ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 65–77
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 65–77

УДК 517.95

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОРIДНОЇ ЗАДАЧI ДIРIХЛЕ У ЧАСОВIЙ СМУЗI ДЛЯ РIВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХIДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМIННОЮ

Володимир IЛЬКIВ, Зiновiй НИТРЕБИЧ

Нацiональний унiверситет "Львiвська полiтехнiка",
вул. Бандери, 12, Львiв, 79013
e-mail: ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

Дослiджено множину розв'язкiв задачi Дiрiхле у смузi для однорiдного диференцiального рiвняння з частинними похiдними з двома змiнними другого порядку за однiєю (часовою) змiнною, за якою задано однорiднi крайовi умови, та загалом нескiнченного порядку за iншою (просторовою) змiнною. Знайдено необхiднi та достатнi умови iснування нетривiальних розв'язкiв цiєї некоректної задачi у класi квазiполiномiв i запропоновано диференцiально-символьний метод їхньої побудови. Результати дослiдження ядра задачi Дiрiхле у часовiй смузi використано для деяких рiвнянь математичної фiзики.

Ключовi слова: задача Дiрiхле, iснування розв'язкiв.

1. Вступ. Вiдомо, що задачi з даними на всiй границi областi, зокрема смуги, для гiперболiчних диференцiальних рiвнянь iз частинними похiдними є некоректними крайовими задачами [1, 2, 9, 10]. Прикладом такої задачi є задача Дiрiхле у часовiй смузi $S_h \equiv \{(t,x):\ t \in (0,h),\ x \in \mathbb{R}\}$, де $h > 0$, для рiвняння коливань струни

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ &U(0,x) = \varphi_1(x), \quad U(h,x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Некоректнiсть задачi (1) зумовлюється насамперед тим, що ядро цiєї задачi, тобто множина нетривiальних розв'язкiв вiдповiдної однорiдної задачi

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad U(0,x) = U(h,x) = 0, \tag{2}$$

не є порожньою. Нетривiальними розв'язками задачi (2) є, наприклад, функцiї вигляду

$$U_k(t,x) = \sin\frac{\pi k t}{h} \sin\frac{\pi k x}{ah}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

У праці [1] серед задач Діріхле у смузі виділено коректні задачі (так звані задачі з нескінченним типом), які характеризуються розв'язками з певною поведінкою на нескінченності. Такі задачі мають лише тривіальний розв'язок.

Поданий вище приклад існування нетривіальних розв'язків (3) задачі (2) свідчить про те, що ці елементи ядра задачі містяться у класі квазіполіномів. Зокрема, кожну функцію з формули (3) для $k \in \mathbb{N}$ можна зобразити квазіполіномом

$$U_k(t,\, x) = \frac{1}{4}\, e^{\frac{i\pi}{ah}(at-x)} + \frac{1}{4}\, e^{-\frac{i\pi}{ah}(at-x)} - \frac{1}{4}\, e^{\frac{i\pi}{ah}(at+x)} - \frac{1}{4}\, e^{-\frac{i\pi}{ah}(at+x)}, \quad i^2 = -1.$$

Отже, важливим є питання дослідження розв'язків однорідної задачі Діріхле у часовій смузі для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку за часом і загалом нескінченного порядку за просторовою змінною зі сталими коефіцієнтами, яке як частковий випадок містить рівняння коливань струни, Клейна-Гордона-Фока, телеграфне рівняння, рівняння Лапласа, теорії пружності та ін. У випадку існування нетривіальних розв'язків однорідної задачі для їхньої побудови використаємо диференціально-символьний метод [5, 6] розв'язування задач для рівнянь із частинними похідними, що допускають відокремлення змінних, а також ідею його використання для побудови елементів ядра задачі з нелокальною умовою, запропоновану в [4]. Дослідженню крайової задачі у смузі для диференціального рівняння з частинними похідними за допомогою диференціально-символьного методу присвячена також праця [8].

2. Формулювання задачі. Мета нашої праці – дослідження у смузі S_h множини розв'язків $U = U(t,x)$ задачі Діріхле

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\, \frac{\partial}{\partial x}\right) U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = 0, \tag{4}$$

$$U(0,\, x) = U(h,\, x) = 0, \tag{5}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є довільні цілі функції $a = a(\nu)$, $b = b(\nu)$.

Зауваження 1. Дію диференціального виразу $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з цілим символом

$$b\,(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \nu^j, \quad b_j \in \mathbb{C},$$

на нескінченно диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію U розуміємо так: $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U \equiv \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j \frac{\partial^j U}{\partial x^j}$.

Розв'язком задачі (4), (5) вважаємо цілу функцію

$$U = \sum_{k_0+k_1 \geq 0} u_{k_0k_1} t^{k_0} x^{k_1}, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad u_{k_0k_1} \in \mathbb{C},$$

змінних t і x, яка задовольняє рівняння (4) та умови Діріхле (5).

Очевидно, що задача (4), (5) має тривіальний розв'язок. Знайдемо умови існування лише тривіального розв'язку задачі (4), (5), а також зазначимо елементи ядра задачі (4), (5) і, що важливо, побудуємо ці елементи на підставі диференціально-символьного методу в явному вигляді у випадку нетривіального ядра.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

3. Основні результати.

3.1. Розв'язність задачі Діріхле. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu) \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2}+2a(\nu)\frac{d}{dt}+b(\nu)\right)T(t,\nu)=0, \tag{6}$$

яке побудовано на підставі рівняння (4).

Нехай p_a та p_b – степені поліномів $a=a(\nu)$ та $b=b(\nu)$, якщо ж a не є поліномом, то $p_a=\infty$, аналогічно для функції b.

Елементи нормальної в точці $t=0$ фундаментальної системи розв'язків рівняння (6) набувають вигляду

$$T_0(t,\,\nu)=e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}+\operatorname{ch}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\,\nu)=e^{-a(\nu)t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}},$$

де $D(\nu)=a^2(\nu)-b(\nu)$, причому $4D(\nu)$ – дискримінант полінома

$$L(\lambda,\nu)=\lambda^2+2a(\nu)\lambda+b(\nu).$$

Зокрема, якщо ν_0 – нуль функції $D(\nu)$, то

$$T_0(t,\,\nu_0)=e^{-a(\nu_0)t}\left\{a(\nu_0)t+1\right\},\quad T_1(t,\,\nu_0)=te^{-a(\nu_0)t}.$$

Оскільки за припущенням $a(\nu)$, $b(\nu)$ – цілі функції, то за теоремою Пуанкаре ([11, с. 59]) функції $T_0(t,\,\nu)$, $T_1(t,\,\nu)$ є цілими функціями стосовно параметра ν. Надалі важливим буде ще й порядок p цілих стосовно ν функцій $T_0(t,\,\nu)$, $T_1(t,\,\nu)$, який визначають ([3, с. 83]) за формулою $p=\max\{p_a,\ p_b/2\}$. Якщо $a(\nu)$, $b(\nu)$ – поліноми, то $p<\infty$, і $p=\infty$, якщо $a(\nu)$ або $b(\nu)$ не є поліномом.

Відповідно до диференціально-символьного методу ([5, с. 106]) запишемо сім'ю формальних розв'язків рівняння (4), тобто сім'ю формальних рядів, які задовольняють (4)

$$U(t,\,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_0(t,\,\nu)e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}+\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_1(t,\,\nu)e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}, \tag{7}$$

де $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ – диференціальні вирази з цілими символами, які підбираємо так, щоб рівність (7) визначала розв'язок задачі (4), (5).

Спочатку задовольняємо першу умову (5). Оскільки $T_0(0,\,\nu)=1$, $T_1(0,\,\nu)=0$, то

$$U(0,\,x)=\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}=\varphi(x)=0.$$

Отже, формальні розв'язки рівняння (4), що справджують умову $U(0,\,x)=0$, за формулою (7), набувають вигляду

$$U(t,\,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=0}. \tag{8}$$

Задовольняючи другу умову $U(h,x)=0$, одержуємо для вибору функції ψ тотожність

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=0}\equiv 0. \tag{9}$$

Розглянемо два можливі випадки.

3.1.1. Випадок $\mathbf{D}(\nu)\equiv\mathbf{D}=$ const. Тоді $b(\nu)=a^2(\nu)-D$, рівняння (4) набуває вигляду

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U=DU,$$

а тотожність (9) є такою:

$$\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]}{\sqrt{D}}\,\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}\equiv 0. \tag{10}$$

Якщо виконується нерівність $h\sqrt{D}\neq\pi ki$ для всіх $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, тобто $\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]}{\sqrt{D}}\neq 0$, то одержуємо $\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\right\}\big|_{\nu=0}\equiv 0$. Функція

$$V(t,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}$$

є розв'язком задачі Коші для однорідного рівняння $\frac{\partial V}{\partial t}+a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V=0$ з однорідною початковою умовою $V(h,x)=0$, тому завдяки єдиності розв'язку задачі Коші одержуємо, що $V(t,x)\equiv 0$ в області S_h. Зокрема, при $t=0$ отримаємо

$$V(0,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}\}\Big|_{\nu=0}=\psi(x)=0.$$

Отже, у цьому разі за формулою (8) одержуємо лише тривіальний розв'язок задачі (4), (5).

Якщо ж для якогось $k\in\mathbb{N}$ виконується рівність

$$h\sqrt{D}=\pm\pi ki, \tag{11}$$

то $\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D}\right]=0$, тотожність (10) справджується, формальні розв'язки задачі (4), (5) набувають вигляду (8), а саме

$$U_k(t,x)=\frac{\sin(\pi kt/h)}{\pi k/h}\,\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Розв'язки (12) будуть фактичними розв'язками задачі (4), (5), якщо вони є цілими функціями змінних t та x. Це справджується для довільної цілої функції $\psi(x)$, порядок q якої має такі обмеження ([7], с. 316):

1) $q=1$, якщо $a(\nu)$ не є поліномом ($p_a=\infty$) ;
2) $1<q<\frac{p_a}{p_a-1}\leq 2$, якщо $2\leq p_a<\infty$;
3) $q\geq 0$, якщо $p_a\leq 1$, тобто $a(\nu)$ – лінійна функція.

Для лінійної функції $a(\nu)=A\nu+B$, де $A,B\in\mathbb{C}$, отримуємо

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=e^{-Bt}\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu(x-At)}\right\}\Big|_{\nu=0}=e^{-Bt}\psi\left(x-At\right)$$

і з формули (12) одержуємо

$$U_k(t,\, x) = \frac{\sin\left(\pi k t/h\right)}{\pi k/h} e^{-Bt} \psi\left(x - At\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

У формулі (13) немає операції диференціювання, тому за функцію ψ достатньо взяти довільну двічі неперервно диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію. Якщо $\psi = \psi(x)$ – квазіполіном, то $U_k(t,\, x)$, $k \in \mathbb{N}$, також квазіполіноми за змінними t та x.

Отже, у випадку сталого дискримінанта задача (4), (5) має тривіальний розв'язок, якщо $D \neq -\left(k\pi/h\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, або має нескінченновимірне ядро, що визначається класом цілих функцій деякого порядку для зчисленної кількості значень $D = -\left(k\pi/h\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Приклад 1. Розв'язати в області S_π задачі Діріхле

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm 2\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)\right] U(t,\, x) = 0, \quad t \in (0, \pi), \quad x \in \mathbb{R}, \\ &U(0,\, x) = U(\pi,\, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{14}$$

▼ Дані задачі є задачами (4), (5), в яких $a(\nu) = \pm\nu$, $b(\nu) = \nu^2 + 1$, $h = \pi$, $D(\nu) = D = -1$. Умова (11) виконується для $k = \pm 1$. Розв'язки задачі (14) за формулою (13) набувають вигляду

$$U(t,\, x) = \psi(x \mp t) \sin t,$$

де ψ – довільна двічі неперервно диференційовна функція. Ядра задач (14) є нескінченновимірними. ▲

Приклад 2. Розв'язати в області S_1 задачу Діріхле для бікалоричного рівняння

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]^2 U(t,\, x) = 0, \quad t \in (0, 1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ &U(0,\, x) = U(1,\, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

▼ Отримали $a(\nu) = -a^2\nu^2$, $b(\nu) = a^4\nu^4$, $h = 1$, $D(\nu) \equiv D = 0$. Отже, задача має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі тривіальне. ▲

3.1.2. Випадок $\mathbf{D}(\nu) \neq \mathrm{const}$. Розглянемо множину

$$M = \left\{ \nu \in \mathbb{C} : \quad \frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}} = 0 \right\}, \tag{15}$$

яка є об'єднанням за натуральним параметром k множин нулів цілих функцій $D_k(\nu) \equiv h^2 D(\nu) + k^2\pi^2$.

Множина M як множина нулів цілої функції $\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}$ у цьому випадку складається з нескінченної кількості відмінних між собою нулів γ_1, γ_2, ... відповідно скінченних кратностей p_{γ_1}, p_{γ_2}, ..., причому $|\,\gamma_n\,| \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Очевидно, що γ_j є нулем кратності p_{γ_j} функції D_k з деяким номером $k = k(\gamma_j)$, є нулем кратності $p_{\gamma_j} - 1$ функції $\frac{dD}{d\nu}$, що випливає з рівностей похідних $\frac{d^s D_k}{d\nu^s} = h^2 \frac{d^s D}{d\nu^s}$ для $s \in \mathbb{N}$, і не є нулем функції D.

Теорема 1. *Нехай функція $\psi(x),\ x\in\mathbb{R}$, є квазіполіномом вигляду*

$$\psi(x)=\sum_{j=1}^{m}Q_j(x)e^{\alpha_j x},\qquad \deg Q_j(x)=n_j\le p_{\alpha_j}-1, \tag{16}$$

в якому $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in M$, $Q_j(x)$ – поліноми з комплексними коефіцієнтами степенів $n_j\le p_{\alpha_j}-1$, $j=\overline{1,m}$, $m\in\mathbb{N}$. Тоді функція (8), тобто

$$U(t,x)=\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j}, \tag{17}$$

є розв'язком задачі (4), (5). Навпаки, якщо розв'язок $U(t,x)$ задачі (4), (5) є квазіполіномом, тобто $U(t,x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{N}P_{lj}(t,x)e^{\beta_l t+\alpha_j x}$, де $m,N\in\mathbb{N}$, $P_{lj}(t,x)$ – поліноми змінних t та x з комплексними коефіцієнтами степеня n_j за змінною x, $\beta_l,\alpha_j\in\mathbb{C}$, $\beta_r\ne\beta_l$ для $r\ne l$, $r,l=\overline{1,N}$, $\alpha_k\ne\alpha_j$ для $k\ne j$, $k,j=\overline{1,m}$, то $\alpha_j\in M$, $n_j<p_{\alpha_j}$ для $j=\overline{1,m}$ і цей розв'язок набув вигляду (17), в якому $Q_j(x)=\sum\limits_{l=1}^{N}\left(\beta_j P_{lj}(0,x)+\frac{\partial P_{lj}}{\partial t}(0,x)\right)$.

Доведення. Д о с т а т н і с т ь. Нехай $\psi(x)$ – функція вигляду (16). Тоді функція (8), очевидно, є розв'язком рівняння (4) і виконується умова $U(0,x)=0$. Функцію (8) для квазіполінома (16) можна записати у вигляді (17) і

$$U(h,x)=\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)h+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j}. \tag{18}$$

Оскільки $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in M$, то $\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\alpha_j)}\right]}{\sqrt{D(\alpha_j)}}=0$ і

$$\frac{\partial^k}{\partial\nu^k}\left[e^{-a(\nu)h+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right]\Bigg|_{\nu=\alpha_j}=0$$

для $k=\overline{1,p_{\alpha_j}-1}$, $j=\overline{1,m}$. Тому усі доданки в рівності (18) тотожно дорівнюють нулеві.

Н е о б х і д н і с т ь. Припустимо, що розв'язком задачі (4), (5) є квазіполіном вигляду $U(t,x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{N}P_{lj}(t,x)e^{\beta_l t+\alpha_j x}$. Позначимо $\frac{\partial U}{\partial t}\big|_{t=0}=\psi(x)$. Тоді $\psi(x)$ є квазіполіномом вигляду $\psi(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}Q_j(x)e^{\alpha_j x}$, де $\alpha_j\in\mathbb{C}$, $Q_j(x)$ – поліноми степенів не вище n_j, $j=\overline{1,m}$, $\alpha_j\ne\alpha_k$ для $j\ne k$. Тоді $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=0,$$
$$U(0,x)=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\psi(x)$$

можна подати у вигляді

$$U(t,\,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{e^{\nu x}T_1(t,\nu)\}\Big|_{\nu=0},$$

де $T_1(t,\nu)\;=\;e^{-a(\nu)t}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}$ – елемент нормальної фундаментальної системи розв'язків рівняння (6). З виконання умови $U(h,x)\equiv 0$ одержуємо тотожність

$$\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\,e^{\nu x}T_1(h,\nu)\,\}\Big|_{\nu=\alpha_j}\equiv 0.$$

Завдяки лінійній незалежності функцій

$$e^{\alpha_1 x},\ xe^{\alpha_1 x},\ x^2e^{\alpha_1 x},\ldots,\ x^{n_1}e^{\alpha_1 x},\ldots,e^{\alpha_m x},\ xe^{\alpha_m x},\ x^2e^{\alpha_m x},\ldots,\ x^{n_m}e^{\alpha_m x}$$

остання тотожність виконується тоді та лише тоді, коли $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_m$ є нулями функції $T_1(h,\nu)$ кратностей не нижче $p_{\alpha_1},\,p_{\alpha_2},\,\ldots,\,p_{\alpha_m}$, звідки випливають нерівності $n_1<p_{\alpha_1},\,\ldots,\,n_m<p_{\alpha_m}$. Теорему доведено. □

Зауваження 2. Теорема 1 дає змогу будувати розв'язки задачі (4), (5) квазіполіномного вигляду завдяки цілості символів операторів $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з як завгодно великою кількістю доданків. Однак множина розв'язків задачі (4), (5) є значно ширшою. Її елементами є також збіжні функціональні ряди

$$U(t,\,x)=\sum_{j=1}^{\infty}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha_j},$$

тобто

$$U(t,\,x)=\sum_{j=1}^{\infty}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\right)\left\{e^{-a(\alpha_j)t+\alpha_j x}\frac{\operatorname{sh}\left[t\sqrt{D(\alpha_j)}\right]}{\sqrt{D(\alpha_j)}}\right\},$$

у яких $\alpha_j\in M,\ \ Q_j(x)$ – поліноми степенів $n_j\le p_j-1$, які отримують у результаті замикання у певному класі функцій множини квазіполіномних розв'язків (17).

3.2. Ядра задач Діріхле для рівнянь із частинними похідними. У цьому пункті розглянемо задачі Діріхле у смугах S_h, де $h>0$, зокрема у S_1, для класичних рівнянь математичної фізики та диференціально-функціональних рівнянь, а також знайдемо елементи їхніх ядер. Доведемо, що всі ці задачі мають нескінченновимірне ядро, тобто не є нетеровими.

3.2.1. Рівняння коливань струни.

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\gamma^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \gamma>0,\\ U(0,x)=U(h,\,x)=0.\end{gathered}\tag{19}$$

▼ Задача (19) – це задача (4), (5), у якій $a\,(\nu)\;=\;0,\;\;b\,(\nu)\;=\;-\gamma^2\nu^2$. Тоді $D(\nu)=\gamma^2\nu^2$, а множина (15) набуде вигляду

$$M=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{\,\nu\in\mathbb{C}:\ \ \gamma\nu h=\pm\,\pi k i\}\,.$$

Числа $\nu_k = \pm\frac{\pi k i}{\gamma h}$, де $k \in \mathbb{N}$, для функції $T_1(h,\nu) = \frac{\operatorname{sh}[\gamma\nu h]}{\gamma\nu}$ є простими нулями. За теоремою 1 функції вигляду

$$U_{\pm k}(t,x) = e^{\pm\frac{\pi k i x}{\gamma h}} \sin\frac{\pi k t}{h}, \quad k \in \mathbb{N},$$

є лінійно незалежними квазіполіномними комплексними розв'язками задачі (19), уявна частина яких дає при $\gamma = a$ розв'язки (3).

Остання формула містить два набори розв'язків задачі (19): перший – відповідає (верхньому) знаку „+", другий – відповідає (нижньому) знаку „–". Зауважимо, крім того, що за допомогою диференціально-символьного методу [5] за рахунок дискретного параметра k в $U_{\pm k}(t,x)$ можна отримати розв'язок задачі у вигляді

$$U(t,x) = \varphi(x+t) - \varphi(x-t),$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ періодична функція з періодом $T = 2h$, тобто $\varphi \in C^2_{2h}$. ▲

3.2.2. Рівняння Клейна-Гордона-Фока.

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right] U(t,x) = 0, \quad \gamma, m > 0, \\ &U(0,x) = U(h,x) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

▼ Для цієї задачі отримаємо $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -\gamma^2\nu^2 + m^2$, $D(\nu) = \gamma^2\nu^2 - m^2$. Множина M набуває вигляду

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\nu \in \mathbb{C}: \ h\sqrt{\gamma^2\nu^2 - m^2} = \pm\pi k i\right\}.$$

Числа $\nu_k = \pm\frac{\sqrt{m^2h^2 - \pi^2k^2}}{\gamma h}$, де $k \in \mathbb{N}$, для функції $T_1(h,\nu) = \frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}}$ у випадку $mh \neq \pi k$ є простими нулями. Якщо $mh = \pi k_0$, де $k_0 \in \mathbb{N}$, то $\nu = 0$ є двократним нулем функції $T_1(h,\nu)$. За теоремою 1 одержуємо таку серію ($k \in \mathbb{N}$) квазіполіномних розв'язків задачі (20):

1) $U_{\pm k}(t,x) = e^{\pm\frac{\sqrt{\pi^2k^2 - m^2h^2}}{\gamma h} i x} \sin\frac{\pi k t}{h}$, якщо $\pi k > mh$;

2) $U_{\pm k}(t,x) = e^{\pm\frac{\sqrt{m^2h^2 - \pi^2k^2}}{\gamma h} x} \sin\frac{\pi k t}{h}$, якщо $\pi k < mh$;

3) $U_k(t,x) = \sin\dfrac{\pi k t}{h}$, $U_k(t,x) = x\sin\dfrac{\pi k t}{h}$, якщо $\pi k = mh$.

Розв'язки (3) отримуємо з цієї серії при $m \to 0$ та переході до уявної частини. ▲

3.2.3. Телеграфне рівняння.

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad \gamma, m > 0, \\ &U(0,x) = U(h,x) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

▼ Задачу (21) розглянемо як задачу (4), (5) з цілими функціями $a(\nu) = m$, $b(\nu) = -\gamma^2\nu^2$, $D(\nu) = m^2 + \nu^2\gamma^2$, $T_1(h,\nu) = e^{-mh}\frac{\operatorname{sh}\left[h\sqrt{m^2+\nu^2\gamma^2}\right]}{\sqrt{m^2+\nu^2\gamma^2}}$.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

Нулями функції $T_1(h,\,\nu)$ є числа $\nu_k = \pm\frac{\sqrt{\pi^2k^2+m^2h^2}}{\gamma h}\,i$, де $k\in\mathbb{N}$. Вони є простими, тому за теоремою 1 знаходимо квазіполіномні розв'язки задачі (21)

$$U_{\pm k}(t,\,x) = e^{-mt\pm\frac{\sqrt{\pi^2k^2+m^2h^2}}{\gamma h}ix}\,\sin\frac{\pi kt}{h},\quad k\in\mathbb{N}.$$

З уявної частини цих комплексних розв'язків при $m\to 0$ отримуємо дійсні розв'язки (3). ▲

3.2.4. Рівняння Лапласа.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]U(t,\,x)=0,\\&U(0,x)=U(h,\,x)=0.\end{aligned}\tag{22}$$

▼ Для задачі (22) одержуємо $a(\nu)=0, b(\nu)=\nu^2, D(\nu)=-\nu^2, T_1(h,\,\nu)=\frac{\sin[\nu h]}{\nu}$. Числа $\nu_k=\pm\frac{\pi k}{h}$, де $k\in\mathbb{N}$, є простими нулями функції $T_1(h,\,\nu)$. За теоремою 1 розв'язками задачі (22) є функції

$$U_{\pm k}(t,\,x)=e^{\pm\frac{\pi kx}{h}}\,\sin\frac{\pi kt}{h},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Зауважимо, що з цієї дискретної множини розв'язків задачі (22) за допомогою диференціально-символьного методу можна отримати розв'язки цієї задачі у вигляді

$$U(t,x)=\varphi(ix+t)-\varphi(ix-t),$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ періодична функція з періодом $T=2h$, тобто $\varphi\in C^2_{2h}$. ▲

3.2.5. Рівняння теорії пружності.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right]U(t,\,x)=0,\\&U(0,x)=U(h,\,x)=0.\end{aligned}\tag{23}$$

▼ Для цієї задачі отримаємо $a(\nu)=0$, $b(\nu)=\nu^4$, $D(\nu)=-\nu^4$, $T_1(h,\,\nu)=\frac{\sin[\nu^2h]}{\nu^2}$,

$$M=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\nu\in\mathbb{C}:\ \ \nu^2h=\pm\,\pi k\right\}.$$

Числа $\nu_k=\pm\sqrt{\frac{\pi k}{h}}$, $\nu_k=\pm i\sqrt{\frac{\pi k}{h}}$, де $k\in\mathbb{N}$, прості нулі функції $T_1(h,\,\nu)$. Будуємо серію ($k\in\mathbb{N}$) квазіполіномних розв'язків задачі (23) відповідно до теореми 1

$$\begin{aligned}&U_{\pm 1k}(t,\,x)=e^{\pm x\sqrt{\frac{\pi k}{h}}}\sin\tfrac{\pi kt}{h},\\&U_{\pm 2k}(t,\,x)=e^{\pm ix\sqrt{\frac{\pi k}{h}}}\sin\tfrac{\pi kt}{h}.\ \blacktriangle\end{aligned}$$

Розглянемо задачу з вищою кратністю нуля функції $T_1(h,\,\nu)$.

Приклад 3. Розв'язати у смузі S_1 задачу Діріхле

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}+4\pi^2\right]U(t,\,x)=0,\\&U(0,x)=U(1,\,x)=0.\end{aligned}\tag{24}$$

▼ Для цієї задачі отримаємо $a(\nu)=\nu^2$, $b(\nu)=4\pi^2$, $h=1$, $D(\nu)=\nu^4-4\pi^2$, $T_1(1,\nu)=e^{-\nu^2}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\nu^4-4\pi^2}}{\sqrt{\nu^4-4\pi^2}}$, $M=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\big\{\nu\in\mathbb{C}:\ \nu^4-4\pi^2=-\pi^2k^2\big\}$.

Позначимо корені рівняння $\nu^4-4\pi^2=-\pi^2k^2$: $\nu_{11\pm}$ для $k=1$; ν_2 для $k=2$; $\nu_{k1\pm}$, $\nu_{k2\pm}$ для $k\geq 3$. Число $\nu_2=0$ має кратність 4. Тому для ν_2 за теоремою 1 знаходимо нетривіальні квазіполіномні розв'язки задачі (24)

$$U_{21}(t,x)=2\pi\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\sin[2\pi t];$$

$$U_{22}(t,x)=2\pi\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=x\sin[2\pi t];$$

$$U_{23}(t,x)=2\pi\,\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\big(x^2-2t\big)\sin[2\pi t];$$

$$U_{24}(t,x)=2\pi\,\frac{\partial^3}{\partial\nu^3}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\big(x^3-6tx\big)\sin[2\pi t].$$

Для нулів $\nu_{11\pm}=\pm\sqrt[4]{3\pi^2}$ одержуємо такі розв'язки задачі (24):

$$U_{11\pm}(t,x)=e^{-\pi\sqrt{3}\,t\pm\sqrt[4]{3\pi^2}x}\sin[\pi t]\,.$$

Для нулів $\nu_{12\pm}=\pm i\,\sqrt[4]{3\pi^2}$ одержуємо

$$U_{12\pm}(t,x)=e^{\pi\sqrt{3}\,t\pm i\,\sqrt[4]{3\pi^2}x}\sin[\pi t]\,.$$

Для коренів $\nu_{k1\pm}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\mp i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}$, де $k\in\mathbb{N}\backslash\{1;2\}$, отримаємо такі розв'язки задачі (24):

$$U_{k1\pm}(t,x)=\sin[\pi kt]\,e^{\pm\,\pi i\sqrt{k^2-4}\,t\,\pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1\,\mp\,i)\,\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}\,x}.$$

Для інших коренів $\nu_{k2\pm}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}$, де $k\in\mathbb{N}\backslash\{1;2\}$, одержуємо ще такі розв'язки задачі (24):

$$U_{k2\pm}(t,x)=\sin[\pi kt]\,e^{\pm\,\pi i\sqrt{k^2-4}\,t\,\pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1\,\pm\,i)\,\sqrt[4]{\pi^2(k^2-4)}\,x}.\ \blacktriangle$$

Розглянемо приклад задачі Діріхле для диференціальних рівнянь нескінченного порядку.

Приклад 4. Розв'язати задачу Діріхле у смузі S_1 для диференціально-функціонального рівняння

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2U(t,x)}{\partial t^2}=U(t,x+1)-10\,U(t,x),\\ U(0,x)=U(1,x)=0\,.\end{gathered}\tag{25}$$

▼ Диференціально-функціональне рівняння подамо у вигляді такого диференціального рівняння нескінченного порядку

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-e^{\frac{\partial}{\partial x}}+10\right]U(t,x)=0.$$

Тоді (25) є задачею (4), (5), у якій $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -e^{\nu} + 10$, $D(\nu) = e^{\nu} - 10$, $T_1(1, \nu) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{e^{\nu}-10}}{\sqrt{e^{\nu}-10}}$,

$$M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\nu \in \mathbb{C}:\ \ e^{\nu} = 10 - \pi^2 k^2\right\}.$$

Числа $\nu_{1m} = \ln\left(10 - \pi^2\right) + 2\pi m i$, де $m \in \mathbb{Z}$, є простими нулями функції $T_1(1, \nu)$. Тому за теоремою 1 знаходимо такі розв'язки задачі (25):

$$U_{1m}(t, x) = \sin[\pi t]\left(10 - \pi^2\right)^x e^{2\pi m i x}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для чисел $\nu_{km} = \ln\left(\pi^2 k^2 - 10\right) + (\pi + 2\pi m)i$, де $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $m \in \mathbb{Z}$, які є також простими нулями функції $T_1(1, \nu)$, одержуємо такі розв'язки задачі (25):

$$U_{km}(t, x) = \sin[\pi k t]\left(\pi^2 k^2 - 10\right)^x e^{\pi(1+2m)ix},\ \ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ m \in \mathbb{Z}.\ \blacktriangle$$

4. Висновки. Доведено, що ядро задачі Діріхле у часовій смузі є тривіальним лише у разі сталого дискримінанта $4D$ полінома $L(\,\cdot\,, \nu)$, який не належить до множини $P = \left\{-(2k\pi/h)^2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$ від'ємних чисел. Якщо ж дискримінант $4D$ сталий і належить до множини P, то ядро задачі нескінченновимірне і визначається класом цілих функцій деякого порядку. В інших випадках доведено існування зліченної множини лінійно незалежних розв'язків задачі, до якої належать, зокрема, квазіполіномні функції. Для побудови квазіполіномних розв'язків використано диференціально-символьний метод. Цей метод дав змогу за допомогою дій диференціальних виразів скінченного порядку на класично відокремлені розв'язки однорідного рівняння з покладанням після дії виразів параметра (за яким діють вирази) рівним нулеві знайти шукані розв'язки задачі Діріхле. Порядок диференціальних виразів менший від кратності нулів деякої цілої функції. Результати дослідження ядра задачі Діріхле у часовій смузі продемонстровано на деяких класичних рівняннях математичної фізики.

У перспективі цікавими дослідженнями є знаходження класів однозначної розв'язності відповідної неоднорідної задачі Діріхле та задачі Неймана, а також дослідження ядер задач у випадку кількох просторових змінних.

Список використаної літератури

1. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое / *В.М. Борок* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183, №5. – С. 995-998.
2. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / *В.П. Бурский*. – К.: Наук. думка, 2002. – 316 с.
3. *Гельфанд И.М.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / *И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов*. – М.: Физматгиз., 1958. – 274 с.
4. *Каленюк П.І.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними / *П.І. Каленюк, І.В. Когут, З.М. Нитребич* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №2. – С. 7-15.
5. *Каленюк П.І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / *П.І. Каленюк, З.М. Нитребич*. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
6. *Каленюк П.И.* Обобщенный метод разделения переменных / *П.И. Каленюк, Я.Е. Баранецкий, З.Н. Нитребич*. – К.: Наук. думка, 1983. – 232 с.

7. *Леонтьев А.Ф.* Обобщение рядов экспонент / *А.Ф. Леонтьев.* – М.: Наука, 1981. – 320с.
8. *Нитребич З.М.* Крайова задача у безмежній смузі /*З.М. Нитребич* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1994. – Т. 37. – С. 16-21. (те саме: *Nytrebych Z.M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – Vol. 79, №6. – P. 1388-1392).
9. *Пташник Б.И.* Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / *Б.И. Пташник.* – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Пташник Б.Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / *Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук.* – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Тихонов А.Н.* Дифференциальные уравнения / *А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников.* – М.: Наука, 1980. – 232 с.

Стаття: надійшла до редакції 05.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ON SOLUTIONS OF A HOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM IN THE TIME STRIP FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH RESPECT TO TIME VARIABLE

Volodymyr IL'KIV, Zinovii NYTREBYCH

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, Lviv, 79013
e-mail: ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

We investigate the set of solutions of Dirichlet problem in the strip for homogeneous partial differential equation with two variables of second order in one (time) variable, in which the homogeneous boundary conditions are given, and generally infinite order in other (spatial) variable. We establish the necessary and sufficient conditions of existence of nontrivial solutions of this ill-posed problem in the class of quasi-polynomials and propose the differential-symbol method of construction of such solutions. The results of investigating the null space of the Dirichlet problem in the time strip are used for certain equations of mathematical physics.

Key words: Dirichlet problem, existence of the solutions.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ВО ВРЕМЕННОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Владимир ИЛЬКИВ, Зиновий НИТРЕБИЧ

Национальный университет "Львовская политехника",
ул. Бандеры, 12, Львов, 79013
e-mail: ilkivv@i.ua, znytrebych@gmail.com

Исследовано множество решений задачи Дирихле в полосе для однородного дифференциального уравнения в частных производных с двумя переменными второго порядка по одной (временной) переменной, по которой заданы однородные краевые условия, и вообще бесконечного порядка по второй (пространственной) переменной. Установлены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных решений данной некорректной задачи в классе квазиполиномов и предложен дифференциально-символьный метод их построения. Результаты исследования ядра задачи Дирихле во временной полосе использовано для некоторых уравнений математической физики.

Ключевые слова: задача Дирихле, существование решений.