ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 134–147
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 134–147

УДК 517.53

ЗРОСТАННЯ І РОЗПОДІЛ НУЛІВ ТА ПОЛЮСІВ МЕРОМОРФНОЇ ФУНКЦІЇ В ОКОЛІ ІСТОТНО ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

Наталія СОКУЛЬСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: natalya.sokulska@gmail.com

Введено характеристику Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфної в зовнішності одиничного круга функції та доведено її основні властивості. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфних в зовнішності одиничного круга функцій F у термінах коефіцієнтів Фур'є $\log |F|$. Знайдено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для функцій, які мають мероморфне продовження в $\mathbb{C}$. Описано послідовності нулів голоморфних і полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Ключові слова: голоморфна функція, мероморфна функція, функція скінченного λ-типу, послідовність зі скінченною λ-щільністю, λ-допустима послідовність.

1. Вступ. У класичній теорії Неванлінни вивчають розподіл значень мероморфних функцій у всій площині. Ми будуємо аналог цієї теорії для функцій мероморфних лише в деякому поколеному околі фіксованої точки. Без втрати загальності вважатимемо цю точку ∞, а її околом зовнішність деякого круга, зокрема, одиничного.

Для функцій мероморфних зовні одиничного круга розв'язано такі задачі:

i) доведено аналог формули Єнсена;
ii) введено характеристику Неванлінни $T_0(r, F)$;
iii) проведено порівняння $T_0(r, F)$ і $T(r, F)$ для функцій, які мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;
iv) описано клас мероморфних при $|z| \geqslant 1$ функцій F таких, що їхня характеристика Неванлінни $T_0(r, F) = O(\log r)$;
v) розглянуто класи функцій з довільним обмеженням на зростання їхніх неванліннових характеристик $T_0(r, F)$, що задаються додатними, неспадними, неперервними, необмеженими при $r \geqslant 1$ функціями λ;

vi) описано послідовності нулів голоморфних і полюсів мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій.

2. Теорема Єнсена для мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій. Нехай відмінна від тотожного нуля функція F – мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z:\ |z|\ \geqslant 1\}$. Нехай $n_0(t,F)$ – лічильна функція її полюсів у кільці $\{z:\ 1<\ |z|\ \leqslant t\}$. Позначимо

$$N_0(r,F)=\int\limits_1^r \frac{n_0(t,F)}{t}dt, \quad r\geqslant 1 \tag{1}$$

і

$$c_0(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt, \quad r\geqslant 1. \tag{2}$$

Наступна лема є аналогом теореми Єнсена.

Лема 1. *Нехай функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z:|z|\geqslant 1\}$. Тоді*

$$N_0(r,\frac{1}{F})-N_0(r,F)= \tag{3}$$

$$=c_0(r,F)-\frac{\log r}{\log r_0}c_0(r_0,F)+(\frac{\log r}{\log r_0}-1)c_0(1,F), \quad r\geqslant r_0>1.$$

Доведення. В [5] ми вивчали функції f мероморфні в замиканні півсмуги

$$S=\{s=\sigma+it:\ \sigma>0,\ 0\leqslant t<2\pi\}$$

такі, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geqslant 0$. Відобразивши $\overline{S}$ у зовнішність одиничного круга $\{z:|z|\geqslant 1\}$ за допомогою відображення $z=e^s$, отримаємо такі співвідношення між мероморфною в $\{z:|z|\geqslant 1\}$ функцією F та мероморфною в $\overline{S}$ функцією f такою, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geqslant 0$,

$$f(s)=F(e^s).$$

Очевидно, що за допомогою відображення $z=e^s, z=re^{it}, s=\sigma+it$ отримуємо співвідношення $r=e^\sigma$, а також

$$n_0(r,F)=n(\log r,f)=n(\sigma,f), \quad r\geqslant 1, \quad \sigma\in S, \tag{4}$$

де $n(\sigma,f)$ – лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику $\{\eta+it:0<\eta\leqslant\sigma, 0\leqslant t<2\pi\}$.

З огляду на (1)

$$N_0(r,F)=\int\limits_1^r \frac{n_0(t,F)}{t}dt= \tag{5}$$

$$=\int\limits_1^{e^\sigma}\frac{n(\log t,f)}{t}dt=\int\limits_0^\sigma n(\eta,f)d\eta=N(\sigma,f),$$

для $r\geqslant 1$ і $\sigma\geqslant 0$.

А також,

$$c_0(\sigma, f) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sigma+it)|dt = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(e^{\sigma+it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt = c_0(r, F), \quad r \geqslant 1.$$

Співвідношення, доведене в [5], є аналогом теореми Єнсена-Літтлвуда [2] для мероморфної в замиканні півсмуги S функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geqslant 0$

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = \tag{7}$$

$$= c_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)c_0(0, f), \quad \sigma \geqslant \sigma_0 > 0.$$

Із (7) та рівностей (5), (6), отримуємо (3). □

3. Характеристика Неванлінни мероморфних зовні одиничного круга функцій. Нехай відмінна від тотожного нуля функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z: \ |z| \ \geqslant 1\}$. Позначимо

$$m_0(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|F(re^{it})|dt,$$

де $x^+ = \max\{0, x\}$.

Означення 1. *Функція*

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0}m_0(r_0, F) + \tag{8}$$

$$+\left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right)m_0(1, F) + N_0(r, F), \quad r \geqslant r_0 > 1,$$

називається характеристикою Неванлінни функції F.

Елементарні властивості $T_0(r, F)$ описані в теоремі.

Теорема 1. *Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Тоді:*

i) $T_0(r_0, F) = 0$;
ii) $T_0(r, F)$ *невід'ємна, неспадна й опукла стосовно* $\log r$ *при* $r \geqslant r_0$;
iii) $T_0(r, F) = T_0(r, \frac{1}{F})$ *при* $r \geqslant r_0$.
iv) $T_0(r, F_1F_2) \leqslant T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r)$, $r \geqslant r_0$,
$T_0(r, F_1 + F_2) \leqslant T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r)$, $r \geqslant r_0$.

Доведення. Твердження i) негайно випливає з (8).

Далі, нехай F частка двох голоморфних функцій $H(z)$ і $G(z)$ в $\{z : |z| \geqslant 1\}$, $F = \frac{H}{G}$, де H і G не мають спільних нулів. Застосувавши (3) до G, отримаємо

$$N_0(r, \frac{1}{G}) = c_0(r, G) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0, G) + (\frac{\log r}{\log r_0} - 1)c_0(1, G) = N_0(r, F), \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

Зауважимо $(a - b)^+ + b = max(a, b)$. Тому, зважаючи на (8), характеристику Неванлінни $F = \frac{H}{G}$ можна записати так:

$$T_0(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(\log |H(re^{i\theta})|, \log |G(re^{i\theta})|)d\theta -$$
$$-\frac{\log r}{\log r_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(\log |H(r_0e^{i\theta})|, \log |G(r_0e^{i\theta})|)d\theta +$$
$$+\left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(\log |H(e^{i\theta})|, \log |G(e^{i\theta})|)d\theta, \quad r \geqslant r_0 > 1. \tag{9}$$

Позначимо

$$I(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(\log |H(re^{i\theta})|, \log |G(re^{i\theta})|)d\theta, \quad r \geqslant r_0 > 1. \tag{10}$$

Функція $u(z) = \max(\log |H(z)|, \log |G(z)|)$ є субгармонійною в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Тому $I(r, F)$ є опуклою стосовно $\log r$ [6, p. 28]. З рівностей (8), (9) і (10) отримуємо співвідношення

$$T_0(r, F) = I(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} I(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) I(1, F), \quad r \geqslant r_0. \tag{11}$$

Правий бік рівності (11) є сумою опуклої стосовно $\log r$ і лінійної $A \log r + B$ функцій. Тому $T_0(r, F)$ є опуклою стосовно $\log r$ для $r \geqslant r_0$.

З опуклості $I(r, F)$ стосовно $\log r$ випливає

$$I(r_0, F) \leqslant \frac{\log r - \log r_0}{\log r} I(1, F) + \frac{\log r_0}{\log r} I(r, F), \quad 1 < r_0 \leqslant r.$$

Отож,

$$0 \leqslant I(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} I(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) I(1, F), \quad 1 < r_0 \leqslant r.$$

З огляду на (11) отримуємо $T_0(r, F) \geqslant 0, \quad r \geqslant r_0$. Отже, $T_0(r, F)$ – невід'ємна.

Оскільки кожна опукла функція має похідну справа [6, c. 28], то

$$\lim_{r \to r_0+0} \frac{T_0(r, F) - T_0(r_0, F)}{\log r - \log r_0} = \lim_{r \to r_0+0} \frac{T_0(r, F)}{\log r - \log r_0} = T'_{0+}(r_0, f) \geqslant 0.$$

Оскільки ця похідна неспадна [6, p. 28], то $0 \leqslant T'_0(r_0, F) \leqslant T'_0(r, F), \quad r \geqslant r_0$. Тому характеристика (8) є неспадною при $r \geqslant r_0$, і властивість (ii) доведена.

Застосовуючи (3) до функції $\frac{1}{F}$, ми отримаємо

$$N_0(r,F) - N_0(r,\frac{1}{F}) = \tag{12}$$

$$= c_0(r,\frac{1}{F}) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0,\frac{1}{F}) + (\frac{\log r}{\log r_0} - 1) c_0(1,\frac{1}{F}), \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

Твердження (iii) випливає негайно з (12), (2) і властивості $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Використовуючи нерівності

$$\log^+ xy \leqslant \log^+ x + \log^+ y, \quad \log(x+y) \leqslant \log^+ x + \log^+ y + \log 2,$$

для додатних x, y і

$$n_0(r, F_1F_2) \leqslant n_0(r,F_1) + n_0(r,F_2), \quad n_0(r, F_1 + F_2) \leqslant n_0(r,F_1) + n_0(r,F_2),$$

отримаємо (iv), що завершує доведення. □

4. Зв'язок між $T_0(r,F)$ і класичною характеристикою Неванлінни $T(r,F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно подовжуються в $\mathbb{C}$. Якщо мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ функція F мероморфно продовжується в $\mathbb{C}$, то її класична характеристика Неванлінни $T(r,F)$ також визначена. Тоді

$$N(r,F) - N_0(r,F) =$$

$$= \int_0^r \frac{n(t,F) - n(0,F)}{t} dt + n(0,F)\log r - \int_1^r \frac{n_0(t,F)}{t} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{n(t,F) - n(0,F)}{t} dt + \int_1^r \frac{n(t,F) - n(0,F) - n_0(t,F)}{t} dt + n(0,F)\log r =$$

$$= N(1,F) + \int_1^r \frac{n(1,F)}{t} dt.$$

Оскільки $n(1,F) = n(t,F) - n_0(t,F)$ при $t \geqslant 1$ і $N(1,F) = \int_0^1 \frac{n(t,F)-n(0,F)}{t} dt$, тому $N(r,F) - N_0(r,F) = N(1,F) + n(1,F)\log r$ при $r \geqslant r_0 > 1$.

Отож,

$$T(r,F) - T_0(r,F) = N(r,F) + m(r,F) - \tag{13}$$

$$-N_0(r,F) - m_0(r,F) + \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0,F) - \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1,F) =$$

$$= N(1,F) + \log r \left[\frac{m_0(r_0,F) - m_0(1,F)}{\log r_0} + n(1,F)\right] + m_0(1,F), \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

Зауважимо, що

$$N(1,F) + m_0(1,F) = N(1,F) + m(1,F) = T(1,F), \quad r \geqslant r_0 > 1. \tag{14}$$

Використовуючи співвідношення (13) і (14), отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай мероморфна в* $\{z : |z| \geqslant 1\}$ *функція* F *має мероморфне продовження в* $\mathbb{C}$. *Тоді*

$$T_0(r,F) = T(r,F) - T(1,F) + \tag{15}$$
$$+\log r\left[\frac{m_0(1,F) - m_0(r_0,F)}{\log r_0} - n(1,F)\right], \quad r \geqslant r_0 > 1.$$

5. Випадок $T_0(r,F) = O(\log r)$**.** Розглянемо випадок

$$T_0(r,F) = O(\log r), \quad r \geqslant r_0. \tag{16}$$

Теорема 2. *Нехай* F *мероморфна в* $\{z : |z| \geqslant 1\}$ *функція. Властивість* $T_0(r,F) = O(\log r)$, $r \geqslant r_0$ *виконується тоді і лише тоді, коли*

$$F(z) = \mathcal{R}(z)e^{h(z)}, \tag{17}$$

де $\mathcal{R}(z)$ *– раціональна і* $h(z)$ *– голоморфна і обмежена при* $|z| \geqslant 1$ *функція.*

Доведення. Нехай F набуло вигляду (17). Тоді з огляду на властивість (iv) Теореми 1

$$T_0(r,F) \leqslant T_0(r,\mathcal{R}) + T_0(r,e^h) + O(\log r), \quad r \geqslant r_0. \tag{18}$$

Оскільки $m_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r)$ і $N_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r)$, $r \geqslant r_0$. Отримуємо

$$T_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r), \quad r \geqslant r_0. \tag{19}$$

Крім того, оскільки h є обмежена при $|z| \geqslant 1$, то $m_0(r,e^h) = O(1)$, $r \geqslant r_0$. Отож, отримуємо $T_0(r,e^h) = m_0(r,e^h) + O(\log r) = O(\log r)$, $r \geqslant r_0$. З цього співвідношення та з (18) і (19) випливає (16).

Навпаки, нехай виконується (16). Тоді

$$N_0(r,F) + m_0(r,F) = \tag{20}$$
$$T_0(r,F) + \frac{\log r}{\log r_0}m_0(r_0,F) - (\frac{\log r}{\log r_0} - 1)m_0(1,F) = O(\log r), \quad r \geqslant r_0.$$

Отже, $N_0(r,F) = O(\log r)$ і $m_0(r,F) = O(\log r)$, $\quad r \geqslant r_0$, бо обидва доданки зліва (20) невід'ємні.

Зі співвідношення $N_0(r,F) = O(\log r)$, $\quad r \geqslant r_0$ випливає, що $n_0(r,F) \leqslant const$. Тому число полюсів F скінченне.

За властивістю (iii) Теореми 1 кількість нулів F також скінченна.

Нехай $\mathcal{R}(z)$ – раціональна функція, нулі і полюси якої збігаються з нулями та полюсами F з урахуванням їхньої кратності.

Функція $g(z) = \frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}$ немає ні нулів, ні полюсів у $\{z : |z| \geqslant 1\}$. За Лемою 4.1. з [1] існує $m \in \mathbb{Z}$ таке, що гілка $\log G(z)$, $G(z) = z^{-m}g(z)$ визначена в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Розглянемо її ряд Лорана

$$\log G(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k. \tag{21}$$

Тоді

$$\log|G(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Re(c_k z^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k z^k + \overline{c}_{-k}\overline{z}^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k r^k + \overline{c}_{-k}r^{-k})e^{ik\theta}, \quad r \geqslant 1,$$

і

$$\frac{1}{2}(c_k r^k + \overline{c}_{-k} r^{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|G(re^{i\theta})|e^{-ik\theta}d\theta, \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Оскільки $|\log|G(z)|| \leqslant |\log|g(z)| + |m||\log z|, \quad |z| \geqslant 1$, то зі співвідношень (16) і (22) випливає

$$c_k r^k + \overline{c}_{-k} r^{-k} = O(\log r), \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Оскільки $r \geqslant 1$, то співвідношення (23) виконується тоді і лише тоді, коли $c_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тому ряд Лорана (21) можна записати так:

$$\log G(z) = \log\left(z^{-m}\frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}\right) = c_0 + \frac{\overline{c}_{-1}}{z} + ... + \frac{\overline{c}_{-k}}{z^k} + ..., \quad k \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$c_0 + \frac{\overline{c}_{-1}}{z} + ... + \frac{\overline{c}_{-k}}{z^k} + ... = h(z), \quad |z| \geqslant 1.$$

Тоді

$$\log\left(z^{-m}\frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}\right) = h(z), \quad |z| \geqslant 1. \tag{24}$$

Оскільки ряд Лорана абсолютно збіжний на $\{z : |z| = 1\}$, то отримаємо $|h(z)| = |c_0| + |c_{-1}| + ... + |c_{-k}| + ... = const$.

Отож, з (24) випливає

$$F(z) = z^m \mathcal{R}(z) e^{h(z)},$$

де $h(z)$ обмежена при $|z| \geqslant 1$, що завершує доведення. □

6. Коефіцієнти фур'є мероморфної в зовнішності одиничного круга функції. Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Припустимо, що F не має ні нулів, ні полюсів на $|z| = 1$.

Означення 2. *k-м коефіцієнтом Фур'є функції $\log|F(re^{it})|$ називається*

$$c_k(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|F(re^{it})|dt, \quad r \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 2. *Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : 1 \leqslant |z| < t, t > 1\}$. Нехай $\{a_j\}$ послідовність нулів F в $\{z : 1 \leqslant |z| < t, t > 1\}$ і $\{b_j\}$ – послідовність її полюсів. Нехай F не має ні нулів, ні полюсів на колі $\{z : |z| = 1\}$. Тоді виконуються такі співвідношення:*

$$c_k(r, F) = \frac{r^k}{2k}\alpha_k(F) - \frac{r^{-k}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(F) + \tag{25}$$
$$+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\geqslant 1}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_j}}{r}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{|b_j|\geqslant 1}\left[\left(\frac{r}{b_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{b_j}}{r}\right)^k\right],$$
$$c_{-k}(r, F) = \overline{c}_k(r, F), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\alpha_k(F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})}dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Найперше нагадаємо результат, доведений в [5]. Нехай f, $f \not\equiv 0$, мероморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : 0 < \eta \leqslant \sigma,\ 0 \leqslant t < 2\pi\}$ функція така, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Нехай $\{s_j\}$ – послідовність нулів f в R_σ і $\{p_j\}$ – послідовність її полюсів. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ.

Приймемо

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma + it)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 3 ([5]). *За вище зроблених припущень виконуються такі співвідношення:*

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma}}{2k}\alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(f) +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{p_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c}_k(\sigma, f), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

де $\alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Доведення леми 2. Використовуючи співвідношення $z = re^{it} = e^s = e^{\sigma+it}$ і $f(s) = F(e^s)$, отримуємо

$$\alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})}dt = \alpha_k(F), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{27}$$

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma + it)|dt = \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|F(re^{it})|dt = c_k(r, F), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Застосовуючи цю ж підстановку до (26), отримуємо рівності (25), де $c_k(r, F)$ і $\alpha_k(F)$ визначені співвідношеннями (28), (27), відповідно.

7. Мероморфні функції скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Означення 3. *Додатна, неспадна, неперервна і необмежена при $r > 1$ функція $\lambda(r)$ називається функцією зростання.*

Означення 4. *Нехай $\lambda(r)$ функція зростання і F мероморфна в $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Функція F називається функцією скінченного λ-типу, якщо існують додатні сталі $A > 0$, $B > 0$ такі, що $T(r, F) \leqslant A\lambda(Br)$, $r \geqslant r_0 > 1$.*

Позначимо через $\Lambda(\infty)$ клас мероморфних функцій скінченного λ-типу в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ і через $\Lambda_H(\infty)$ – клас голоморфних функцій скінченного λ-типу в $\{z : |z| \geqslant 1\}$.

Перш ніж перейти до опису послідовностей нулів функції з класу $\Lambda_H(\infty)$, нагадаємо означення з [5].

Означення 5 ([5]). *Нехай $\lambda_1(\sigma)$ функція зростання і f – мероморфна в $\overline{S}$, $S = \{\sigma + it, \sigma > 0, 0 \leqslant t < 2\pi\}$ така, що $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma)$. Функція f називається функцією скінченного λ_1-типу, якщо $T(\sigma, f) \leqslant A\ \lambda_1(\sigma + B)$, для деяких додатних сталих $A > 0, B > 0$ і всіх σ, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, де $T(\sigma, f)$ характеристика Неванлінни функції f.*

Позначимо через $\Lambda(S)$ клас мероморфних функцій скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$ і через $\Lambda_H(S)$ клас голоморфних функцій скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$.

Лема 4. *Голоморфна функція F в $\{z : |z| \geqslant 1\}$ є функцією скінченного λ-типу тоді і лише тоді, коли функція $f(s) = F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \quad \sigma > 0$.*

Доведення. Нехай $F \in \Lambda_H(\infty)$. Це означає, що $T_0(r, F) \leqslant A\lambda(Br)$ для деяких сталих $A, B > 0$ і всіх $r \geqslant r_0$.

Використовуючи вище описані співвідношення $z = re^{it} = e^s = e^{\sigma+it}$ і $F(z) = F(e^s) = f(s)$, отримаємо

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1, F) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt - \frac{\log r}{\log r_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(r_0 e^{it})| dt +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(e^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma + it)| dt -$$

$$- \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0 + it)| dt + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(it)| dt = T(\sigma, F), \quad \sigma \geqslant \sigma_0.$$

Оскільки $T_0(r, F) \leqslant A\lambda(Br)$ для деяких сталих $A, B > 0$ і всіх $r \geqslant r_0$, то $T(\sigma, f) \leqslant A\lambda(Be^\sigma) = A\lambda(e^{\sigma + \log B}) = A\lambda_1(\sigma + C)$, де $C = \log B$.

Навпаки, якщо $T(\sigma, f) \leqslant A\lambda_1(\sigma + C)$ для деяких $A, C > 0$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, тоді $T_0(r, F) \leqslant A\lambda_1(\log r + C) = A\lambda_1(\log r + \log e^C) = A\lambda_1(\log e^C \cdot r) = A\lambda(Br)$, де $B = e^C$. □

8. Послідовності нулів голоморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга. Нехай $Z = \{z_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \geqslant 1\}$. Через $n(t, Z)$ позначимо лічильну функцію послідовності Z в кільці $\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant t\}$.

Нехай λ – функція зростання.

Означення 6. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ із $\{z : |z| \geqslant 1\}$ має скінченну λ-щільність, якщо*

$$N(r, Z) \leqslant A\lambda(Br), \tag{29}$$

для деяких додатних сталих A, B і всіх r, $r \geqslant 1$, де $N(r, Z) = \int\limits_1^r \frac{n(t,Z)}{t} dt$.

Означення 7. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ із $\{z : |z| \geqslant 1\}$ називається λ-допустимою, якщо вона має скінченну λ-щільність й існують додатні сталі A, B такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1 < r \leqslant r_2} \left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для всіх r_1, r_2, $r_0 \leqslant r_1 < r_2$ і кожного $k \in \mathbb{N}$.

Крім того, для послідовностей комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ із $\overline{S}$ аналогічно визначаються такі поняття.

Означення 8. *Послідовність комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$ має скінченну λ_1-щільність, якщо існують додатні сталі A, B такі, що*

$$N(\sigma, Q) \leqslant A\lambda_1(\sigma + B), \quad \sigma \geqslant \sigma_0 > 0,$$

де

$$N(\sigma, Q) = \int\limits_0^\sigma n(\eta, Q) d\eta,$$

$n(\eta, Q)$ – кількість членів послідовності Q в прямокутнику R_η і $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.

Означення 9. *Послідовність комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$ називається λ_1-допустимою, якщо вона має скінченну λ_1-щільність та існують додатні сталі A, B такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1 < Re s_j \leqslant \sigma_2} \left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \leqslant \frac{A\lambda_1(\sigma_1 + B)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{A\lambda_1(\sigma_2 + B)}{e^{k\sigma_2}},$$

$k \in \mathbb{N}$ і $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2$, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.

Наступна теорема описує послідовності нулів функцій із класу $\Lambda_H(\infty)$.

Теорема 3. *Для того, щоб послідовність Z із $\{z : |z| \geqslant 1\}$ була послідовністю нулів функції з $\Lambda_H(\infty)$ необхідно і достатньо, щоб вона була λ-допустимою.*

Перше, ніж доводити цю теорему, доведемо таке твердження.

Лема 5. *Нехай $Z = \{z_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \geqslant 1\}$ і $Q = \{s_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\overline{S}$ таких, що $z_j = e^{s_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Послідовність $\{z_j\}$ є λ-допустимою тоді і лише тоді, коли послідовність $\{s_j\}$ є λ_1-допустимою, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.*

Доведення. Нехай послідовність комплексних чисел $\{z_j\}$ є λ-допустимою. Тоді виконуються такі нерівності:

$$N_0(r,Z) \leqslant A\lambda(Br)$$

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1<r\leqslant r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k}+\frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для деяких додатних сталих A, B і всіх r_1, r_2, $r_0 \leqslant r_1 < r_2$ та кожного $k \in \mathbb{N}$. Приймемо в обох нерівностях $z = e^s$, $z = re^{it}$, де $e^{\sigma+it} = re^{it}$, $\sigma = \log r$, і використаємо співвідношення (5). Отож, отримаємо

$$N_0(r,Z) = N(\sigma,Q) \leqslant A\lambda(Be^\sigma) = A\lambda(e^{\sigma+\log B}) = A\lambda_1(\sigma+D)$$

і

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1<r\leqslant r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| = \frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1<Res_j\leqslant\sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \leqslant \frac{C\lambda(e^{\sigma_1+\log D})}{e^{k\sigma_1}}+\frac{C\lambda(e^{\sigma_2+\log D})}{e^{k\sigma_2}} =$$

$$= \frac{C\lambda_1(\sigma_1+\widetilde{A})}{e^{k\sigma_1}}+\frac{C\lambda_1(\sigma_2+\widetilde{A})}{e^{k\sigma_2}},$$

для деяких $A, B, C, D > 0$, $\widetilde{A} = \log D$, $D = \log B$ і всіх σ_1, σ_2, $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2$, для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Отже, $\{s_j\}$ задовольняє означення λ_1-допустимості.

Нехай тепер $\{s_j\}$ – λ_1-допустима. Аналогічними міркуваннями отримуємо λ-допустимість послідовності $\{z_j\}$, $z_j = e^{s_j}$ із $\{z : |z| \geqslant 1\}$.

Доведення теореми 3. Нехай $\{z_j\}$ – послідовність нулів із $\{z : |z| \geqslant 1\}$ голоморфної функції F скінченного λ-типу. Зважаючи на лему 4, отримаємо, що голоморфна функція $f(s) = F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу, де $\lambda_1(s) = \lambda(e^s)$, $\sigma > 0$. Нехай послідовність $Q = \{s_j\}, e^{s_j} = z_j$ є послідовністю нулів голоморфної функції $f \in \Lambda_H$.

Розглянемо різницю

$$\frac{c_k(\sigma_2,f)}{e^{k\sigma_2}}-\frac{c_k(\sigma_1,f)}{e^{k\sigma_1}} = \frac{\alpha_k e^{k\sigma_2}-\overline{\alpha_{-k}}e^{-k\sigma_2}}{2ke^{k\sigma_2}}+\frac{1}{2ke^{k\sigma_2}}\left[\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\sigma_2}}{e^{s_j}}\right)^k-\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k\right]-$$

$$-\frac{\alpha_k e^{k\sigma_1}-\overline{\alpha_{-k}}e^{-k\sigma_1}}{2ke^{k\sigma_1}}-\frac{1}{2ke^{k\sigma_1}}\left[\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\sigma_1}}{e^{s_j}}\right)^k-\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{\overline{\alpha_{-k}}}{2k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}-\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}\right]+\frac{1}{2k}\left[\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\frac{1}{(e^{s_j})^k}-\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\frac{1}{(e^{s_j})^k}\right]+$$

$$+\frac{1}{2ke^{k\sigma_1}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k-\frac{1}{2ke^{k\sigma_2}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k,$$

де $0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2$.

Отримаємо

$$\frac{1}{k}\sum_{\sigma_1<\Re s_j\leqslant\sigma_2}\frac{1}{(e^{s_j})^k}=\frac{2c_k(\sigma_2,f)}{e^{k\sigma_2}}-\frac{2c_k(\sigma_1,f)}{e^{k\sigma_1}}+\frac{\overline{\alpha_{-k}}}{k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}-\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+ \\ +\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k-\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k. \tag{30}$$

Оскільки в прямокутниках $R_{\sigma_i}, i=1,2$, для деяких сталих $A_1, B_1>0$ виконується

$$\sum_{s_j\in R_{\sigma_i}}\left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_i}}\right|^k\leqslant\sum_{s_j\in R_{\sigma_i}}1\leqslant n(\sigma_i+1,\frac{1}{f})\leqslant N(\sigma_i+1,\frac{1}{f})\leqslant A_1\lambda_1(\sigma_i+1+B_1),$$

$\sigma_i>\sigma_0$, $i=1,2$, то лівий бік рівності (30) оцінимо так:

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1<\Re s_j\leqslant\sigma_2}\frac{1}{e^{ks_j}}\right|\leqslant\frac{A_2\lambda_1(\sigma_2+B_2)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A_2\lambda_1(\sigma_1+B_2)}{e^{k\sigma_1}}+ \\ +\frac{|\overline{\alpha_{-k}}|}{k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}+\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_2}}\left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right|^k+\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}\sum_{s_j\in R_{\sigma_1}}\left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right|^k\leqslant \\ \leqslant\frac{A_2\lambda_1(\sigma_2+B_2)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A_2\lambda_1(\sigma_1+B_2)}{e^{k\sigma_1}}+C\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}+\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+ \\ +\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}N(\sigma_2+1,\frac{1}{f})+\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}N(\sigma_1+1,\frac{1}{f})\leqslant\frac{A\lambda_1(\sigma_2+B)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A\lambda_1(\sigma_1+B)}{e^{k\sigma_1}}, \\ k\in\mathbb{N},\quad \sigma_2>\sigma_1\geqslant\sigma_0, \tag{31}$$

де $A=\max\{A_1,A_2,C\}, B=\max\{B_1+1,B_2\}$.

За теоремою 2 з [5] послідовність нулів Q функції f має скінченну λ-щільність. Разом із (31) отримуємо, що $Q=\{s_j\}$ – λ_1-допустима.

За лемою 5 отримуємо λ-допустимість послідовності $\{z_j\}$, $\quad z_j=e^{s_j}$.

Навпаки, якщо послідовність $\{z_j\}$ є λ-допустимою, то згідно з теоремою Рубела-Тейлора [3, ст. 84] ([4, ст. 29]) існує ціла функція $F(z)$ скінченного λ-типу з послідовністю нулів $Z=\{z_j\}$, що завершує доведення. □

9. Послідовності полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга. Нехай $W=\{w_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\{z:|z|\geqslant 1\}$. Нехай λ – функція зростання.

Теорема 4. *Послідовність $W=\{w_j\}$ із $\{z:|z|\geqslant 1\}$ є послідовністю полюсів функції F із класу $\Lambda(\infty)$ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Перше, ніж довести цю теорему, доведемо таке твердження.

Теорема 5. *Послідовність $Z=\{z_j\}$ із $\{z:|z|\geqslant 1\}$ є послідовністю нулів функції F із класу $\Lambda(\infty)$ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Доведення. Якщо $Z = \{z_j\}$ є послідовністю нулів функції F, $F \in \Lambda(\infty)$, тоді з (8) отримаємо

$$N_0(r, Z) = N_0(r, \frac{1}{F}) \leqslant T_0(r, F) \leqslant A\lambda(Br),$$

для всіх $r \geqslant r_0 > 1$ і деяких сталих $A, B > 0$.

Нехай тепер $Z = \{z_j\}$ – послідовність зі скінченною λ-щільністю. Тоді за теоремою Рубела-Тейлора [3] (див. також [4, p. 35]) існує мероморфна в $\mathbb{C}$ функція F скінченного λ-типу з послідовністю нулів Z. □

Застосовуючи теорему 5 до функції $\frac{1}{F}$, отримуємо твердження теореми 4.

Список використаної літератури

1. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series method in complex analysis / *A. Kondratyuk, I. Laine* // (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – Vol. 10. – P. 9-111.
2. *Littlewood J.E.* On the zeros of the Riemann zeta-function / *J.E. Littlewood* // Proc. Camb. Philos. Soc. – 1924. – Vol. 22. – P. 295-318.
3. *Rubel L.A.* Fourier series method for meromorphic functions / *L.A. Rubel, B.A. Taylor* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
4. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *А.А. Кондратюк.* – Л., 1988.
5. *Сокульська Н.Б.* Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі / *Н.Б. Сокульська* // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т. 4, №2. – С. 328-339.
6. *Хейман У.* Субгармонические функции / *У. Хейман, П. Кеннеди.* – М.: Мир, 1980.

Стаття: надійшла до редакції 23.10.2013
прийнята до друку 28.02.2014

GROWTH AND DISTRIBUTION OF ZEROES AND POLES OF MEROMORPHIC FUNCTION IN NEIGHBORHOOD OF ESSENTIAL SINGULARITY

Natalia SOKULSKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: natalya.sokulska@gmail.com

The Nevanlinna characteristic $T_0(r, F)$ of a meromorphic function in the exterior of unit disk is introduced, and its main properties are investigated. A criterion of λ-type finiteness of holomorphic in the exterior of unit disk functions F in terms of Fourier coefficients of $\log|F|$ is obtained. The comparison between $T_0(r, F)$ and the classical Nevanlinna characteristic $T(r, F)$ for functions which have the meromorphic continuation into $\mathbb{C}$ is done. Zero sets of holomorphic and pole sets of meromorphic functions of finite λ-type in the exterior of the unit disk are described.

Key words: holomorphic function, meromorphic function, function of finite λ-type, sequence of finite λ-density, λ-admissible sequence.

РОСТ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ СУЩЕСТВЕННО ОСОБОЙ ТОЧКИ

Наталья СОКУЛЬСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: natalya.sokulska@gmail.com

Введено характеристику Неванлинны $T_0(r,F)$ мероморфной во внешности единичного круга функции и доказаны ее основные свойства. Получен критерий конечности λ-типа голоморфных во внешности единичного круга функций F в терминах коэффициентов Фурье $\log|F|$. Установлена связь между $T_0(r,F)$ и классической характеристикой Неванлинны $T(r,F)$ для функций, которые имеют мероморфное продолжение в $\mathbb{C}$. Описаны последовательности нулей голоморфных и полюсов мероморфных функций конечного λ-типа во внешности единичного круга.

Ключевые слова: голоморфная функция, мероморфная функция, функция конечного λ-типа, последовательность с конечной λ-плотностью, λ-допустимая последовательность.