ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 42–51
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 42–51

УДК 517.5

ПРО ДЕЯКІ УМОВИ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ВАГОВИХ ПРОСТОРІВ ГАРДІ, ЩО МАЮТЬ СИНГУЛЯРНІСТЬ

Володимир ДІЛЬНИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: dilnyi@ukr.net

Розглянуто простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ аналітичних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій f, для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Доведено еквівалентність умов, які пов'язують поведінку функції на дійсній півосі з поведінкою на уявній осі. Припускається, що сингулярна гранична функція є нетривіальною.

Ключові слова: ваговий простір Гарді, сингулярна гранична функція.

1. Вступ. Позначатимемо через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, тобто простір аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких виконується нерівність

$$\|f\| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

Теорія просторів Гарді досить детально викладена у [1], [2], [11]. Зокрема, доведено, що простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, є банаховими стосовно зазначеної норми. А. Сєдлєцкий з'ясував [3], що простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, можуть бути визначені і як класи аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$\|f\|_* := \sup_{\varphi\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty, \tag{2}$$

де остання норма еквівалентна нормі, визначеній формулою (1). М. Джрбашян довів [4, с. 413-414] еквівалентність цих означень для випадку $p = 2$. Функції f з $H^p(\mathbb{C}_+)$

мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які позначаємо через $f(it)$, і $f(it) \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$.

Б. Винницький розглянув [5] простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, $0 \le \sigma < +\infty$, функцій f, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\| := \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{3}$$

Для випадку $1 \le p < +\infty$ ця рівність визначає норму і у цьому випадку $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ є банаховим простором. Функції f з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які позначаємо також через f. Як випливає з вищенаведеного результату А. Сєдлєцкого, простір H^p_σ збігається з класичним простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, коли $\sigma = 0$.

У теорії аналітичних функцій відомий принцип "якщо функція на частині області дуже мала, то в іншій частині дуже велика". Фрази "дуже мала", "дуже велика" в конкретних твердженнях набувають цілком конкретного змісту. Одним із багатьох строгих формулювань такого типу є формула Карлемана. Мета нашої праці – довести твердження, що описує зазначений принцип для простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

2. Основна частина. Для кожної функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ існує [9] сингулярна гранична функція, яка з точністю до адитивної сталої і значень у точках неперервності визначається рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \log|f(x+iy)|\,dy - \int_{t_1}^{t_2} \log|f(iy)|\,dy.$$

Функція h є незростаючою на $\mathbb{R}$ і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \ne 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді такі умови еквівалентні:*
1) $(\forall c \in \mathbb{R}): \quad G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z\log z - cz\right\} \notin H^p(\mathbb{C}_+)$;
2) $\displaystyle\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - \int_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| - 2\sigma\log r\right) = -\infty$;
3) $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(\int_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - \int_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| - 2\sigma\log r\right) = -\infty$;
4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty$ *або* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2} = +\infty$;
5) $\displaystyle\varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty$ *або* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2} = +\infty$.

Цю теорему довели в [6] при додатковій умові тривіальності сингулярної граничної функції. Такого типу твердження використовують для дослідження циклічності функцій, властивостей інваріантних підпросторів і розв'язків рівняння типу згортки (див. [7], [8], [9]). Зауважимо, що твердження теореми справджується і для випадку $\sigma = 0$ у тому сенсі, що кожна з умов 1)–5) описує порожню множину.

Твердження теореми випливає з лем 2, 3, 5, 6, якщо врахувати, що імплікація 4) $\Rightarrow$ 5) є тривіальною.

Лема 1. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *то справджується зображення*

$$G(z) = \exp\left\{ia_0 + a_1 z + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\log|G(it)|\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\,dh(t)\right\},$$

де

$$Q(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)},$$

причому

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - \int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) > -\infty.$$

Ця лема випливає з [9, с. 64], якщо врахувати, що функція G не має нулів у $\mathbb{C}_+$.

Лема 2. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, *і умова 3) виконується, то виконується також умова 4).*

Доведення. Зауважимо спочатку, що можливі два випадки

$$(\exists c > 0): \quad \int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| \leqslant c, \tag{4}$$

або (внаслідок монотонності)

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) = +\infty. \tag{5}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли виконується умова (4). Тоді

$$\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r =$$

$$= \int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{p}\log\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p + \sigma|t|\right)dt -$$

$$-2\sigma\log r \le \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt + \int\limits_{1<|t|\le r}\frac{\sigma}{|t|}dt - 2\sigma\log r \le$$

$$\le \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r}\frac{1}{t^2}\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < \frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c < \infty,$$

де стала c від r не залежить. Якщо припустити, що

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)>-\infty,$$

то на деякій послідовності (r_k) додатних чисел, такій що $r_k\to+\infty$ при $k\to\infty$, отримаємо

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r_k\right)>-\infty.$$

Врахувавши нерівність (4), одержимо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G(it)|\,dt-\int\limits_{1<t\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)|dh(t)|-2\sigma\log r_k\right)>-\infty,$$

що суперечить умові 3). Тому припущення неправильне, тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)=-\infty. \tag{6}$$

За лемою 1 справджується зображення $G(z)=G_1(z)\,G_2(z)$, де

$$G_1(z)=e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\log|G(it)|\,dt\right\},$$

$$G_2(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\,dh(t)\right\}.$$

В лемі 3 з [6] доведено, що тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty. \tag{7}$$

Для доведення потрібного залишилось довести, що

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty}\frac{\log|G_2(x)|}{x}>-\infty. \tag{8}$$

Справді,

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x}=\frac{\log\left|\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\,dh(t)\right\}\right|}{x}.$$

Але оскільки

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}Q(t,x)\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{(tx+i)^2}{\pi i\left(t^2+1\right)^2(t+ix)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2(ti-x)}\right\}=$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(-x+it\right)}\cdot\frac{-x-it}{-x-it}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}+\right.$$

$$\left.+i\frac{t-t^3x^2-2x^2t}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}\right\} = \frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)},$$

то

$$\frac{\log\left|G_2\left(x\right)\right|}{x} = \frac{\log\left|\exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{(t^2+1)^2(x^2+t^2)}dh\left(t\right)\right\}\right|}{x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right).$$

Як відомо у теорії інтеграла Стільтьєса, якщо s є неспадною, f є невід'ємною на інтервалі $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)ds\left(t\right) \geq 0.$$

Тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq 0.$$

Вважатимемо, що $x \geq 1$. Тоді

$$\frac{\log\left|G_2\left(x\right)\right|}{x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right).$$

Але $\frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2+2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$, тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dh\left(t\right)}{\left(1+t^2\right)^2} \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dh\left(t\right)}{1+\left|t\right|^3},$$

бо $\left(1+t^2\right)^2 \geq 1+|t|^3$. Б. Винницький і В. Шаран довели в [10, с. 44], що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|dh\left(t\right)\right|}{1+\left|t\right|^3} < +\infty.$$

Тому $\frac{\log|G_2(x)|}{x} \geq -\infty$ при $x \geq 1$. Отже, нерівність (8) виконується. Додавши (7) і (8), одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)\,G_2(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty,$$

тобто виконання умови 4).

Нехай тепер виконується умова (5). Тоді, врахувавши, що $h(t)\in L^1[-1;1]$, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}+\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}=$$

$$=c+\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}\geqslant c+\underline{\lim}_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|=$$

$$=c+\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|=+\infty.$$

Отже, і в цьому випадку виконується умова 4). □

Лема 3. *Якщо $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\leq p<+\infty$, $\sigma>0$, і виконується умова 5) теореми, то виконується умова 1).*

Доведення. Якщо виконується перша з умов 4), то твердження цієї леми випливає з леми 4 в [6]. Якщо ж

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}=+\infty,$$

то припустивши протилежне, тобто

$$(\exists c\in\mathbb{R}):\quad G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\in H^p(\mathbb{C}_+),$$

отримуємо, що сингулярна гранична функція h_1 функції $G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}$ задовольняє умову (див. [2])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh_1(t)|}{1+t^2}<+\infty.$$

Проте $h_1\equiv h$, що призводить до суперечності. □

Лема 4. *Якщо $f\in H^p(\mathbb{C}_+)$, $p\in[1,+\infty)$ то справджується зображення*

$$f(z)=e^{i\alpha+\beta z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}\ln|f(it)|dt\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}dh(t)\right\}\prod_{|\lambda_n|\leqslant1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n},\tag{9}$$

де

$$\alpha\in\mathbb{R},\quad \beta\leqslant 0, \tag{10}$$

причому для кутових граничних значень f на $i\mathbb{R}$, її сингулярної граничної функції h (яка є неспадною і $h'(t)=0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$) та послідовності нулів (λ_n) виконуються, відповідно, умови

$$f\in L^p(i\mathbb{R}),\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\log|f(it)||}{1+t^2}dt<+\infty,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}dt<+\infty,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{Re\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}<+\infty. \tag{11}$$

Навпаки, якщо для функції $f: i\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, неспадної функції $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь, послідовності (λ_n), $\lambda_n\in\mathbb{C}_+$, виконуються умови (10)–(11), то функція f, визначена рівністю (9), належить простору $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Це твердження доведене в [1, с. 81-82], [11, с. 25], див. також [2, с. 189-190].

Лема 5. *Якщо $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\le p<+\infty$, $\sigma>0$, $G(z)\neq 0$, $z\in\mathbb{C}_+$, і виконується умова 1), то виконується умова 2).*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|-2\sigma\log r\right)>-\infty. \tag{12}$$

Оскільки, як з'ясували при доведенні леми 2,

$$\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r<c<\infty, \tag{13}$$

то умова (12) еквівалентна одночасному виконанню умов

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)>-\infty$$

та

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right)<+\infty. \tag{14}$$

Врахувавши також (13), отримаємо

$$\int\limits_{1<t\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,e^{-\sigma|t|}dt=O(1),\ r\to+\infty,$$

з чого (див. лему 5 в [6]) випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\log\left|G_1(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|\right|}{1+t^2}dt<+\infty,$$

де G_1 таке ж, як і в доведенні леми 2. Аналогічно, врахувавши, що функція $|h|$ є неспадною, з умови (14) отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh\,(t)|}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Позначимо $\varphi(it) := G\,(it)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi} it \log(it)}$. Оскільки виконуються умови (11), то за лемою 4 одержуємо $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, де

$$f(z) = e^{i\alpha+\beta z} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{t+iz} \ln|\varphi(it)| dt\right\} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{t+iz} dh(t)\right\},$$

$\beta \leqslant 0$, h – сингулярна гранична функція функції G. Врахувавши, що G не має нулів у $\mathbb{C}_+$, сингулярна гранична функція функції f збігається з сингулярною граничною функцією функції G, а також рівності

$$Q\,(t,z) = \frac{i}{t+iz} - \frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2},$$

і $G\,(it)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi} it \log(it)} = G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}$ при $t \in \mathbb{R}$, за лемою 1 одержимо зображення (інтеграли збігаються принаймні в розумінні головного значення)

$$G\,(z)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} =$$

$$= f(z) e^{ia_0+a_1 z} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right) \log\left|G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}\right| dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right) dh\,(t)\right\} = f(z) e^{i\widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 z}$$

для деяких сталих $\widetilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{a}_1 \in \mathbb{R}$. Тому приходимо до висновку, що $G\,(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z - cz\right\} \in H^p\,(\mathbb{C}_+)$ для деякої сталої $c \in \mathbb{R}$, тобто умова 1) не виконується. Ця суперечність доводить твердження леми. $\square$

Лема 6. *Якщо $G \in H^p_\sigma\,(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G\,(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, і виконується умова 2), то виконується умова 3).*

Доведення. Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\varphi_1(r) := \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{1}{t^2} |G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c_1 < +\infty.$$

Функція

$$\varphi_2(r) := \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+ \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|} dt + \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)|,$$

очевидно, є неспадною. Оскільки

$$\log|G(it)e^{-\sigma|t|}| = \log^+|G(it)e^{-\sigma|t|}| - \log^+\frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|},$$

то якби функція φ_2 була обмеженою зверху, то правильною була б нерівність

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt - \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) > -\infty,$$

що суперечить умові. Отже, $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r) = \lim\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r) = +\infty$. Тому

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt - \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) =$$

$$= \varlimsup_{r\to+\infty}(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)) \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}(c_1-\varphi_2(r)) = -\infty,$$

а отже, виконується умова 3). □

Список використаної літератури

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции / *Дж. Гарнетт.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.
2. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций / *К. Гофман.* – М.: ИЛ., 1963. – 306 с.
3. *Седлецкий А.М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения / *А.М. Седлецкий* // Матем. сб. – 1975. – Т. 96, №1. – С. 75-82.
4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / *М.М. Джрбашян.* – М.: Наука, 1966. – 672 с.
5. *Винницкий Б.В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент / *Б.В. Винницкий* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №5. – С. 484-500.
6. *Дільний В.М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді / *В.М. Дільний* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №9. – С. 1257-1263.
7. *Vinnitskii B.* On extension of Beurling-Lax theorem / *B. Vinnitskii, V. Dil'nyi* // Math. Notes. – 2006. – T. 79. – С. 362-368.
8. *Dilnyi V.* On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces / *Dilnyi V.* // Журн. матем. фіз., анал., геом. – 2011. – Т. 7. – С. 19-33.
9. *Винницький Б.В.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки / *Б.В. Винницький, В.М. Дільний* // Матем. студії. – 2001. – Т. 16, №1. – С. 61-70.
10. *Vynnytskyi B.* On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane / *B. Vynnytskyi, V. Sharan* // Матем. студії. – 2000. – Т. 14. – С. 41-48.
11. *Duren P.* Theory of H^p spaces / *P. Duren.* New York-London: Acad. Press, 1970. – 258 p.

Стаття: надійшла до редакції 04.10.2012
доопрацьована 28.03.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ON SOME CONDITIONS FOR FUNCTIONS WITH SINGULARITY BELONGING TO THE WEIGHTED HARDY SPACES

Volodymyr Dilnyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: dilnyi@ukr.net

We consider the space $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ of analytic in $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ functions f, for which

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-p\sigma r |\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Equivalency of conditions that relate behavior of function on real semi-axis and imaginary axis is proved. Singular boundary function in this result is nontrivial.

Key words: weighted Hardy space, singular boundary function.

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ СИНГУЛЯРНОСТЬ

Владимир ДИЛЬНЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: dilnyi@ukr.net

Рассмотрено пространство $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ функций f, аналитических в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, для которых

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-p\sigma r |\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Доказано эквивалентность условий, связывающих поведение функции на действительной полуоси и на мнимой оси. Допускается, что сингулярная граничная функция является нетривиальной.

Ключевые слова: весовое пространство Харди, сингулярная граничная функция.