ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 52–56
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 52–56

УДК 512.552.13

ДРОБОВЕ IF-КІЛЬЦЕ БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ, Андрій ГАТАЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доведено, що дробове IF-кільце Безу є дробово-регулярним, і якщо його стабільний ранг не перевищує 2, то дробове IF-кільце Безу є кільцем елементарних дільників.

Ключові слова: кільце Безу, IF-кільце, дробове IF-кільце, стабільний ранг, кільце елементарних дільників.

Нехай P – деяка кільцева властивість. Згідно з Вамошем [1] кільце R є дробовим P, якщо класичне кільце дробів $Q(R/I)$ кільця R/I має властивість P для довільного ідеалу I кільця R. Зокрема, нетерове кільце є дробово напівлокальне і також дробове кільце Каша. Мета нашої праці – дати відповідь на питання, сформульоване в [2] про дробове IF-кільце Безу. Доведемо, що дробове IF-кільце Безу є дробово-регулярним, і якщо його стабільний ранг дорівнює 2, то дробове IF-кільце Безу є кільцем елементарних дільників.

Назвемо комутативне кільце R дробово-регулярним, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ класичне кільце дробів $Q(R/rad(a))$ кільця $R/rad(a)$ є регулярним, де $rad(a)$ – нільрадикал елемента a [3].

Нагадаємо необхідні означення та факти.

Кільце R називатимемо IF-кільцем, якщо довільний ін'єктивний R-модуль плоский [4]. В наступних теоремах зібрано всі відомі факти про IF-кільця. Для зручності в теоремі 1 об'єднуються результати кількох авторів.

Теорема 1 ([2], [4], [5], [6], [7], [8]). *Нехай R – комутативне кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) *R – IF-кільце;*
2) *R – когерентне кільце і довільний скінченнопороджений ідеал єануляторним ідеалом;*
3) *R – когерентне кільце і довільний плоский R-модуль є FP-ін'єктивним модулем;*
4) *R – когерентне і само FP-ін'єктивне кільце;*
5) *R – когерентне і локальне IF-кільце.*

Теорема 2 ([7]). *Комутативна область R є прюферовою областю тоді і тільки тоді, коли факторкільце R/I є IF-кільцем для довільного ненульового скінченнопородженого ідеалу I.*

Кільце R називатимемо напівкогерентним кільцем, якщо $Hom(B, C)$ є підмодулем плоского R-модуля, де B, C – ін'єктивні R-модулі [7]. Очевидно, що область Безу та нетерове кільце напівкогерентні. Комутативне кільце R є когерентним тоді і тільки тоді, коли $Hom(B, C)$ є плоским R-модулем для довільної пари B, C ін'єктивних R-модулів [7]. Якщо R – область цілісності, а B, C – ін'єктивні R-модулі, тоді $Hom(B, C)$ є модулем без кручення і $Hom(B, C) \subset Q \bigotimes Hom(B, C)$, де Q – поле дробів кільця R.

Твердження 1. *Редуковане комутативне кільце R є напівкогерентним тоді і тільки тоді, коли $minR$ – компакт.*

Перейдемо до характеризації IF-кілець. Очевидним прикладом IF-кільця може слугувати регулярне кільце, оскільки над таким кільцем довільний модуль плоский. Якщо кільце редуковане, то правильне й обернене твердження.

Твердження 2 ([7]). *Нехай R – комутативне кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) R – регулярне кільце;

2) R – редуковане IF-кільце.

Можна відмітити і такий результат.

Твердження 3 ([7]). *Нехай R – IF-кільце. Тоді:*

1) *$Q(R) = R$;*
2) *якщо S – мультиплікативно замкнена множина в R, тоді R_S є IF-кільцем.*

Це твердження відіграє фундаментальну роль у наших дослідженнях.

Твердження 4 ([7]). *Якщо кільце дробів $Q(R)$ кільця R є IF-кільцем, тоді R – напівкогерентне і довільний скінченнопороджений плоский підмодуль вільного R-модуля є проективним.*

Нехай R – комутативне кільце Безу, яке є дробовим IF-кільцем. Тоді для довільного ненульового ідеалу I кільця R, кільце дробів $Q(R/I)$ є IF-кільцем. Оскільки $min(R/I)$ гомоморфний $min(R/radI)$, то бачимо, що кільце $R/radI$ – редуковане кільце Безу з компактним простором $minR$. Згідно з [9] $Q(R/radI)$ є регулярним кільцем, і отже, R – дробово регулярне кільце. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 3. *Дробове IF-кільце Безу є дробово-регулярним.*

Наслідок 1. *Нехай R – дробове IF-кільце Безу. Тоді для довільного власного ідеалу I кільця R простір $min(R/I)$ – компакт.*

Теорема 4. *Нехай R – дробове IF-кільце Безу з ненульовим радикалом Джекобсона (нільрадикалом). Тоді ст.р.$(R) \leqslant 2$.*

Доведення. Розглянемо факторкільце $R/J(R)$. На підставі наслідку 1 $min(R/J(R))$ – компакт. Тоді $R/J(R)$ – кільце Ерміта, тобто кільце стабільного рангу 2 [10]. Звідси одержимо, що ст.р.$(R) \leqslant 2$ [11]. □

Нехай R – таке комутативне кільце Безу, що $Q(R/rad(a)$ є IF-кільцем для довільного ненульового елемента $a \in R$. Оскільки IF-кільце – це когерентне само FP-ін'єктивне кільце, тоді $Q(R/rad(a)$ – когерентне кільце. Враховуючи [7, тв. 3.2] одержимо, що $R/rad(a)$ – напівкогерентне редуковане кільце. Звідси на підставі [7], $min(R/rad(a)$ – компакт, а це означає, що $Q(R/rad(a)$ – регулярне кільце. Отже, доведена така теорема.

Теорема 5. *Нехай R – таке комутативне кільце Безу, що $Q(R/rad(a)$ є IF-кільцем для довільного ненульового елемента $a \in R$. Тоді R – дробово регулярне кільце.*

Щоб зрозуміти перевагу саме таких досліджень, розглянемо випадок адекватного кільця Безу R. Нехай a – ненульовий елемент кільця R. Тоді згідно з [14] R/aR – комутативне кільце Безу, в якому нульовий елемент $\bar{0}$ адекватний. Згідно з $(R/aR)/(aR/rad(a)) \cong R/rad(a)$ – регулярне кільце, яке збігається зі своїм кільцем дробів $Q(R/rad(a))$. Оскільки регулярне кільце є IF-кільцем, то одержуємо такий результат.

Теорема 6. *Адекватне кільце є скінченим дробовим IF-кільцем.*

Зауважимо, що в [12, приклад 2.3] наведено приклад адекватного кільця, яке не є дробовим IF-кільцем у сенсі означення з праці [3].

Теорема 7. *Дробово-регулярне (скінчене дробове IF-кільце) кільце Безу стабільного рангу 2 є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Для доведення достатньо довести, що модуль M, який відповідає матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$ є прямою сумою циклічних підмодулів. Зауважимо, що модуль можна розглядати як R/acR-модуль. Нехай $P = rad(ac)$. Оскільки кільце R є дробово регулярним, то кільце $\bar{R} = R/P$ є напівспадковим. Тоді $\bar{M} = M/PM$ є модулем, який відповідає матриці $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{0} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix}$. Оскільки $\bar{R}$ – напівспадкове кільце і $\bar{a}\bar{c} = \bar{0}$, то існує такий ідемпотент $\bar{e} \in \bar{R}$, що $\bar{a} = \bar{e}\bar{a}$ і $\bar{c} = (\bar{1}-\bar{e})\bar{c}$. Легко побачити, що $\bar{M}\bar{e}$ відповідає матриці $\bar{e}\bar{A}$ як $\bar{e}\bar{R}$-модуль і $\bar{M}(\bar{1}-\bar{e})$ матриці $(\bar{1}-\bar{e})\bar{A}$ як $(\bar{1}-\bar{e})\bar{R}$-модуль. Кільця eR і $(1-e)R$ як гомоморфні образи R є кільцями Ерміта. Тому існують такі оборотні матриці $\bar{P}_1 \in M_2(\bar{e}\bar{R})$ і $\bar{Q}_1 \in M_2((\bar{1}-\bar{e})\bar{R})$, що

$$\bar{P}_1\bar{e}\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{s} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad (\bar{1}-\bar{e})\bar{A}\bar{Q}_1 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{t} \end{pmatrix}.$$

Приймемо $\bar{P} = (\bar{1}-\bar{e})\bar{E} + \bar{P}_1$ і $\bar{Q} = \bar{e}\bar{E} + \bar{Q}_1$, де $\bar{E}$ – оборотна матриця другого порядку над $\bar{R}$. Тоді $\bar{P}, \bar{Q}$ – такі оборотні над $\bar{R}$, що

$$\bar{P}\bar{A}\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{s} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{t} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що можемо припустити, що $\bar{s}$ є дільником $\bar{t}$. Також очевидно, що $\bar{a}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} + \bar{c}\bar{R} = \bar{s}\bar{R}$ і $\bar{s}$ є оборотним елементом в $\bar{R}$. Звідси випливає, що $\bar{M}$ циклічний $\bar{R}$-модуль. Згідно з лемою Накаями модуль M є циклічним модулем над кільцем R/acR. Звідси M є циклічним над R і $M \cong R/tR$ [13]. Отже, R є кільцем елементарних дільників. □

Список використаної літератури

1. *Vamos P.* The decomposition of finitely generated modules and fractionally self-injective rings / *P. Vamos* // J. London Math. Soc. – 1977. – Vol. 16 (2). – P. 209-220.
2. *Facchini A.* FP-injective quotient rings and elementary divisor rings / *A. Facchini, C. Faith* // Commut. Ring Theory Proc. Int. conf. – 1996. – Vol. 185. – P. 293-302.
3. *Zabavsky B.V.* Fractionally regular Bezout rings / *B.V. Zabavsky* // Math. Stud. – 2009. – Vol. 32. – P. 76-80.
4. *Colby R.R.* Rings which have flat injections / *R.R. Colby* // J. Algebra. – 1975. – Vol. 35. – P. 239-252.
5. *Pardo I. Gomes* On some properties of IF-rings / *Pardo I.Gomes, N.R. Gonzalez* // Questions Arithmetical. – 1983. – Vol. 5. – P. 335-405.
6. *Jain S.* Flat and FP-injectivity / *S. Jain* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 41. – P. 437-442.
7. *Matlis E.* Commutative semicoherent and semiregular rings / *E. Matlis* // J. Algebra. – 1985. – Vol. 95. – P. 343-372.
8. *Stenström B.* Coherent rings and FP-injective modules / *B. Stenström* // J. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 2. – P. 323-329.
9. *Maltis E.* The minimal spectrum of a reduced ring / *E. Maltis* // Illinois J. Math. – 1983. – Vol. 27, №3. – P. 353-391.
10. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range /*B.V. Zabavsky* // Alg. and Discr. Math. – 2005. – Vol. 1. – P. 151-165.
11. *Забавський Б.В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 / *Б.В. Забавський* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, №4. – С. 550-554.
12. *Couchot F.* The λ-dimension of commutative arithmetic ring / *F. Couchot* // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31. – P. 3143-3158.
13. *Larsen M.* Elementary divisor rings and finitely presented modules / *M. Larsen, W. Lewis, T. Shores* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – P. 231-248.
14. *Забавский Б.В.* Адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены / *Б.В. Забавский, С.И. Белявская* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, №3. – P. 61-66.

Стаття: надійшла до редакції 12.04.2013
прийнята до друку 16.10.2013

FRACTIONAL IF-BEZOUT RING

Bogdan ZABAVSKY, Andriy GATALEVYCH

Ivan Franko Nathional University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Proved that IF Bezout ring is fractionally regular, and if its stable range does not exceed 2, then fractionally regular IF Bezout ring is elementary divisor ring.

Key words: Bezout ring, IF ring, fractionally IF ring, stable range, elementary divisor ring.

ДРОБНОЕ IF-КОЛЬЦО БЕЗУ

Богдан ЗАБАВСКИЙ, Андрей ГАТАЛЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Івана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: gatalevych@ukr.net

Доказано, что дробное IF-кольцо Безу является дробно-регулярным, и если его стабильный ранг не превышает 2, то дробное IF-кольцо Безу является кольцом элементарных делителей.

Ключевые слова: кольцо Безу, IF-кольцо, дробное IF-кольцо, стабильный ранг, кольцо элементарных делителей.