця $R$;*

*б) $\delta_i - \sigma \circ \delta_i \circ \sigma^{-1} \in IDer(R, \sigma^i)$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$;*

*в) $d_k - m(\delta_{k-1} - \sigma \circ \delta_{k-1} \circ \sigma^{-1}) \in Z_{k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$.*

*Доведення* отримуємо тим самим способом, що й для кільця поліномів Лорана $R[x, x^{-1}, \sigma]$.

**Твердження 2.4.** *Кожному диференціюванню $D$ кільця $R[[x, \delta]]$ скручених формальних степеневих рядів диференційного типу від одної змінної $x$ взаємно однозначно відповідає пара $(\Delta, d)$, де $\Delta = \{\delta_i |\ i \in \mathbb{N}_0\}$ і ряд $d = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \in R[[x, \delta]]$ мають властивості:*

*а) $\delta_i(rt) = \delta_i(r)t + r\delta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+j}^j \delta_{i+j}(r)\delta^j(t)$ для будь-яких $r, t \in R$ та $i \in \mathbb{N}_0$;*

*б) $d_i a + \delta(\delta_i(a)) + \sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^j d_{i+j} \delta^j(a) = a d_i + \delta_i(\delta(a))$ для всіх $i \in \mathbb{N}_0,\ a \in R$.*

*Доведення.* Нехай $D$ – яке-небудь диференціювання кільця $R[[x, \delta]]$, $r, t \in R$. Тоді $D(r) \in R[[x, \delta]]$, тому

$$D(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r) x^i$$

для певної підмножини $\{\delta_i(r)|\ i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq R$.

Нехай $i \in \mathbb{N}_0$. Тоді $\delta_i(r+t) = \delta_i(r) + \delta_i(t)$ та

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(rt)x^i = D(rt) = D(r)t + rD(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r)x^i\right) t + r\left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(t)x^i\right). \qquad (6)$$

Оскільки

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r)x^i\right) t + r\left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(t)x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(r) \sum_{j=0}^{i} C_i^j \delta^j(t)x^{i-j} + \sum_{i=0}^{\infty} r\delta_i(t)x^i,$$

то внаслідок (6) отримуємо

$$\delta_i(rt) = \delta_i(r)t + r\delta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+j}^j \delta_{i+j}(r)\delta^j(t)$$

для всіх $i \in \mathbb{N}_0$.

Нехай $d = D(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \in R[[x,\delta]]$. Продиференціювавши рівність $xa = ax + \delta(a)$ $(a \in R)$, маємо

$$D(x)a + xD(a) = D(xa) = D(ax + \delta(a)) = D(a)x + aD(x) + D(\delta(a)),$$

а звідси

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\right) a + x\left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)x^i\right) x + a\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(\delta(a))x^i,$$

тобто

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i \sum_{j=0}^{i} C_i^j \delta^j(a)x^{i-j} + \sum_{i=0}^{\infty}(\delta_i(a) + \delta(\delta_i(a)))x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(a)x^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty}(ad_i + \delta_i(\delta(a)))x^i.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів змінної $x$, отримуємо

$$d_i a + \delta(\delta_i(a)) + \sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^j d_{i+j}\delta^j(a) = ad_i + \delta_i(\delta(a))$$

для всіх $i \in \mathbb{N}_0$. Твердження доведено.

**3.** У цій частині дослідимо, за яких умов кільце поліномів Лорана буде лівим (правим) дуо-кільцем. Нагадаємо, лівим (правим) дуо-кільцем називається кільце, в якому кожен лівий (правий) ідеал є двобічним.

Дуо-кільця скручених поліномів вивчав Г. Маркс [24], який показав, що кільце скручених поліномів $R[x,\sigma]$, де $\sigma \in AutR$, буде однобічним дуо-кільцем в тому і тільки в тому випадку, коли $R$ – комутативне кільце і $\sigma = id_R$. Цим узагальнено один результат із [25]. Для кільця скручених поліномів Лорана правильний такий результат.

**Теорема 3.1.** *Нехай $\sigma$ – автоморфізм кільця $R$ і $A = R[x, x^{-1}, \sigma]$. Тоді $A$ – ліве (відповідно праве) дуо-кільце в тому і тільки в тому випадку, коли $R$ – комутативне кільце і $\sigma = id_R$ – тотожне відображення.*

*Доведення.* Наведемо доведення тільки для лівих дуо-кілець.

($\Rightarrow$) Нехай $A$ – ліве дуо-кільце, тобто $fA \subseteq Af$ для будь-якого $f \in A$. Припустимо, що $\sigma \neq id_R$. Тоді існує такий елемент $a \in R$, що $\sigma(a) \neq a$. Для полінома $f(x) = 1 + ax + x^2 \in A$ отримуємо

$$(1 + ax + x^2)x = x + ax^2 + x^3 \in A(1 + ax + x^2),$$

тобто знайдеться поліном $\sum_{i=-m}^{m} a_i x^i \in A$, для якого

$$x + ax^2 + x^3 = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i x^i\right)(1 + ax + x^2),$$

або рівносильно

$$x + ax^2 + x^3 = \sum_{i=-m}^{m} a_i x^i + \sum_{i=-m}^{m} a_i \sigma^i(a) x^{i+1} + \sum_{i=-m}^{m} a_i x^{i+2}.$$

Звідси одержуємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}
a_{-m} = 0, \\
a_{-m+1} + a_{-m}\sigma^{-m}(a) = 0, \\
a_{-m+2} + a_{-m+1}\sigma^{-m+1}(a) + a_{-m} = 0, \\
a_{-m+3} + a_{-m+2}\sigma^{-m+2}(a) + a_{-m+1} = 0, \\
\dots \\
a_0 + a_{-1}\sigma^{-1}(a) + a_{-2} = 0, \\
a_1 + a_0 a + a_{-1} = 1, \\
a_2 + a_1\sigma(a) + a_0 = a, \\
a_3 + a_2\sigma^2(a) + a_1 = 1, \\
a_4 + a_3\sigma^3(a) + a_2 = 0, \\
\dots \\
a_m + a_{m-1}\sigma^{m-1}(a) + a_{m-2} = 0, \\
a_m\sigma^m(a) + a_{m-1} = 0, \\
a_m = 0.
\end{gathered}$$

З неї випливає, що $a - \sigma(a) = 0$, а це суперечить припущенню. Отже, $\sigma = id_R$.

Нехай $a, b \in R$. Тоді $(x^{-1} + a + x)b \in A(x^{-1} + a + x)$, а це означає, що існує такий поліном $\sum_{i=-m}^{m} c_i x^i \in A$, що

$$bx^{-1} + ab + bx = \left(\sum_{i=-m}^{m} c_i x^i\right)(x^{-1} + a + x).$$

З останньої рівності отримуємо систему

$$\begin{gathered}
c_{-m} = 0,\\
c_{-m+1} + c_{-m}\sigma^{-m}(a) = 0,\\
c_{-m+2} + c_{-m+1}\sigma^{-m+1}(a) + c_{-m} = 0,\\
c_{-m+3} + c_{-m+2}\sigma^{-m+2}(a) + c_{-m+1} = 0,\\
\dots\\
c_{-1} + c_{-2}\sigma^{-2}(a) + c_{-3} = 0,\\
c_0 + c_{-1}\sigma^{-1}(a) + c_{-2} = b,\\
c_1 + c_0 a + c_{-1} = ab,\\
c_2 + c_1\sigma(a) + c_0 = b,\\
a_3 + c_2\sigma^2(a) + c_1 = 0,\\
\dots\\
c_m + c_{m-1}\sigma^{m-1}(a) + c_{m-2} = 0,\\
c_m\sigma^m(a) + c_{m-1} = 0,\\
c_m = 0,
\end{gathered}$$

з якої

$$c_{-m} = \dots = c_{-1} = c_1 = \dots = c_m = 0,\ c_0 = b,\ ba = ab,$$

що й треба було довести.

($\Leftarrow$) очевидно. Теорема доведена.

---


1. *Бурбаки Н.* Алгебра. Полиномы и поля. Упорядоченные группы.– М., 1965.

2. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра.– М., 1963. Т.1.

3. *McConnell J.C., Robson J.C.* Noncommutative Noetherian rings. Graduate Stud. in Math., 30. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

4. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли.– М., 1964.

5. *Baclawski K.* Automorphisms and derivations of incidence algebras// Proc. Amer. Math. Soc.– 1972.– Vol. 36, N 2.– P.351-356.

6. *Smith M.K.* Derivation of group algebras of finitely generated, torsion-free, nilpotent group// Houston J. Math.– 1978.– Vol. 4, N 2.– P.277-288.

7. *Бурков В.Д.* Дифференцирования групповых колец// Рукоп. деп. ВИНИТИ, N 2120-79 Деп.– М., 1979.

8. *Spiegel E.* Derivations of integral group rings// Comm. Algebra.– 1994.– Vol. 22, N 8.– P.2955-2959.

9. *Murase I.* Derivations of quasi-matrix algebras// Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo.– 1964.– Vol. 14, N 2.– P.157-164.

10. *Бурков В.Д.* Дифференцирования обобщенных квазиматричных колец// Мат. заметки.– 1978.– Том 24, N 1.– С.111-122.

11. *Djokovic D.Z.* Derivations and automorphisms of exterior algebras// Can. J. Math.– 1978.– Vol. 30, N 6.– P.1336-1344.

12. *Sprengelmeier C.* Derivationen and Automorphismen von Algebren, in denen die Gleichung $x^2 = 0$ nur trivial losbar ist// Manuscripta Math.– 1979.– Bd. 28, N 4.– S.431-436.

13. *Costa R.* On the derivations of dametic algebras for poliploidy with multiple alleles// Bol. Soc. Bras. Mat.– 1982.– Vol. 13, N 2.– P.69-81.

14. *Benkart G., Osborn J.M.* The derivation algebra of a real division algebra// Amer. J. Math.– 1984.– Vol. 103, N 6.– P.1135-1160.

15. *Nowicki A.* Polynomial derivations and their rings of constants.– N.Copernikus University, Toruń.– 1994.

16. *Бурков В.Д.* Дифференцирования колец многочленов// Вестник Москов. ун-та. Сер. мех.-мат.– 1981.– N 2.– С.51-52.

17. *Osborn J.M., Passman D.S.* Derivations of skew polynomial rings// J.Algebra.– 1995.– Vol.176.– P.417-448.

18. *Nowicki A.* Derivations of Ore extensions of the polynomial rings in one variable// Commun. Algebra.– 2004.– Vol.32, N 9.– P.3651-3672.

19. *Бурков В.Д.* Дифференцирования колец многочленов// Рук. деп. ВИНИТИ, N 1883-80 Деп.– М., 1980.

20. *Artemovych O.D.* Differentially trivial and rigid rings of finite rank// Period. Math. Hungarica.– 1998.– Vol. 36, N 1.– P.1-16.

21. *Артемович О.Д.* Диференціювання формальних степеневих рядів// В кн.: III Всеукраїнська наукова конференція „Нелінійні проблеми аналізу“. Тези доп.– Івано-Франківськ, 2003.– С.5.

22. *Hamaguchi N., Nakajima A.* Derivations of skew polynomial rings// Publ.Inst. Math. (Beograd).– 2002.– Vol. 72(88).– P.107-112.

23. *Lishchynsky I.I.* Derivations of polynomial rings and formal power series rings// В кн.: IX Белорусская математическая конференция: Тезисы докл., Ч. 2.– Гродно; 2004.– С.17-18.

24. *Marks G.* Duo ring and Ore extensions// J.Algebra.– 2004.– Vol. 280.– P.463-471.

25. *Hirano Y., Hong C.-Y., Kim J.-Y., Park J.K.* On strongly bounded rings and duo rings// Commun. Algebra.– 1995.– Vol.23, N 6.– P.2199-2214.

## ON SKEW POLYNOMIAL RINGS AND SKEW FORMAL POWER SERIES RINGS

**Orest Artemovych, Ivan Lishchynskyi**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

We study derivations of (Laurent) polynomial rings and (Laurent) formal power series rings. We prove that a Laurent polynomial ring $R[x, x^{-1}, \sigma]$ $(\sigma \in AutR)$ is left duo if and only if $R$ is commutative and $\sigma$ is trivial.

*Key words:* derivation, (Laurent) polynomial ring, skew (Laurent) formal power series ring, duo-ring.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2005

Прийнята до друку 02.11.2006