ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 57–64
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 57–64

УДК 519.21

АДИТИВНІ ФУНКЦІОНАЛИ, ЗАДАНІ НА СІМЕЙСТВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Олександр ЛЕБЕДЄВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: alex-lebedev@hotmail.com

Досліджено адитивні функціонали, які задані у випадковому середовищі. Пораховано середній прибуток, ризик і міру ризику у випадку задання марковського процесу у випадковому середовищі з дискретним, неперервним часом та відомим початковим станом. Також розглянуто усереднені сумарні прибутки за одиницю часу у випадку, коли випадковий процес еволюціонує з часом та є марковським або напівмарковським із скінченною множиною станів.

Ключові слова: марковський процес, прийняття рішень, випадкове середовище, адитивний функціонал.

1. Вступ. Розглядаємо систему, в якої простір станів S складається зі скінченної кількості елементів. Нехай S збігається з множиною цілих чисел $S = \{1, 2, ..., N\}$. Кожному стану $i \in S$ відповідає скінченна множина K_i рішень (або альтернатив), елементи якої позначимо $k = 1, 2, ..., K_i$. Простором політик K назвемо прямий добуток множин рішень, тобто $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_N$. Розглядається задача прийняття послідовних рішень, яка полягає у виборі рішень при спостереженні за поточними станами в моменти $n = 0, 1, 2, ...$

Якщо система перебуває в стані $i \in S$ і приймає рішення $k \in K_i$, то система отримує дохід r_i^k, її стан у наступний момент часу визначається ймовірнісним законом p_{ij}^k $(j \in S)$, де p_{ij}^k – ймовірність того, що система зі стану i при виборі рішення k потрапить у стан j. Припускаємо, що дохід r_i^k обмежений при всіх $i \in S$ і $k \in K_i$. Крім того,

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^k = 1, \quad p_{ij}^k \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i, j \in S, \quad k \in K_i. \tag{1}$$

Розглянемо процес з переоцінкою. Нехай $\beta,\ 0 \leqslant \beta < 1,$ – коефіцієнт переоцінки. Його сенс полягає в тому, що одиниця доходу через час n (наприклад, n днів) становитиме β^n одиниць. Введення коефіцієнта переоцінки з математичного погляду зору веде до обмеження сумарного середнього прибутку.

Задамо початковий розподіл

$$a = (a_1, a_2, ..., a_N), \tag{2}$$

де

$$\sum_{i \in S} a_i = 1, \quad a_i \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i \in S. \tag{3}$$

Тоді система описується неоднорідним ланцюгом Маркова з прибутками [1], [5].

2. Марковські процеси прийняття рішень з переоцінкою у випадковому середовищі.

2.1. Дискретний час. Зовнішні чинники будемо описувати через клас подій $A_1, A_2, \ldots, A_m$, які називаються станами, причому $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Позначимо

$$\mathsf{P}(A_i) = p_i, \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{4}$$

Тут p_i – ймовірність потрапляння у відповідне середовище A_i.

У кожному фіксованому стані середовища задано керування, набір стратегій і політик, коефіцієнт переоцінки та вектор-стовпець сумарних середніх прибутків [5]

$$V_\beta(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P_n(\pi) r(f_{n+1}). \tag{5}$$

Потрібно порахувати середній сумарний прибуток, ризик і міру ризику.

Порахуємо середній прибуток

$$\begin{gathered} p_1 V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1}) + p_2 V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2}) + \cdots + p_m V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m}) = \\ = p_1 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_1}^n P_n^{A_1}(\pi^{A_1}) r(f_{n+1}^{A_1}) + p_2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_2}^n P_n^{A_2}(\pi^{A_2}) r(f_{n+1}^{A_2}) + \cdots + \\ + p_m \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_m}^n P_n^{A_m}(\pi^{A_m}) r(f_{n+1}^{A_m}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i}). \end{gathered} \tag{6}$$

Ризик визначаємо як середньоквадратичне відхилення

$$\begin{gathered} p_1 \left(V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})\right)^2 + p_2 \left(V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})\right)^2 + \cdots + p_m \left(V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2 - \\ - \left(p_1 V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1}) + p_2 V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2}) + \cdots + p_m V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{m} p_i \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\Bigr)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Тоді величина ризику набуде такого вигляду:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\Bigr)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2}. \tag{8}$$

Мірою ризику вважаємо

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2-\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})}. \tag{9}$$

2.2. Неперервний час. Нехай тепер стани зовнішнього середовища $A_1, A_2, ..., A_m$ змінюються з часом та утворюють марковський процес $x(t)$ із скінченною множиною станів $A_1, A_2, ..., A_m$.

Нехай, $p_1(t), p_2(t), ..., p_m(t)$-ймовірності перебування середовища у відповідних станах

$$\begin{gathered} p_1(t)=P\{x(t)=A_1\}, \quad ..., \quad p_m(t)=P\{x(t)=A_m\}, \\ p_i(t)=P\{x(t)=A_i\}. \end{gathered} \tag{10}$$

У кожному фіксованому стані задано керування, набір стратегій і політик, коефіцієнт переоцінки та вектор-стовпець сумарних середніх прибутків [5]

$$V_\beta^{A_i}(\pi^{A_i})=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i}), \quad \text{де} \quad i=1,...,m. \tag{11}$$

Треба порахувати середній сумарний прибуток, ризик і міру ризику.

Порахуємо середній прибуток

$$\begin{gathered} p_1(t)V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})+p_2(t)V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})+\cdots+p_m(t)V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})= \\ =p_1(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_1}^n P_n^{A_1}(\pi^{A_1})r(f_{n+1}^{A_1})+p_2(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_2}^n P_n^{A_2}(\pi^{A_2})r(f_{n+1}^{A_2})+\cdots+ \\ +p_m(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_m}^n P_n^{A_m}(\pi^{A_m})r(f_{n+1}^{A_m})=\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i}). \end{gathered} \tag{12}$$

Ризик рахуємо як середньоквадратичне відхилення

$$\begin{gathered} p_1(t)\left(V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})\right)^2+p_2(t)\left(V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})\right)^2+\cdots+p_m(t)\left(V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2- \\ -\left(p_1(t)V_\beta^{A_1}(\pi^{A_1})+p_2(t)V_\beta^{A_2}(\pi^{A_2})+\cdots+p_m(t)V_\beta^{A_m}(\pi^{A_m})\right)^2= \\ =\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2-\left(\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Тоді величина ризику набуде такого вигляду:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2-\left(\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^n P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2}. \tag{14}$$

Мірою ризику вважаємо

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^{n}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\Big)^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^{n}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})\right)^2}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_{A_i}^{n}P_n^{A_i}(\pi^{A_i})r(f_{n+1}^{A_i})}. \qquad (15)$$

3. Адитивні функціонали прибутку. Нехай $x(t)$ марковський процес із скінченною множиною станів $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$. Позначимо τ_0 – момент першого виходу з початкового стану

$$\tau_0 = \inf_{t>0}\{x(t) \neq x(0)\}. \qquad (16)$$

Тоді $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ – відповідний перший, другий, ..., n-й моменти виходу з попереднього стану. $x(\tau_1), x(\tau_2), \dots, x(\tau_n), \dots$ – утворюють однорідний ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями. $P\{x(\tau_n) = A_j|x(\tau_{n-1}) = A_i\} = p_{ij}$, p_{ij} – ймовірність того, що в момент τ_n система перебуває в стані A_j за умови, що в момент часу τ_{n-1} вона перебувала в стані A_i.

Час перебування у кожному фіксованому стані розподілений за показниковим розподілом і залежить лише від номеру цього стану [6]

$$P\{\tau > t \mid x(0) = A_i\} = e^{-\lambda_i t}. \qquad (17)$$

Матриця перехідних ймовірностей за один крок

$$P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^{m} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

є нерозкладною та стохастичною, тобто

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1. \qquad (19)$$

Тоді існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, p_2, \dots, p_m$ такий, що

$$\sum p_{ij}p_j = p_i, \quad \lim P\{x(t) = A_j \mid x(0) = A_i\} = p_j. \qquad (20)$$

Теорема 1 (Ергодична)**.** [3] *Нехай виконуються такі умови:* ***а)*** *стани вкладеного ланцюга Маркова утворюють один додатний клас із стаціонарними ймовірностями* p_j*;* ***б)*** *всі стани ланцюга Маркова регулярні, і коефіцієнти* q_j *задовольняють умову* $\sum p_j q_j^{-2} < \infty$; ***в)*** *функція* $f(x)$ *на станах ланцюга така, що* $\sum f^2(i)p_i q_i^{-2} < \infty$*. Тоді з ймовірністю* 1

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))dt = \frac{\sum f(i)p_i\frac{1}{q_i}}{\sum p_i\frac{1}{q_i}}. \qquad (21)$$

Використовуючи цю теорему, ми можемо стверджувати, оскільки функція $V_\beta^{x(t)}$ є скінченною, що усереднений сумарний прибуток за одиницю часу збігається майже напевно до такої величини:

$$\frac{1}{t}\int_0^t V_\beta^{x(u)}du \xrightarrow{\text{м.н.}} \frac{\sum\limits_{i=1}^m V_\beta^{A_i} p_i \frac{1}{\lambda_i}}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}} \tag{22}$$

або

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sum_{n=0}^\infty \beta^n_{x(u)} P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)}) r(f_{n+1}^{x(u)})du = \frac{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{n=0}^\infty \beta^n_{A_i} P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}}. \tag{23}$$

Далі, знайшовши усереднений сумарний прибуток за одиницю часу, можемо порахувати усереднений сумарний прибуток за весь період часу t. Тому

$$\int_0^t V_\beta^{x(u)}du \xrightarrow{\text{м.н.}} t\frac{\sum\limits_{i=1}^m V_\beta^{A_i} p_i \frac{1}{\lambda_i}}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}} \tag{24}$$

або

$$\int_0^t \sum_{n=0}^\infty \beta^n_{x(u)} P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)}) r(f_{n+1}^{x(u)})du = t\frac{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{n=0}^\infty \beta^n_{A_i} P_n^{A_i}(\pi^{A_i}) r(f_{n+1}^{A_i})}{\sum\limits_{i=1}^m p_i \frac{1}{\lambda_i}}. \tag{25}$$

4. Адитивні функціонали прибутку у випадку напівмарковського випадкового процесу. Розглянемо процес, для якого час перебування в кожному стані є випадковою величиною, а самі рішення приймають у випадкові моменти, тобто процеси прийняття рішень з неперервним часом.

Ми обмежимось напівмарковськими процесами прийняття рішень. Напівмарковський процес поєднує в собі властивості марковських процесів і процесів відновлення. Тобто, напівмарковський процес – це такий випадковий процес, який переходить із одного стану в інший відповідно до заданих розподілів ймовірностей, а час перебування процесу у будь-якому стані є випадковою величиною, розподіл якої залежить від цього стану та від стану, в який буде зроблено наступний перехід процесу.

Нехай випадковий процес $x(t)$, який характеризує еволюцію зовнішнього середовища, є напівмарковським випадковим процесом. Тоді $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ послідовні моменти виходу з початкового стану.

Час перебування у фіксованому стані не розподілений за показниковим розподілом. Позначимо

$$P\{\tau > t \mid x(0) = i\} = F_i(t). \tag{26}$$

Вважаємо, що середній час перебування в стані скінченний, тобто $E_i(\tau) < \infty$, це означає, що $\int_0^\infty t dF_i(t) = E_i(\tau) < \infty$ $x(\tau_1), \ldots, x(\tau_n)$ – утворюють ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями p_{ij}. $P\{x(\tau_n) = j \mid x(\tau_{n-1}) = i\} = p_{ij}$ – ймовірність того, що в момент τ_n система перебуває в стані j за умови, що в момент часу τ_{n-1} вона перебувала в стані i.

Аналогічно, ми можемо порахувати усереднений сумарний прибуток за одиницю часу, використавши ергодичну теорему. Оскільки функція $V_\beta^{x(u)}$ скінченна, то отримаємо, що усереднений сумарний прибуток за одиницю часу збігається з ймовірністю 1 до такої сталої величини $\frac{\sum_{i=1}^m V_\beta^i E_i(\tau)p_i}{\sum_{i=1}^m p_i E_i(\tau)}$, тобто

$$\frac{1}{t}\int_0^t V_\beta^{x(u)}du \xrightarrow{\text{м.н.}} \frac{\sum\limits_{i=1}^m V_\beta^i E_i(\tau)p_i}{\sum\limits_{i=1}^m p_i E_i(\tau)} \tag{27}$$

або

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sum_{n=0}^\infty \beta_{x(u)}^n P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)})r(f_{n+1}^{x(u)})du = \frac{\sum\limits_{i=1}^m E_i(\tau)p_i \sum\limits_{n=0}^\infty \beta_i^n P_n^i(\pi^i)r(f_{n+1}^i)}{\sum\limits_{i=1}^m p_i E_i(\tau)}. \tag{28}$$

Далі, знайшовши усереднений сумарний прибуток за одиницю часу, можемо порахувати усереднений сумарний прибуток за весь період часу t. Тому

$$\int_0^t V_\beta^{x(u)}du \xrightarrow{\text{м.н.}} t\frac{\sum\limits_{i=1}^m V_\beta^i E_i(\tau)p_i}{\sum\limits_{i=1}^m p_i E_i(\tau)} \tag{29}$$

або

$$\int_0^t \sum_{n=0}^\infty \beta_{x(u)}^n P_n^{x(u)}(\pi^{x(u)})r(f_{n+1}^{x(u)})du = t\frac{\sum\limits_{i=1}^m E_i(\tau)p_i \sum\limits_{n=0}^\infty \beta_i^n P_n^i(\pi^i)r(f_{n+1}^i)}{\sum\limits_{i=1}^m p_i E_i(\tau)}. \tag{30}$$

5. Висновки. Ми досліджували N-вимірний вектор сумарних середніх прибутків $V_\beta(\pi) = \sum_{n=0}^\infty \beta^n P_n(\pi)r(f_{n+1})$, який у кожному стані середовища $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ має свою відповідну матрицю перехідних ймовірностей, вектор прибутків, коефіцієнт переоцінки та стратегію. Розглянули марковські процеси прийняття рішень у випадковому середовищі з дискретним і неперервним часом, коли початковий стан системи був відомим. Для цих випадків знайдено середній прибуток, ризик і міру ризику.

Також розглядали усереднені сумарні прибутки за одиницю часу у випадку, коли зовнішнім середовищем є випадковий процес $x(t)$, що еволюціонує з часом, тобто є марковським процесом із скінченною множиною станів $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ або напівмарковським процесом.

Список використаної літератури

1. *Бобиляк А.М.* Метод пошуку оптимальних стратегій марковського процесу прийняття рішення на основі властивостей власного вектора / *А.М. Бобиляк* // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 17-25.
2. *Боднар Т.Д.* Оптимальний інвестиційний портфель для різних типів розподілів повернень / *Т.Д. Боднар* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Т. 67. – С. 5-13.
3. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов: Т. II / *И.И. Гихман, А.В. Скороход.* – М.: Наука, 1973. – 641 с.
4. *Єлейко Т.Я.* Розробка методів прискореного моделювання та стохастичної оптимізації в корпоративних моделях: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. / *Т.Я. Єлейко.* – К., 2010. – 124 с.
5. *Майн Х.* Марковские процессы принятия решений / *Х. Майн, С. Осаки.* – М.: Наука, 1977. – 176 с.
6. *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / *А.В. Скороход.* – К.: Вища шк., 1975. – 296 с.

Стаття: надійшла до редакції 02.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ADDITIVE FUNCTIONALS PREDETERMINED ON A FAMILY OF MARKOV PROSESSES

Yaroslav YELEYKO, Oleksandr LEBEDIEV

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: alex-lebedev@hotmail.com

Additive functionals predetermined in a random environment are studied in the article. Average income, the risk and the measure of risk in the case of setting the Markov process in a random environment with discrete and continuous time and a given initial state are calculated. Also the average total profits per time unit in the case when the random process evolves over time and is a Markov's or semi-Markov's with a finite set of states are considered.

Key words: Markov process, decision theory, random environment, additive functional.

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАДАННЫЕ НА СЕМЕЙСТВЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Александр ЛЕБЕДЕВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: alex-lebedev@hotmail.com

Изучено аддитивные функционалы заданные в случайной среде. Вычислено средний доход, риск и мера риска в случае задания марковского процесса в случайной среде с дискретным и непрерывным временем и известным начальным состоянием. Также рассмотрены усредненные суммарные прибыли за единицу времени, в случае когда случайный процесс эволюционирует со временем, и является марковским или полумарковским с конечным множеством состояний.

Ключевые слова: марковский процесс, принятие решений, случайная среда, аддитивный функционал.