ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 119–126
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 119–126

УДК 512.553.2

ПРО КЛАСИЧНО-ПЕРВИННИЙ СПЕКТР ЦІЛКОМ-ГІЛЬБЕРТОВИХ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНИХ МОДУЛІВ

Марта МАЛОЇД-ГЛЄБОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Запропоновано доведення кількох теорем типу Де Марко і Орсатті для цілком-гільбертового мультиплікаційного дуо-модуля. Визначено деякі властивості його цілком класично-первинного спектра.

Ключові слова: первинний підмодуль, цілком класично первинний модуль, цілком-гільбертів модуль, двосторонній підмодуль, дуо-модуль.

1. Вступ. Досліджуємо класично-первинні та цілком первинні спектри мультиплікаційних модулів над необов'язково комутативними кільцями з природними обмеженнями. Розглядаємо двосторонні класично первинні підмодулі, які якраз і є точками класично-первинного спектра модуля над некомутативним кільцем. Такий підхід має сенс, оскільки навіть над комутативними кільцями існують класично первинні підмодулі, які не є первинними. Назва "класично-первинний" для спектра походить від нового терміна "класично-первинний підмодуль". Цей термін вперше ввели Бехбооді і Кохі [5]. Автори називали такі модулі слабко первинними, наголошуючи що нові підмодулі загальніші за первинні і їх може бути більше, ніж первинних. У [3] ці модулі перейменували на класично-первинні, хоча для цього і не було обґрунтування. Ми досліджуватимемо цілком-первинний спектр мультиплікаційних модулів. Термін "двосторонній підмодуль" вживатимемо замість вислову "підмодуль, який має властивість вкладення множника (IFP)".

Для вивчення того чи іншого спектра модуля треба вдало вибрати модульні узагальнення первинного ідеалу. В літературі найчастіше опираються на таке означення: власний підмодуль P модуля M називається *первинним підмодулем*, якщо з того, що $aRm \subseteq P$ для $a \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $m \in P$ або $a \in (N : M)$ (див. [5], [7]).

Проте історично з цим поняттям не було все так однозначно. Вперше його використали у праці Р.Е. Джонсона [10], потім такі модулі розглядали С. Пейж [17], В. А. Андрунакієвич [1], П.Ф. Сміт, М.Е. Мур, Р.Л. Мак Касланд ([16]) та інші автори. Серед математиків, які отримали найяскравіші результати, відзначимо Р. Вісбауера ([20]) та Дж. Даунса ([7]), які, крім всього іншого, провели детальний аналіз існуючих означень первинного модуля та виконали систематичне дослідження властивостей таких модулів у некомутативному випадку. Останнім часом розпочались інтенсивні дослідження лівих первинних, класично-первинних [2], [3], строго-первинних і цілком первинних модулів (підмодулів). В цьому напрямі можна виокремити праці А. Розенберга ([19]), А. Каучікаса ([12]) та ін.

Самих первинних підмодулів (чи їхніх різновидностей) недостатньо для отримання геометричної характеризації модуля. Для отримання чіткої геометричної картини потрібно задати відповідну топологію на множині всіх первинних підмодулів фіксованого модуля. Використовуватимемо ядерно-оболонкову топологію, яка є узагальненням топології Зариського на спектрі комутативного кільця.

В основній частині сформульовано та доведено деякі результати, які описують властивості спектрів цілком-гільбертових мультиплікаційних дуо-модулів з додатковою умовою.

2. Попередні дані. Надалі через R позначатимемо асоціативне кільце з ненульовою одиницею. Словосполучення "ідеал кільця"R означатиме двосторонній ідеал. Кожний розглядуваний тут модуль є лівим R-модулем і завжди припускається унітарним. Множину всіх первинних ідеалів кільця R позначатимемо через $Spec(R)$. Ненульовий елемент з $Spec(R)$ називатимемо мінімальним первинним ідеалом кільця R, якщо він не містить жодного іншого елемента з множини $Spec(R)$. Для множини всіх мінімальних первинних ідеалів кільця R використовуватимемо позначення $MinSpec(R)$. Той факт що, N є підмодулем модуля M символічно записуватимемо у вигляді $N \subseteq M$ і використовуватимемо позначення $(N : M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$ для лівого ідеала, який називають лівою часткою від ділення модуля на підмодуль. Ненульовий правий (лівий) модуль M називається *первинним модулем*, якщо $Ann(K) = Ann(M)$ для кожного ненульового підмодуля K модуля M, [4]. Власний підмодуль P лівого модуля M є *первинним* тоді і тільки тоді, коли M/P є первинним лівим модулем, тобто $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ для кожного ненульового підмодуля K/P модуля M/P, [17], [7].

Нагадаємо деякі факти про цілком первинні підмодулі (див.[9]). Власний підмодуль P лівого R-модуля M називається *цілком первинним*, якщо для кожного $a \in R$ і кожного $m \in M$ з умови $am \in P$ випливає, що $m \in P$ або $aM \subseteq P$. Далі користуватимемось найбільш загальним підходом до мультиплікативно замкнених підсистем модуля, за допомогою яких часто будують первинні підмодулі. Для цього згадаємо ідею Чін Пі Лу [14], згідно з якою найбільш природними модульними аналогами "мультиплікативно замкнених підмножин"є відносні m-системами, які визначають за допомогою конкретних m-систем кільця. Формально, якщо S — деяка m-система кільця R, то Sm-системою модуля T називаємо таку непорожню підмножину $M \subseteq T$, що для кожного $s \in S$ і кожного $x \in M$ правильне включення $sRx \subseteq M$. Зауважимо, що узагальнення цієї ідеї на диференціальні кільця і модулі реалізували Д. Гаджієв, Ф. Ціальп [11] та Мельник І.О. [21].

Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *класично-первинним підмодулем*, якщо з включення $abRm \subseteq P$ для $a, b \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $am \in P$ або $bm \in P$ (див. [5], де в оригіналі для таких модулів використовується термін "слабко-первинний модуль"). Через $Cl.Spec(M)$ позначають множину всіх класично-первинних підмодулів лівого модуля M і називатимемо її класично первинним спектром цього модуля.

Вже давно в класичній алгебричній геометрії вивчають простори $Spec(R)$, де R — комутативне кільце з одиницею. Деяке обговорення проблем топології спектра некомутативного кільця можна знайти у К. Коха [13] та для мінімальних спектрів у праці Н.К. Такаре і С.К. Німборкара [18].

Для задання різних топологій на спектрі модуля нагадаємо основні кроки конструювання ядерно-оболонкової топології в обох випадках просторів первинних ідеалів некомутативного кільця та первинних підмодулів лівого модуля над цим кільцем.

Кожному ідеалові I кільця R поставимо у відповідність множину $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$. Тоді множини $V(I)$, де I пробігає всі ідеали кільця R, задовольняють аксіоми замкнених множин деякої топології на $Spec(R)$, яку називають *топологією Зариського.* У випадку лівого модуля M, нехай $Spec(M)$ — множина всіх первинних підмодулів модуля M, яку називаємо *первинним спектром* модуля M. Для кожного підмодуля N лівого модуля M розглянемо множину $V(N) = \{P \in Spec(M) | N \subseteq P\}$. Багато дослідників, наприклад Р.Л. Мак Касланд, М.Е. Мур, П.Ф. Сміт ([16]) інтенсивно намагалися систематизувати вивчення спектрів первинних підмодулів. Зокрема, вони довели, що для комутативного випадку, якщо ${}_RM$ — скінченно-породжений, то модуль M буде топологічним модулем тоді і лише тоді, коли M є мультиплікаційним модулем. Нехай M ненульовий лівий R-модуль. Для його підмодуля N означимо *класичний многовид* як множину $\mathbb{V}(N) = \{P \in Cl.Spec(M) | N \subseteq P\}$. Множина всіх таких многовидів має такі властивості:

(1)$\mathbb{V}(M) = \emptyset$ і $\mathbb{V}(0) = Cl.Spec(M)$;

(2) $\bigcap_{i\in I} \mathbb{V}(N_i) = \mathbb{V}(\sum_{i\in I} N_i)$ для довільної множини індексів I;

(3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) \subseteq \mathbb{V}(N \cap L)$ для підмодулів $N, L, N_i \subseteq M$.

Позначимо через $\mathbb{C}(M)$ сім'ю всіх підмножин вигляду $\mathbb{V}(N)$ з $Cl.Spec(M)$. Оскільки в загальному $\mathbb{C}(M)$ не замкнена стосовно скінченних об'єднань, то можна ввести таке означення: лівий R-модуль M називається *класично-топологічним модулем,* якщо $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підмодулів N і L модуля M існує такий підмодуль K, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$. В такому разі сім'я $\mathbb{C}(M)$ задовольняє аксіоми замкнених підмножин топологічного простору, а отже, визначає топологію на $Cl.Spec(M)$. Нехай M довільний лівий R-модуль. Для кожного його підмодуля N позначимо $\mathbb{U}(N) = Cl.Spec(M)\setminus\mathbb{V}(N)$ і $\mathbb{B}(M) = \{\mathbb{U}(N) : N \subseteq M\}$. Через $\mathbb{T}(M)$ позначимо набір всіх об'єднань скінченних перетинів елементів з $\mathbb{B}(M)$. Тоді $\mathbb{T}(M)$ утворює топологію на $ClSpec(M)$ з підбазою $\mathbb{B}(M)$. Ми називаємо $\mathbb{T}(M)$ *топологією типу Зариського*, ([4]).

Підмодуль C модуля M називається *напівпервинним* (*класично-напівпервинним*), якщо C є перетином первинних (класично-первинних) підмодулів. Первинний (класично-первинний) підмодуль P лівого модуля M називається *екстраординарним,* якщо як тільки N і L є напівпервинними (класично-напівпервинними) підмодулями модуля M, то з умови $N \cap L \subseteq P$ випливає, що $N \subseteq P$ і $L \subseteq P$. Лівий R-модуль M називається мультиплікаційним модулем, якщо для кожного підмодуля N модуля M існує такий ідеал B кільця R, що $N = BM$. Нехай $\mathcal{X}$ — топологічний простір, $\mathcal{A}$ — його підпростір і $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ — тотожне відображення. Якщо існує таке неперервне відображення $r : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$, що $r|_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то r називається ретракцією $\mathcal{X}$ на $\mathcal{A}$, а підпростір $\mathcal{A}$ називається ретрактом простору $\mathcal{X}$.

Розглянемо двосторонні підмодулі, дуо-модулі та цілком-гільбертові модулі, оскільки україномовної літератури з викладенням цих понять немає.

На перший погляд питання про введення поняття двостороннього підмодуля виглядає не зовсім природним, хоча брак такого поняття повсякчасно відчувається. Річ у тім, що при дослідженні некомутативної ситуації у випадку модулів весь час виникає потреба мати аналог двостороннього ідеалу. Для підтвердження цієї думки можемо посилатись на працю Грюнвальда і Ссевері [9], де такі підмодулі вводяться, правда, з хитрою назвою: підмодулі "з властивістю вставки множників"(IFP). Кажуть, що підмодуль N лівого R-модуля M має властивість вставки множників (IFP), якщо з умови $am \in N$, де $a \in R$ і $m \in M$ випливає, що $aRm \subseteq N$. Якщо нульовий підмодуль модуля M має властивість IFP, то кажуть, що сам модуль M має властивість IFP. Нам буде зручніше надалі називати підмодулі з властивістю IFP двосторонніми підмодулями. Для такої назви природне обґрунтування.

Модулі, всі підмодулі яких є двосторонніми, називатимемо дуо-модулями. Модуль називається цілком-гільбертовим, якщо кожний його цілком первинний підмодуль є перетином двосторонніх максимальних підмодулів.

3. Деякі властивості цілком-гільбертових дуо-модулів.

Твердження 1. *Нехай M лівий цілком-гільбертів дуо-модуль над кільцем R. Тоді кожен гомоморфний образ M буде цілком-гільбертовим дуо-модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль цілком-гільбертового модуля M. Нехай $M' = M/N$. Припустимо, що множина цілком-первинних підмодулів модуля не є порожньою. Очевидно, що цілком-первинними підмодулями M' будуть підмодулі вигляду P/N, де P є цілком-первинним підмодулем модуля M і $N \subseteq P$. Отже, довільний напівпервинний підмодуль модуля M' набуде вигляду C/N, де C — цілком-напівпервинний підмодуль, що містить N. Використовуючи Лему 1 [6], отримаємо потрібний результат. □

З твердження випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай R — кільце, M — довільний лівий R-дуо-модуль. Такі властивості еквівалентні:*

(1) *M — цілком-гільбертів R-модуль;*
(2) *M/N — цілком-гільбертів R-модуль для кожного підмодуля N модуля M.*

Зауваження 1. Мінімальні цілком-первинні підмодулі визначають природно. Очевидно таке, якщо $\{P_i\}_{i \in I}$ – довільний ланцюг цілком-первинних підмодулів R-модуля M, то $\cap_{i \in I} P_i$ очевидно буде цілком-первинним підмодулем. Тому за лемою Цорна кожен цілком-первинний підмодуль міститиме мінімальний цілком-первинний підмодуль.

Твердження 2. *Кожен цілком-гільбертів дуо-модуль є класично-гільбертовим і гільбертовим модулем, але обернене твердження хибне.*

Доведення. Нехай M цілком-гільбертів модуль. За лемою 1, кожен цілком-первинний підмодуль модуля M — екстраординарниий. Оскільки кожен цілком-первинний підмодуль модуля M є первинним підмодулем. Також кожен первинний підмодуль — екстраординарний. Тоді за ([15], Лема 2.1), M — гільбертів модуль. □

Теорема 1. *R-модуль M буде цілком-гільбертовим модулем тоді і лише тоді, коли кожен цілком-первинний підмодуль M, що не є максимальним, буде перетином власних більших цілком-первинних підмодулів.*

Доведення. Якщо M — цілком-гільбертів, то ця властивість очевидно виконується (оскільки всі максимальні підмодулі цілком-первинні). Для зворотного твердження, припустимо, що N — цілком-первинний підмодуль, який не є максимальним. Нехай $m \in M \setminus N$. Сформуємо множину всіх цілком-первинних підмодулів, які містять N, але не елемент m. Ця множина містить підмодуль N. За Лемою Цорна, нехай K — максимальний елемент у цій множині. Тому K має бути максимальним підмодулем. З іншого боку, підмодуль K є перетином власних більших цілком-первинних підмодулів. Оскільки підмодуль K — максимальний у попередній множині первинних підмодулів, і всі власні більші цілком-первинні підмодулі повинні містити елемент m. Звідси випливає, що елемент m міститься в підмодулі K. Це не той випадок, тому можемо зробити висновок, що K — максимальний підмодуль. Отже, ми довели, що перетин максимальних підмодулів, які містять N, сам є N, тому модуль M — цілком-гільбертів модуль. □

Зауваження 2. Якщо M — довільний R-модуль і $K \subseteq M$, то легко довести, що власний підмодуль P з M, де $K \subseteq P$ — цілком-первинний підмодуль (відповідно максимальний) підмодуль M, якщо P/K є цілком-первинним (максимальним) підмодулем M/K. Це зауваження можна використати як означення цілком-первинного підмодуля.

4. Теореми типу Де Марко і Орсатті для цілком-гільбертового дуомодуля. Нехай R не обов'язково комутативне кільце. Лівий модуль M над кільцем R називається *clpm-модулем*(*copm-модулем*), якщо кожен класично-первинний(цілком первинний) підмодуль P міститься в єдиному максимальному(двосторонньому) підмодулі модуля M. Аналогічно можна подати означення правих аналогів таких модулів. Перейдемо до розгляду аналогів теорем типу Де Марко та Орсатті для випадку класично-первинних і цілком первинних підмодулів.

Теорема 2. *Нехай M мультиплікаційний R-модуль скінченно породжених циклічних підмодулів, і $Max(M)$ ретракт простору $Cl.Spec(M)$. Тоді M є clpm-модулем.*

Доведення. Припустимо, що $\varphi : Cl.Spec(M) \to Max(M)$ неперервна ретракція і $\varphi(K) = H$ для деякого класично-первинного підмодуля P і максимального підмодуля H модуля M. Тоді замкнена множина $\varphi^{-1}(H)$ буде містити $\{\bar{P}\}$, тобто довільний максимальний підмодуль H', що міститиме P. Оскільки відображення φ буде неперервною ретракцією, тому $H = \varphi(H') = H'$. Отже, $H' = H$ буде єдиним максимальним підмодулем, який міститиме P. □

Наслідок 2. *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lcpm-модуля M містить єдиний мінімальний цілком-первинний підмодуль.*

Наслідок 3. *Простір $Min(M)$ мінімальних цілком-первинних підмодулів буде ретрактом простору $Cl.Spec(M)$.*

Наслідок 4. *Нехай R — кільце і $\{M_i\}_{i\in I}$ набір R-модулів. Якщо $\bigoplus_{i\in I} M_i$ є цілком-гільбертовим модулем, то кожен $M_i (i \in I)$ буде цілком-гільбертовим модулем.*

Твердження 3. *Нехай R — дуо-область, M — цілком-гільбертів R-модуль. Якщо N є таким довільним підмодулем M, що M/N є модулем без скруту, то N буде цілком-гільбертовим R-модулем.*

Доведення. Припустимо, що R є областю і M — цілком-гільбертовий R-модуль. Припустимо, що $N \subset M$ і M/N є модулем без скруту. Також припустимо, що $P \subset N$ є цілком-первинним підмодулем. Доведемо, що P є перетином максимальних підмодулів з N. Спершу доведемо, що P є цілком-первинним підмодулем M. Припустимо, що $rsRm \subseteq P$ для деякого $m \in M$ і $r, s \in R$. Якщо $m \in M$, оскільки P є цілком-первинним підмодулем N, ми доведемо, що або $rm \in P$, або $sm \in P$. Тепер припустимо, що $m \in M$. Нагадаємо, що $rsRm \subseteq P \subseteq N$. Оскільки M/N є модулем без скруту і $m \notin N$, то випливає, що $r = 0$ чи $s = 0$. Також в цьому випадку або $rm \in P$ або $sm \in P$. Отже, P — цілком-первинний підмодуль M.

Оскільки P — цілком-первинний підмодуль M і $P = \cap_{i\in I} M_i$, де кожен M_i є максимальним підмодулем. M. Для кожного i нехай $P_i := M_i \cap N$. Оскільки $P \subseteq N$, то легко побачити, що $P = \cap_{i\in I} P_i$. Крім того, можемо припустити без втрати загальності, що кожен P_i повністю міститься в N. Припустимо, що $i \in I$ є довільним. Щоб завершити доведення, достатньо довести, що P_i — максимальний підмодуль N. Тому припустимо, що $m \in N \backslash P_i$. Доведемо, що $(P_i, m) \in N$. Отже, $m_i \notin M_i$. Оскільки M_i — максимальні підмодулі M, то отримаємо $(M_i, m) = M$. Нехай $x \in N$ є довільним елементом. Доведемо, що $x \in (P_i, m)$. Оскільки $M = (M_i, m)$, $x = m_i + rm$ для деяких елементів $m_i \in M$, $r \in R$. Оскільки $x \in N$ і $m \in N$, то робимо висновок, що $m_i \in N$. Тому $m_i \in P_i$, з цього випливає, що $x \in (P_i, m)$. Ми довели, що $(P_i, m) \in N$, а це доводить, що P_i — максимальні підмодулі N. □

Наслідок 5. *Нехай R — дуо-область і M цілком-гільбертів R-модуль. Тоді істинні такі твердження:*

(1) *якщо $T(M)$ — періодичний модуль, то $T(M)$ також цілком-гільбертів R-модуль;*
(2) *якщо M — модуль без скруту і N — чистий підмодуль модуля M, то N — цілком-гільбертів R-модуль.*

Доведення. 1. Випливає з попереднього твердження.

2. Для доведення припустимо, що N є чистим підмодулем цілком-гільбертового модуля без скруту M. За попереднім твердженням, достатньо довести таке: якщо $m \in M \backslash N$ і $r \in R$, де $rRm \in N$, то $r = 0$. Тому припустимо, що $m \in M \backslash N$ і $rRm \in N$. Оскільки N є чистим, то $rM \cap N = rN$. Отже, $rRm \in rN$, тому існує деякий елемент $n \in N$, що $rRm = rRn$. Отож, $rR(m - n) = 0$. Оскільки $m \notin N$, то бачимо, що $m - n \neq 0$. Оскільки M є модулем без скруту, то робимо висновок, що $r = 0$. □

Автор висловлює подяку професору Комарницькому М.Я. за спілкування, корисні і влучні коментарі, зауваження під час роботи над статтею.

Список використаної літератури

1. *Andrunakievich V.A.* Prime modules and Baer radical /Siberian Mathematical Journal – 1961. – Vol. 2. – №6. – P. 801-806. (in Russian)
2. *Arabi-Kakavand M., Behboodi M.* Modules Whose Classical Prime Submodules Are Intersections of Maximal Submodules /Glasgow Math. J. – 2006. – Vol.48. – P.343-346.
3. *Behboodi M.R.* Classical prime submodules / Ph.D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran – 2004.
4. *Behboodi M.R., Haddadi M.R.* Classical Zarisky topology of modules and spectral spaces I /International Electronic Journal of Algebra – 2008. – Vol. 4. – P. 104-130.
5. *Behboodi M.R., Koohy H.* Weakly prime modules /Vietnam J. Math. – 2004. – Vol. 32. – №2.– P. 185-195.
6. *Behboodi M.R., Noori M.J.* Zariski-like topology on the classical prime spectrum of a module / Bull. of the Iranian Mathematical society – 2009. – Vol. 35. – №1. – P.253-269.
7. *Dauns J.* Prime modules /J. Reine Angew. Math. – 1978. – Vol. 298. – P. 156-181.
8. *De Marco G., Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal /Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 459-466.
9. *Groenewald N.J.,Ssevviiri D.* Completely prime submodules /International Electronic Journal of Algebra – 2013. – Vol. 13. – №. 1. – P. 1-14.
10. *Johnson R.E.* Representations of prime rings /Trans. Amer. Math. Soc – 1953. – Vol. 74. – №. 2. – P. 351-357.
11. *Khadjiev Dj., Ciallp F.* On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings /Tr. J. of Math. – 1996. – Vol. 20. – No. 4, – P. 571-582.
12. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and their radicals /Lietuvos matematikos rinkinys – 2010. – Vol. 51. – P. 31–34.
13. *Koh K.* On functional representation of a rings witout nilpotcnt elements, Canad. Math. Bull. 14 (1971) 349-352/.
14. *Lu C.* Unions of prime submodules /Houston J. Math. - 1997. – Vol. 23. – № 2. – P. 203-213.
15. *Maloid-Glebova M.O.* About torsion-theoretic spectrum of left-invariant ring and weakly-multiplication and pure-multiplicayion modules /Applied Problems of Mechanics and Mathematics – 2011. – №. 9. – P. 87-94. (in Ukrainian)
16. *McCasland R.L., Moore M.E., Smith P.F.* On the spectrum of the module over a commutative ring /Comm. Algebra – 1997. – Vol. 25. – №. 1. – P. 79–103.
17. *Page S.* Properties of quotient rings /Can. J. Math – 1972. – Vol. 24. – №6. – P. 1122-1128.
18. *Thakare N.K. and Nimbhorkar S.K.* Space of minimal prime ideals of a ring without nilpotent elements /Journal of Pure and Applied Algebra – 1983. – Vol. 27. №1. – P. 75-85.
19. *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras /Kluwer Academic Publishers – 1995.
20. *Wisbauer R.* On prime modules and rings /Com. Algebra – 1983. – Vol. 11. – P. 2249-2265.
21. *Мельник I.* Sdm-системи, диференціально первинні та диференціально примарні модулі. /Наук. вісник Ужгородського університету. – 2008. – Вип. 16. – С.110-118. — (Серія"Математика і інформатика").

Стаття: надійшла до редакції 30.10.2013
прийнята до друку 28.02.2014

ON CLASSICAL-PRIME SPECTRUM OF COMPLETELY-HILBERTIAN MULTIPLICATION MODULES

Marta MALOID-GLEBOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

In this paper are proposed proofs of several theorems of De Marco-Orsatti type for completely-Hilbertian multiplication duo-modules and are established some properties of classical-prime spectrum of such modules.

Key words: prime submodule, completely classical prime module, completely-Hilbertian module, two-sided module, duo-module.

О КЛАССИЧЕСКИ-ПЕРВИЧНОМ СПЕКТРЕ ВПОЛНЕ-ГИЛЬБЕРТОВЫХ МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫХ МОДУЛЕЙ

Марта МАЛОИД-ГЛЕБОВА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Предложено доказательства нескольких теорем типа Де Марко и Орсатти для вполне-гильбертово мультипликационного дуо-модуля. Установлено некоторые свойства его вполне классически первичного спектра.

Ключевые слова: первичный подмодуль, вполне классически первичный модуль, вполне-гильбертов модуль, двусторонний модуль, дуо-модуль.