ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 35–41
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 35–41

УДК 517.547.24

ЖЮЛІА-ВИНЯТКОВІСТЬ ЛОКСОДРОМНИХ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Ольга ГУЩАК, Андрій КОНДРАТЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olya_khyl@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Розглянуто локсодромні мероморфні функції. Доведено, що кожна така функція є Жюліа-винятковою.

Ключові слова: нормальна сім'я, локсодромна функція, Жюліа-виняткова функція, еліптична функція.

1. Вступ. Допоміжні поняття та твердження. Теорію мультиплікативно періодичних мероморфних функцій розробив О. Раузенбергер [1]. Валірон назвав ці функції локсодромними, бо точки, в яких така функція набуває однакові значення, лежать на логарифмічних спіралях [2]. Локсодромні мероморфні функції дають просту конструкцію еліптичних функцій [2], [3].

Означення 1 ([2], [3]). *Нехай* $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. *Відображення* $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ *називається локсодромною функцією з мультиплікатором* q $(0 < |q| < 1)$, *якщо* f *є мероморфною і* $\forall z \in \mathbf{C}^*$ *виконується рівність* $f(qz) = f(z)$.

Кожна локсодромна функція f зображається у вигляді [2], [3]

$$f(z) = Cz^p \frac{\prod_{k=1}^m P(\frac{z}{a_k})}{\prod_{k=1}^m P(\frac{z}{b_k})}, \tag{1}$$

де a_k – нулі, а b_k – полюси функції f, $C = const$,

$$P(z) = (1 - z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z) \left(1 - \frac{q^n}{z}\right)$$

і $p \in \mathbf{Z}$ таке, що

$$\frac{a_1 a_2 ... a_m}{b_1 b_2 ... b_m} = q^p, \quad |q| < |a_\nu| \leqslant 1, \quad |q| < |b_\mu| \leqslant 1.$$

Означення 2 ([4]). *Сім'я мероморфних функцій називається нормальною в області* D, *якщо з довільної послідовності функцій цієї сім'ї можна вибрати рівномірно збіжну (в сенсі Каратеодорі-Ландау)* [5], [6] *всередині* D *підпослідовність.*

Жюліа-винятковi функцiї вивчали Г. Жюлiа, [7] П. Монтель [4] та О. Островський [5]. Цi функцiї тiсно пов'язанi з нормальними сiм'ями функцiй i названi так, оскiльки для них не iснує променiв Жюлiа. О. Островський знайшов необхiднi та достатнi умови Жюлiа-винятковостi мероморфної функцiї [4],[5]. Вiн розглядав функцiї на всiй площинi. Аналог теореми Островського для функцiй, мероморфних в проколенiй площинi $\mathbf{C}^*$, сформулював О. Єрьоменко [8] (доведення див. [9]).

Означення 3. *Мероморфна в* $\mathbf{C}^*$ *функцiя* f *називається Жюлiа-винятковою, якщо для довiльної послiдовностi комплексних чисел* $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n \to \infty$, $n \to \infty$ *iснує пiдпослiдовнiсть* $\{\sigma_{n_k}\}$ *така, що послiдовнiсть* $\{f(\sigma_{n_k} z)\}$ *збiгається рiвномiрно в* $\mathbf{C}^*$ *в сенсi Каратеодорi-Ландау при* $k \to \infty$.

О. Єрьоменко довiв [8] таке узагальнення теореми О. Островського.

Теорема A ([8]). *Мероморфна функцiя* $f : \mathbf{C}^* \to \overline{\mathbf{C}}$ *є Жюлiа-винятковою тодi i лише тодi, коли вона зображається у виглядi*

$$f(z) = Cz^p \frac{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{a_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{a_k}{z})}{\prod_{k\geqslant 0}(1 - \frac{z}{b_k}) \prod_{k<0}(1 - \frac{b_k}{z})} \tag{2}$$

де $C \in \mathbf{C}$, $p \in \mathbf{Z}$, $a_k \in \mathbf{C}^*$, $b_k \in \mathbf{C}^*$, *обидвi послiдовностi* $\{a_k\}$ *i* $\{b_k\}$ *можуть бути скiнченими або нескiнченими в одному чи в обох напрямах, при* $k \to -\infty$ *вони прямують до 0, а при* $k \to +\infty$ *до* ∞, *i виконуються такi умови:*

1) *кiлькiсть нулiв* a_k *i полюсiв* b_k *функцiї* f *у кожному кiльцi вигляду* $\{z : r < |z| < 2r\}$, $r > 0$ *(з врахуванням кратностi) обмежена сталою* C_1;
2) *рiзниця мiж кiлькiстю нулiв i полюсiв функцiї* f *у кожному кiльцi* $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ *(з врахуванням кратностi) обмежена сталою* C_2;
3) *для будь-яких* i *та* j *вiдношення*

$$|a_i|^p \frac{\prod_{k:0\leqslant \log|a_k|/\log|a_i|\leqslant 1} \frac{|a_i|}{|a_k|}}{\prod_{k:0\leqslant \log|b_k|/\log|a_i|\leqslant 1} \frac{|a_i|}{|b_k|}}$$

i

$$|b_j|^p \frac{\prod_{k:0\leqslant \log|b_k|/\log|b_j|\leqslant 1} \frac{|b_j|}{|b_k|}}{\prod_{k:0\leqslant \log|a_k|/\log|b_j|\leqslant 1} \frac{|b_j|}{|a_k|}}$$

обмеженi зверху сталою C_3;
4) *iснує незалежна вiд* i *та* j *стала* C_4 *така, що*

$$\left| \frac{a_i}{b_j} - 1 \right| \geqslant C_4.$$

2. Жюлiа-винятковiсть локсодромних функцiй. Основним результатом цiєї статтi є така теорема.

Теорема 1. *Кожна локсодромна функцiя* f *є Жюлiа-винятковою.*

Доведення. Згідно з (1) кожна відмінна від сталої локсодромна функція f з мультиплікатором q набуває вигляду (2), тому залишається перевірити для неї умови 1)–4) теореми A.

Нехай m – кількість нулів функції f у кільці $A_q = \{z : |q| < |z| \leqslant 1\}$.

Зауважимо, що зі зображення (1) випливає (див. також [2], [3]) таке: кількість полюсів функції f у кільці A_q також дорівнює $m \geqslant 2$. Вона також дорівнює m у кожному кільці вигляду $A_q(R) = \{z : |q|R < |z| \leqslant R\}$.

1. Перевіримо умову 1) теореми A.

Існують $l \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$ такі, що

$$|q|^{l+1} < r \leqslant |q|^l, \tag{3}$$

$$|q|^{n+1} < 2r \leqslant |q|^n.$$

Кількість нулів функції f у кільці $\{z : r < |z| < 2r\}$ не перевищує $(l + 1 - n)m$, оскільки в кожному кільці $A_q(q^k)$ їх є m штук. З (3) випливає, що

$$l \leqslant \frac{\log r}{\log |q|},$$

$$n + 1 > \frac{\log 2 + \log r}{\log |q|}.$$

Тому

$$m(l + 1 - n) \leqslant \left(2 - \frac{\log 2}{\log |q|}\right) m =: C_1.$$

Ця ж сама оцінка годиться, вочевидь, для кількості полюсів функції f у довільному кільці $\{z : r < |z| < 2r\}$.

2. Умову 2) перевіримо так.

Можливі такі випадки:

а) Випадок, коли $\exists k \in \mathbf{Z}$ таке, що $|q|^{k+1} < r_1 < r_2 \leqslant |q|^k$. Тоді різниця між кількістю нулів і полюсів функції f в кільці $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ не перевищує m.

б) $\exists l, n \in \mathbf{Z}$ такі, що $r_1 < |q|^l \leqslant ... \leqslant |q|^n \leqslant r_2$. Тоді в кільцях $\{z : |q|^i < |z| \leqslant \leqslant |q|^{i-1}\}$ кількість нулів і полюсів однакова, тобто різниця дорівнює нулеві. Розглянемо кільця $\{z : r_1 < |z| \leqslant |q|^l\}$ і $\{z : |q|^n < |z| \leqslant r_2\}$. В них різниця між кількістю нулів і полюсів функції f не перевищує m.

Отже, в кільці $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ вона не перевищує $2m =: C_2$.

3. Для перевірки умови 3) нам потрібні деякі допоміжні поняття та факти.

Індексом мероморфної в $\mathbf{C}^*$ функції f (вздовж кола $\{z : |z| = t\}$) називається функція

$$\nu(t, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Im \left(\frac{f'(z)}{f(z)} dz \right).$$

Ця функція визначена для всіх $t > 0$ і є цілозначною [10].

Виконується такий аналог формули Єнсена [10]

$$\frac{1}{2} \int_s^r \frac{\nu(t, f)}{t} dt = I(r, f) - I(s, f), \tag{4}$$

де
$$I(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(te^{i\theta})|dt.$$

Лічильна функція $n(t,f)$ різниці нулів і полюсів функції f у кільцях, яку ми називатимемо функцією розподілу нулів і полюсів функції f, визначається так. У будь-якій фіксованій точці t_0 її значення вибирають довільним, а різниця $n(t_2,f) - n(t_1,f)$ при $t_1 < t_2$ дорівнює різниці між кількістю нулів і полюсів функції f в кільці $z : t_1 < |z| \leqslant t_2$. Отож, функція $n(t,f)$ неперервна справа.

Величини стрибків функцій ν і n в точці t_0 пов'язані згідно з принципом аргумента рівністю
$$\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to 0}(\nu(t+\Delta t,f) - \nu(t-\Delta t,f)) = \lim_{\Delta t\to 0}(n(t+\Delta t,f) - n(t-\Delta t,f)).$$
Згідно з принципом аргумента
$$\frac{\nu(r+0,f) - \nu(1,f)}{2} = n(r,f) - n(1,f), \quad r > 1, \tag{5}$$
за умови, що на одиничному колі немає ні нулів, ні полюсів функції f. З огляду на (4) при $r > 1$ отримаємо за цієї умови, інтегруючи частинами,
$$I(r,f) - I(1,f) = \frac{1}{2}\nu(r+0)\log r - \frac{1}{2}\int_{(1,r]} \log t d\nu(t) =$$
$$= -\sum_{\substack{1<|a_k|\leqslant r\\ 1<|b_k|\leqslant r}} (\log|a_k| - \log|b_k|) + \frac{1}{2}\nu(r+0,f)\log r,$$
де a_k – нулі; b_k – полюси функції f.

Враховуючи (5), одержимо
$$I(r,f) - I(1,f) = \sum_{\substack{1<|a_k|\leqslant r\\ 1<|b_k|\leqslant r}} \left(\log\frac{r}{|a_k|} - \log\frac{r}{|b_k|}\right) + \frac{\nu(1,f)}{2}. \tag{6}$$

Якщо f набуло вигляду (2) і не має ні нулів, ні полюсів на одиничному колі, то враховуючи, що $\nu(1,z^p) = 2p$, а індекс всіх інших множників вздовж одиничного кола дорівнює нулеві, отримаємо $\frac{1}{2}\nu(1,f) = p$. Якщо ж f має нулі та полюси на одиничному колі, то, позначивши
$$h(z) = \frac{\prod_{|a_k|=1}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)}{\prod_{|b_k|=1}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)},$$
$$f_1 = \frac{f}{h},$$
і, застосувавши класичну формулу Єнсена до h,
$$I(r,h) - I(1,h) = \sum_{\substack{|a_k|=1\\ |b_k|=1}} \left(\log\frac{r}{|a_k|} - \log\frac{r}{|b_k|}\right), \quad r > 1, \tag{7}$$

отримаємо, додаючи (6) для f_1 та (7),

$$I(r,f)-I(1,f)=\sum_{\substack{1\leqslant|a_k|\leqslant r\\1\leqslant|b_k|\leqslant r}}\left(\log\frac{r}{|a_k|}-\log\frac{r}{|b_k|}\right)+p\log r. \tag{8}$$

Правий бік рівності (8) дорівнює логарифмові першого добутку в 3) при $r=|a_i|>1$. Отже, обмеженість цього добутку зверху еквівалентна обмеженості зверху інтегральних середніх $I(|a_i|,f)$.

Цілком аналогічно доводиться, що обмеженість зверху зазначеного добутку при $|a_i|<1$ та другого добутку в 3) еквівалентна обмеженості зверху $I(|a_i|,f)$ та $-I(|b_j|,f)$. Оскільки для локсодромної функції f з мультиплікатором q інтегральні середні мультиплікативно періодичні з періодом $|q|$, $I(|q|r,f)=I(r,f)$, то вони визначаються своїми значеннями на проміжку $(|q|,1]$. Враховуючи їхню неперервність та проведені вище міркування, отримаємо, що добутки в 3) обмежені сталою

$$|\log|C||+\max_{|q|\leqslant t\leqslant 1}|I(t,f)|+|I(1,f)|=:C_3.$$

4. Перевіримо, нарешті, умову 4).

Нехай a_i і b_j нулі та полюси функції f, відповідно. Вони мають вигляд [2], [3] $a_i=a_\nu q^n$, $b_j=b_\mu q^k$, де $k,n\in\mathbf{Z}$, $a_\nu\in A_q$, $b_\mu\in A_q$, $\mu,\nu\in\{1,...,m\}$.

а) Розглянемо випадок, коли a_i і b_j потрапляють в те саме кільце $A_q(q^n)$. Тоді

$$\left|\frac{a_i}{b_j}-1\right|=\left|\frac{a_\nu q^n}{b_\mu q^n}-1\right|=\left|\frac{a_\nu}{b_\mu}-1\right|\geqslant C_{41},$$

де $C_{41}=\min\limits_{a_\nu,b_\mu}\left|\dfrac{a_\nu}{b_\mu}-1\right|$.

б) Нехай a_i і b_j потрапляють у різні кільця, тоді

$$\left|\frac{a_i}{b_j}-1\right|=\left|\frac{a_\nu q^n}{b_\mu q^k}-1\right|=\left|\frac{a_\nu}{b_\mu}q^{n-k}-1\right|\geqslant\left|\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k}-1\right|.$$

Якщо $n-k\geqslant 1$, то

$$\left|\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k}-1\right|=-\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k}+1\geqslant 1-C_{42}|q|>0,$$

де $C_{42}=\max\limits_{a_\nu,b_\mu}\dfrac{|a_\nu|}{|b_\mu|}$.

Якщо $n-k\leqslant -1$, то

$$\left|\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q^{n-k}|-1\right|=\frac{|a_\nu|}{|b_\mu|}|q|^{n-k}-1\geqslant\frac{C_{43}}{|q|}-1>0,$$

де $C_{43}=\min\limits_{a_\nu,b_\mu}\dfrac{|a_\nu|}{|b_\mu|}$.

Отже,

$$\left|\frac{a_i}{b_j}-1\right|\geqslant C_4>0,$$

де $C_4=\min\{C_{41},1-C_{42},C_{43}-1\}$. Отож, функція f є Жюліа-винятковою. $\square$

3. Нормальні сім'ї еліптичних функцій. Кожній локсодромній функції f з мультиплікатором q відповідає еліптична функція g [3]. А саме, позначимо

$$f\left(e^{-\frac{2\pi u}{\omega_1}}\right) = g(u), \quad q = e^{\frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}}, \quad Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0.$$

Тоді $g(u)$ буде [3] еліптичною функцією з граткою періодів $\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$. Отримаємо

$$f(\sigma z) = g(u + \tau),$$

де

$$\tau = \frac{i\omega_1}{2\pi}\log\sigma.$$

Звідси

$$|\tau| \geqslant \frac{|\omega_1|}{2\pi}\log|\sigma|.$$

Тому $\tau \to \infty$ при $\sigma \to \infty$.

Отже, безпосереднім наслідком Теореми 1 є таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай g – еліптична функція. Тоді сім'я функцій $\{g(u+\tau)\}, \quad \tau \in \mathbf{C}$ нормальна в* $\mathbf{C}$.

Це означає, що з довільної послідовності функцій $\{g(u + \tau_n)\}, \quad \tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається рівномірно в $\mathbf{C}$ в сенсі Каратеодорі-Ландау.

Цей результат іншим способом довів К. Іосіда [11].

Список використаної літератури

1. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der periodischen functionen einer Variabeln / *O. Rausenberger.* – Leipzig: Druck und Ferlag von B.G. Teubner, 1884. – 470 p.
2. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions: 2nd Edition / *G. Valiron.* – Paris: Masson et. Cie., 1947. – 522 p.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles / *Y. Hellegouarch.* – Academic Press, 2002. – P. 92-93.
4. *Montel P.* Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications / *P. Montel.* – Paris: Gauthier-Villars, 1927. (*Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. – Москва; Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1936).
5. *Ostrowski A.* Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen satzes / *A. Ostrowski* // Mathematische Zeitschrift. – 1926. – Vol. 24, №1. – P. 215-258.
6. *Khrystiyanyn A.Ya.* Nevanlinna characteristics of sequences of meromorphic functions and Julia's exceptional functions / *A.Ya. Khrystiyanyn, O.B. Khylynska, A.A. Kondratyuk* // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 36, №1. – P. 65-72.
7. *Julia G.* Leçons sur les fonctions unif ormes à point singulier essentiel isolè / *G. Julia.* – Paris: Gauthier — Villars, 1924.
8. *Eremenko A.* Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces / *A. Eremenko* // Preprint. Purdue University. – 1999.
9. *Радченко Л.Д.* Аналитические функции в плоскости без точки нуль / *Л.Д. Радченко* // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. – 2010. – №922. – С. 43-55.
10. *Kondratyuk A.A.* Meromorphic functions with several essential singularities. I / *A.A. Kondratyuk* // Matematychni Studii. – 2008. – Vol. 30, №1. – P. 125-131.

11. *Yosida K.* On a class of meromorphic functions / *K. Yosida* // Proc. Phis.-Math. Soc. Japan. – 2008. – Vol. 30, №1. – P. 125-131.

Стаття: надійшла до редакції 21.01.2013
прийнята до друку 16.10.2013

THE JULIA EXCEPTIONALITY OF LOXODROMIC MEROMORPHIC FUNCTIONS

Olha HUSHCHAK, Andriy KONDRATYUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: olya_khyl@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Loxodromic meromorphic functions are considered. It is proved that every such function is Julia exceptional.

Key words: normal family, loxodromic function, Julia exceptional function, elliptic function.

ЖЮЛИА-ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТЬ ЛОКСОДРОМНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ольга ГУЩАК, Андрей КОНДРАТЮК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: olya_khyl@ukr.net, kond@franko.lviv.ua

Рассмотрено локсодромные мероморфные функции. Доказано, что каждая такая функция есть Жюлиа-исключительной.

Ключевые слова: нормальное семейство, локсодромная функция, Жюлиа-исключительная функция, эллиптическая функция.