ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 14–26
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 14–26

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ АНІЗОТРОПНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Розглянуто еліптично-параболічні анізотропні рівняння вищих порядків зі змінними показниками нелінійності. Знайдено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаної задачі з умовою Діріхле для таких рівнянь та отримано оцінки цих розв'язків.

Ключові слова: еліптично-параболічні рівняння, анізотропні рівняння вищих порядків, змінні показники нелінійності.

1. Вступ. Нелінійні еліптично-параболічні рівняння зі сталими показниками нелінійності досліджувало багато математиків (див. [1]–[7]). Сьогодні активно розвивається теорія нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Зауважимо, що узагальнені розв'язки таких рівнянь є елементами узагальнених просторів Соболєва. Серед праць, присвячених цій тематиці, можна назвати [8]–[20]. Зокрема, в [20] досліджено відповідні задачі для еліптично-параболічних рівнянь другого порядку зі змінними показниками нелінійності. Праці, які стосуються нелінійних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності, нам невідомі.

Ми вивчаємо проблему існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаної задачі для нелінійних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків. Зазначимо, що для доведення існування таких розв'язків використали комбінацію методів регуляризації та Гальоркіна. Наша праця складається з двох частин: у першій частині сформульовано задачі та основний результат, а в другій – обґрунтовано основний результат.

2. Формулювання задачі та основного результату. Нехай n, m – натуральні числа і M – підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$. Позначимо через N кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N

дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \dots, \xi_\alpha, \dots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів. Приймемо $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$, на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Вважатимемо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω кусково-гладка, і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Нехай $T > 0$ – яке-небудь фіксоване число. Приймемо $Q := \Omega \times (0, T),\ \Sigma := \Gamma \times (0, T)$.

Припустимо, що

($\mathcal{B}$) $b : \Omega \to [0, +\infty)$ – вимірна й обмежена функція, причому $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ – область.

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

та початкову умову

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega_0, \tag{3}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ f_\alpha : Q \to \mathbb{R}\ (|\alpha| \in M),\ u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані функції, які задовольняють певні умови, про що буде сказано пізніше. Тут і далі для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ позначаємо через δv впорядкований набір з похідних $D^\alpha v \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} v$ функції v порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке саме, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Сформульовану вище *мішану задачу для рівняння* (1) *з крайовими умовами* (2) *і початковою умовою* (3) коротко називатимемо *задачею* (1)–(3).

Ми вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), а для цього введемо необхідні позначення та зробимо відповідні припущення щодо вихідних даних цієї задачі.

Спочатку введемо потрібні нам функційні простори. Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Під $L_{r(\cdot)}(\Omega)$ розумітимемо підпростір простору $L_1(\Omega)$, елементи якого задовольняють умову $\int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\, dx < +\infty$, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} := \inf\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega |v(x)/\lambda|^{r(x)}\, dx \leqslant 1\}$. Простір $L_{r(\cdot)}(\Omega)$ є банаховим і називається узагальненим простором Лебега (детальніше див., наприклад, [8]). Введемо ще простір $W_s^m(\Omega) := \{v \in L_s(\Omega) \mid D^\alpha v \in L_s(\Omega)\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m\}$, який є банаховим з нормою $\|v\|_{W_s^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha v\|_{L_s(\Omega)}$, де $s \geqslant 1$ – яке-небудь число.

Нехай $p = (p_\alpha : |\alpha| \in M)$ – впорядкований набір вимірних на Ω функцій p_α (пронумерованих так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$), для яких виконується умова

($\mathcal{P}$) $p_{\widehat{0}}^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_0} p_{\widehat{0}}(x) \geqslant 2, \quad p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) > 1, \quad p_\alpha^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) < +\infty.$
Через $p' = (p'_\alpha : |\alpha| \in M)$ позначатимемо впорядкований набір функцій таких, що $1/p_\alpha(x) + 1/p'_\alpha(x) = 1$ ($|\alpha| \in M$) для м.в. $x \in \Omega$.

Нехай $W^m_{p(\cdot)}(\Omega) := \{v \in L_1(\Omega) \,\big|\, D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega) \ \forall\alpha,\, |\alpha| \in M\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W^m_{p(\cdot)}(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|v\|_{W^m_{p(\cdot)}(\Omega)}$. Для зручності і ясності викладення матеріалу далі приймемо $\mathbb{V}_p := \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$. Введемо ще простір $W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як підпростір простору $L_1(Q)$, складений з тих функцій h, для яких $D^\alpha h \in L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, якщо $|\alpha| \in M$, з нормою $\|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)}$. Через $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ позначимо замикання простору

$$\widetilde{C}^{m,0}(\overline{Q}) := \{h \in C(\overline{Q}) \,\big|\, D^\alpha h \in C(\overline{Q}) \ \forall\alpha, |\alpha| \leqslant m;\ D^\alpha h|_\Sigma = 0 \ \forall\alpha, |\alpha| \leqslant m-1\}$$

за нормою $\|v\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)}$.

Нехай $\widetilde{b}(x) = b(x)$, $q(x) = 2$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) = 1$, $q(x) = 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Позначимо через $H^b(\Omega)$ лінійний простір, елементами якого є функції w такі, що $w = \widetilde{b}^{-1/2} v$, де $v \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$. Простір $H^b(\Omega)$ з півнормою $\|w\|_{H^b(\Omega)} = (\int_\Omega b(x)|w(x)|^2 dx)^{1/2}$ є повним півнормованим простором. Легко переконатися, що $H^b(\Omega)$ є поповненням лінійного простору $\mathbb{V}_p$ за півнормою $\|\cdot\|_{H^b(\Omega)}$ (див. [2, I.3.3]).

Введемо простір $C([0,T]; H^b(\Omega))$ як лінійний простір функцій $h : [0,T] \to H^b(\Omega)$ таких, що $b^{1/2} h \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, і півнорму $\|h\|_{C([0,T];H^b(\Omega))} := \max\limits_{t\in[0,T]} \|h(\cdot,t)\|_{H^b(\Omega)}$ на ньому, з якою він є повним півнормованим простором.

Визначимо простір

$$\mathbb{U}^b_p := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap C([0,T]; H^b(\Omega))$$

і норму $\|h\|_{\mathbb{U}^b_p} := \|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)} + \|h\|_{C([0,T];H^b(\Omega))}$ на ньому, з якою він є банаховим.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори (a_α : $|\alpha| \in M$) визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі чотири умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто, для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом;

($\mathcal{A}_2$) для кожного α ($|\alpha| \in M$), будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ отримаємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta|\in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(Q)$, $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\,\cdot\,)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0,$$

причому в цій нерівності можна замінити знак “$\geqslant$” на знак “$>$” для м.в. $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, якщо $\xi_{\widehat{0}} \neq \eta_{\widehat{0}}$;

$(\mathcal{A}_4)$ існують стала $K > 0$ та невід’ємна функція $g \in L_1(Q)$ такі, що для будь-яких ξ з $\mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geqslant K \sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)} - g(x,t).$$

Нехай $\mathbb{F}_{p'}$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і функції f_α з будь-якого такого набору належать простору $L_{p'_\alpha(\,\cdot\,)}(Q)$ для кожного $\alpha,\ |\alpha| \in M$.

Означення 1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_p$, $u_0 \in H^b(\Omega)$. *Узагальненим розв’язком задачі* (1)–(3) *називається функція* $u \in \mathbb{U}_p^b$, *яка задовольняє (початкову) умову*

$$\|u(\cdot,0) - u_0(\cdot)\|_{H^b(\Omega)} = 0 \tag{4}$$

та рівність

$$\int\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u)\, D^\alpha v\, \varphi - b(x)\, u\, v\, \varphi' \Big\}\, dxdt = \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x,t)\, D^\alpha v\, \varphi\, dxdt \tag{5}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p,\ \varphi \in C_0^1(0,T)$.

Основним результатом нашої праці є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_p$, $u_0 \in H^b(\Omega)$. *Тоді задача* (1)–(3) *має єдиний узагальнений розв’язок і він задовольняє оцінку*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)} \Big)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big(\iint\limits_Q \Big(g(x,t) + \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)} \Big)\, dxdt + \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\, dx \Big), \tag{6}$$

де $C_1 > 0$ – *стала, яка залежить тільки від* K *і* $p_\alpha^-(|\alpha| \in M)$.

3. Обґрунтування основного результату. Спочатку сформулюємо потрібне нам допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* b *задовольняє умову* $(\mathcal{B})$ *і* $w \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ *така, що виконується тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ \Big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v \Big) \varphi - bwv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0, \quad v \in \mathbb{V}_p, \quad \varphi \in C_0^1(0,T), \tag{7}$$

для деяких $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha| \in M)$. *Тоді* $w \in C\big([0,T];H^b(\Omega)\big)$ *і для будь-яких* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in \mathbb{V}_p$, *та* $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, *отримаємо*

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega b(x)w(x,t_2)v(x)\,dx - \theta(t_1)\int\limits_\Omega b(x)w(x,t_1)v(x)\,dx + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v\Big)\theta - bwv\theta'\Big\}\,dxdt = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\|w(\cdot,t_2)\|_{H^b(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(t_1)\|w(\cdot,t_1)\|^2_{H^b(\Omega)} - \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\|w(\cdot,t)\|^2_{H^b(\Omega)}\theta'(t)\,dt + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha w\Big)\theta\,dxdt = 0. \tag{9}$$

Доведення цієї леми подібне до доведення леми 1 [12] і ми його опускаємо.

Далі для зручності та скорочення записів будемо використовувати позначення

$$a_\alpha(w)(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta w(x,t)), \quad (x,t)\in Q, \quad |\alpha| \in M.$$

Доведення теореми. Використаємо комбінацію методів регуляризації та Фаедо-Гальоркіна. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ – повна лінійно незалежна система функцій у просторі $\mathbb{V}_p$. Для довільного $k\in\mathbb{N}$ позначимо $V_k := \{d_1w_1 + \ldots + d_kw_k \,\big|\, d_1,...,d_k \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, що замикання $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$ за нормою простору $\mathbb{V}_p$ збігається з цим простором, і $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$ є щільною множиною в просторі $H^b(\Omega)$.

Виберемо послідовність $\big\{u_{0,k}\big\}_{k=1}^\infty$ таку, що $u_{0,k}\in V_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$ і

$$\|u_0 - u_{0,k}\|_{H^b(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Зауважимо, що для кожних $k\in\mathbb{N}$, $\eta\in(0,1]$ і майже всіх $x\in\Omega$ одержимо

$$\Big|b^{1/2}(x) - \Big(b(x)+\eta\Big)^{1/2}\Big|^2\Big|u_{0,k}(x)\Big|^2 \quad\le\quad 4(b(x)+1)\Big|u_{0,k}(x)\Big|^2.$$

Отож, враховуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла, для кожного фіксованого $k\in\mathbb{N}$ здобуваємо

$$\Big\|b^{1/2}u_{0,k} - \Big(b+\eta\Big)^{1/2}u_{0,k}\Big\|_{L^2(\Omega)} \quad \underset{\eta\to 0+}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Звідси випливає існування послідовності додатних чисел $\big\{\eta_k\big\}_{k=1}^\infty$ такої, що $\eta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ і

$$\big\|b^{1/2}u_{0,k} - \big(b+\eta_k\big)^{1/2}u_{0,k}\big\|_{L^2(\Omega)} \quad \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0. \tag{11}$$

Приймемо

$$b_k(x) := b(x) + \eta_k, \quad x\in\Omega, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Отож, на підставі (10)–(12) отримаємо

$$\left\|b^{1/2}u_0 - b_k^{1/2}u_{0,k}\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{13}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ шукаємо гальоркінське наближення u_k у вигляді

$$u_k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{k,i}(t)w_i(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{14}$$

де $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$ – абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції такі, що правильні рівності

$$\int\limits_\Omega \Big\{b_k(x)u_{k,t}w_j + \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)\, D^\alpha w_j\Big\}dx =$$
$$= \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha w_j\, dx, \quad t\in[0,T], \quad j=\overline{1,k}, \tag{15}$$

$$u_k(x,0) = u_{0,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Співвідношення (15), (16) можна трактувати як задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$. Систему рівнянь (15) можна звести до нормальної форми. Отож, на підставі теореми про існування, єдиність і продовження розв'язку цієї задачі Коші (див., наприклад, [21]) існує єдиний глобальний її розв'язок $c_{1,k}, \ldots.., c_{k,k}$ і він визначений на деякому проміжку $[0, T_k\rangle$, де $T_k \le T$. Тут і далі дужка "$\rangle$" означає або "$)$" або "$]$". Отже, функція u_k визначена на множині $\overline{\Omega} \times [0, T_k\rangle$. Пізніше ми доведемо оцінки, з яких буде випливати рівність $[0,T_k\rangle = [0,T]$.

Тепер отримаємо відповідні оцінки членів послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$. Домножимо для кожного $j \in \{1,\ldots,k\}$ рівність системи (15) з номером j на $c_{k,j}$ і підсумуємо ці рівності. Отриману рівність проінтегруємо за $t \in [0,\tau] \subset [0,T_k\rangle$ і, використовуючи (14), (16) та формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\, dx +$$
$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\, dxdt = \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\, dxdt. \tag{17}$$

Далі нам буде потрібна нерівність Юнга у формі:

$$ab \le \varepsilon|a|^{r(x)} + \varepsilon^{-\frac{1}{r^- - 1}}|b|^{r'(x)}, \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon\in(0,1), \tag{18}$$

для майже всіх $x \in \Omega$, де $r \in L^\infty(\Omega)$, $r^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, $r'(x) := r(x)/(r(x)-1)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

З (17), використовуючи умову $(\mathcal{A}_4)$ і нерівність (18) з достатньо малим $\varepsilon \in (0,1)$ (наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{1, K\} > 0$), отримаємо

$$\int\limits_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx + K\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt \le$$
$$\le C_2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt + 2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega g(x,t)\,dxdt +$$
$$+\int\limits_\Omega b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\,dx, \quad \tau\in[0,T_k\rangle, \tag{19}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить лише від K і $p_\alpha^-(|\alpha|\in M)$.

На підставі (13) можна зробити висновок, що послідовність $\big\{\int_\Omega b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\,dx\big\}_{k=1}^{+\infty}$ є обмеженою. Отже, з (19) одержимо такі оцінки

$$\int\limits_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx \le C_3, \tag{20}$$

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt \le C_4, \tag{21}$$

де $\tau\in[0,T_k\rangle$ – довільне, а C_3, C_4 – додатні сталі, які не залежать від τ та k. На підставі (20) отримаємо, зокрема, що $[0,T_k\rangle = [0,T]$. Отже, оцінки (20), (21) правильні для кожного $\tau\in[0,T]$.

З умови $(\mathcal{A}_2)$ та оцінки (21), використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо оцінку

$$\iint\limits_Q |a_\alpha(u_k)(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt \le C_5, \quad |\alpha|\in M, \tag{22}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

Оскільки простори $L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, $L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha|\in M)$ рефлексивні (див. [8, с. 600]), то з оцінок (20), (21) і (22) отримуємо існування підпослідовності послідовності $\{u_k\}$ (цю підпослідовність позначатимемо так само як і всю послідовність), функцій $u\in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$, $\widetilde{u}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ і $\chi_\alpha\in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha|\in M)$ таких, що

$$b_k^{1/2}u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad *-\text{слабко в}\quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \tag{23}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в}\quad \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q), \tag{24}$$

$$a_\alpha(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\alpha \quad \text{слабко в}\quad L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q), \quad |\alpha|\in M. \tag{25}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Для цього спочатку зазначимо, що

$$b_k^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2} \text{ сильно в } L_2(\Omega) \text{ і майже всюди на } \Omega. \tag{26}$$

Тепер доведемо, що

$$\tilde{u} = b^{1/2}u \quad \text{майже всюди на} \quad Q. \tag{27}$$

Справді, для довільної функції $\psi \in C(\overline{Q})$ на підставі (23) отримаємо

$$\iint\limits_Q b_k^{1/2} u_k \psi dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q \tilde{u}\psi\, dxdt. \tag{28}$$

Беручи до уваги (26), легко довести, що $b_k^{1/2}\psi \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} b^{1/2}\psi$ in $L_{p_{\widehat{0}}{}'(\cdot)}(Q)$. Отож, враховуючи (24), одержимо

$$\iint\limits_Q u_k b_k^{1/2}\psi\, dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_Q u b^{1/2}\psi\, dxdt. \tag{29}$$

Співвідношення (28), (29) дають підставу стверджувати, що для будь-якої $\psi \in C(\overline{Q})$ правильна рівність

$$\iint\limits_Q \tilde{u}\psi\, dxdt = \iint\limits_Q b^{1/2}u\psi\, dxdt,$$

а отже, правильною є рівність (27).

Виберемо довільно і зафіксуємо числа $j, k \in \mathbb{N}$ такі, що $k \geq j$. Домножимо рівність системи (15) з номером j на функцію $\theta \in C^1([0,T])$ таку, що $\theta(T) = 0$, і проінтегруємо отриману рівність за $t \in [0,T]$, використаємо формулу інтегрування частинами. Тоді, переходячи до границі при $k \to \infty$ і враховуючи (13), (16), (23)–(27), отримаємо

$$-\theta(0)\int\limits_Q b(x)u_0(x)w_j(x)\, dx - \iint\limits_Q \big(buw_j\big)\theta'\, dxdt +$$
$$+\iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha w_j\Big)\theta\, dxdt = 0. \tag{30}$$

З цієї рівності випливає, що для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, правильна рівність

$$-\theta(0)\int\limits_Q b(x)u_0(x)v(x)dx - \iint\limits_Q \big(buv\big)\theta' dxdt + \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v\Big)\theta dxdt = 0. \tag{31}$$

Зауважимо таке: якщо прийняти $\theta = \varphi \in C_0^1(0,T)$ в (31), то одержимо рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{\Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v\Big)\varphi - \big(buv\big)\varphi'\Big\}\, dxdt = 0 \tag{32}$$

для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_0^1(0,T)$. На підставі леми і (32) отримаємо, що

$$u \in C\big([0,T]; H^b(\Omega)\big) \tag{33}$$

і для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$ правильна рівність

$$-\theta(0)\int\limits_\Omega b(x)u(x,0)v(x)dx - \iint\limits_Q buv\theta' dxdt + \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha - f_\alpha)D^\alpha v\Big)\theta dxdt = 0. \tag{34}$$

З (31) і (34) отримуємо (4). Тоді на підставі (24) і (33) можемо зробити висновок про те, що $u \in \mathbb{U}_p^b$.

Враховуючи (32), для доведення тотожності (5) достатньо з'ясувати, що правильна рівність

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\chi_\alpha(x,t)D^\alpha v(x)\Big\}dx = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u)(x,t)D^\alpha v(x)\Big\}dx \tag{35}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$ і майже всіх $t \in (0,T)$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [22]). Приймемо довільну функцію $w \in W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$. На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ одержимо

$$W_k := \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_k) - a_\alpha(w))(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\Big\}\theta\, dxdt \geq 0,$$

де $\theta(t) = 1 - t/T$, $t \in \mathbb{R}$. Звідси отримаємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt -$$
$$-\iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\big]\Big\}\theta dxdt \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Для кожного $j \in \{1,\ldots,k\}$ помножимо рівність системи (15) з номером j на $c_{k,j}\theta$ і підсумуємо отримані рівності за j. Результуючу рівність інтегруємо за $t \in [0,T]$ і використовуємо формулу інтегрування частинами та (14) і (16). У підсумку отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt -$$
$$-\frac{1}{2T}\iint\limits_Q b_k|u_k|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\, dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

На підставі (36) і (37) одержуємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\, dxdt - \frac{1}{2T}\iint\limits_Q b_k|u_k|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\, dx -$$
$$-\iint\limits_Q \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\big]\Big\}\theta\, dxdt \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Із співвідношень (23), (27) випливає

$$\lim_{k\to\infty}\inf\iint_Q b_k|u_k|^2\,dxdt \geqslant \iint_Q b|u|^2\,dxdt. \tag{39}$$

На підставі (13), (24), (25) і (39), з (38) отримаємо

$$0\le\lim_{k\to\infty}\sup W_k\le\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u\Big\}\theta dxdt-\frac{1}{2T}\iint_Q b|u|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega b|u_0|^2dx-$$
$$-\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[\chi_\alpha D^\alpha w+a_\alpha(w)(D^\alpha u-D^\alpha w)\big]\Big\}\theta\,dxdt. \tag{40}$$

З (32), використовуючи лему (див. (9)) і (4), одержимо

$$\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\chi_\alpha D^\alpha u\Big\}\theta\,dxdt=\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u\Big\}\theta\,dxdt-$$
$$-\frac{1}{2T}\iint_Q b|u|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega b|u_0|^2\,dx. \tag{41}$$

Тоді на підставі (40) і (41) отримуємо

$$\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha-a_\alpha(w))(D^\alpha u-D^\alpha w)\Big\}\theta\,dxdt\ge 0. \tag{42}$$

Підставивши $w=u-\lambda v\varphi$ в (42), де $v\in\mathbb{V}_p$, $\varphi\in C_0^1(0,T)$, $\lambda>0$, і поділивши отриману нерівність на λ, одержимо

$$\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha-a_\alpha(u-\lambda v\varphi))D^\alpha v\Big\}\theta\varphi\,dxdt\ge 0. \tag{43}$$

Переходячи в (43) до границі при $\lambda\to 0+$ на підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_2)$ та теореми про граничний перехід під знаком інтеграла, (див. [23, с. 648]), отримуємо

$$\iint_Q\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(\chi_\alpha-a_\alpha(u))D^\alpha v\Big\}\theta\varphi\,dxdt=0,$$

де $v\in\mathbb{V}_p$ і $\varphi\in C_0^1(0,T)$ – довільні функції. Отож, рівність (35) правильна.

З (32), беручи до уваги (35), отримаємо (5). Отже, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Тепер доведемо оцінку (6). Нехай u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). З (5), використовуючи лему з $\theta\equiv 1$, $t_1=0$, $t_2=\tau\in(0,T]$ (див. (9)), отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega b(x)|u(x,\tau)|^2\,dx+\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u)D^\alpha u\Big\}\,dxdt=$$
$$=\int_0^\tau\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u\Big\}\,dxdt+\int_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\,dx.$$

Звідси подібно до того як ми доводили нерівність (19), враховуючи $(\mathcal{A}_4)$, (18), одержуємо (6).

Тепер доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). Зробимо це методом від супротивного. Нехай u_1 і u_2 – два узагальнені розв'язки цієї задачі. Розглянемо різницю між рівністю (5) з $u = u_2$ і рівністю (5) з $u = u_1$. На підставі леми з $w = u_1 - u_2$, $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0, T]$, одержуємо (див. (9))

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b(x)|u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)|^2\, dx +$$

$$+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2)\Big\}\, dxdt = 0, \quad \tau \in (0, T].$$

Ця рівність і умова $(\mathcal{A}_3)$ дають підстави стверджувати, що правильні такі дві рівності:

$$b|u_1 - u_2|^2 = 0, \quad \sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2) = 0 \quad \text{майже скрізь на} \quad Q.$$

З першої рівності випливає, що $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega_0 \times (0,T)$. Друга рівність і умова $(\mathcal{A}_3)$ дають змогу зробити висновок, що $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in (\Omega \setminus \Omega_0) \times (0,T)$. Отож, $w(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, тобто $u_1 = u_2$. Отримане протиріччя доводить наше твердження. □

Список використаної літератури

1. *Showalter R.E.* Degenerate evolution equations and applications / *R.E. Showalter* // Indiana University Mathematics Journal. – 1974. – Vol. 23, №8. – P. 655-677.
2. *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations / *R.E. Showalter* // Monographs and Studies in Mathematics (Monographs in differential equations), Vol. 1, Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977, xii+196 p.
3. *Alt H.W.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations / *H.W. Alt, S. Luckhaus* // Mathematische Zeitschrift. – 1983. – Vol. 183. – P. 311-341.
4. *Kuttler K.L.* The Galerkin method and degenerate evolution equations / *K.L. Kuttler, Jr.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1985. – Vol. 107. – P. 396-413.
5. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / *R.E. Showalter* // Mathematical surveys and monographs, 49. – Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
6. *Favini A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / *A. Favini, A. Yagi.* – New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1999.
7. *Andreu F.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions / *F. Andreu, N. Igbida, J. M. Mazón, J. Toledo* // Interfaces and Free Boundaries. – 2006. – Vol. 8, №4. – P. 447-479.
8. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ / *O. Kováčik, J. Rákosník* // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1991. – Vol. 41, №116. – P. 592-618.
9. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ / *O. Kováčik* // Fasciculi Mathematici. – 1995. – Vol. 25. – P. 87-94.
10. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory / *M. Růžička* // Lecture Notes in Mathematics, 1748. – (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

11. *Buhrii O.M.* On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration / *O.M. Buhrii, S.P. Lavrenyuk* // Ukrainian Math. Journal. – 2001. – Vol. 53, №7. – P. 1027-1042 (Переклад з Укр. мат. журн. – 2001. – Vol. 53, № 7. – С. 867-878).
12. *Бокало М.М.* Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *М.М. Бокало, І.Б. Паучок* // Матем. студії. – 2006. – Vol. 24, № 1. – С. 25-48.
13. *Bokalo M.* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces / *M. Bokalo, O. Domanska* // Матем. студії. – 2007. – Vol. 28, № 1. – С. 77-91.
14. *Антонцев С.* Затухание решений параболических уравнений с переменными показателями нелинейности / *С. Антонцев, С. Шмарев* // Научные записки Математического института имени Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 11-21.
15. *Алхутов Ю.* Параболические уравнения с переменными показателями нелинейности / *Ю. Алхутов, С. Антонцев, В. Жиков* // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2009. – Т. 6. – С. 23-50.
16. *Fu Y.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth / *Y. Fu, N. Pan* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2010. – Vol. 362. – P. 313-326.
17. *Mihailescu M.* Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents / *M. Mihailescu, V. Radulescu, S. Tersian* // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 2011. – Vol. 38. – P. 277-289.
18. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
19. *Buhrii O.M.* Some parabolic variational inequalities with variable exponent of nonlinearity: unique solvability and comparison theorems / *O.M. Buhrii, Kh.P. Hlynyans'ka* // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 174, №2. – P. 169-189 (Translated from Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya. – 2009. – Vol. 52, №4. – P. 42-57).
20. *Bokalo M.M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / *M.M. Bokalo* // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 178, №1. – P. 41-64 (Translated from Ukrains'kyi Matematychnyi Visnyk. – 2011. – Vol. 8, №1. – P. 55-86).
21. *Coddington E.A.* Theory of ordinary differential equations / *E. A. Coddington, N. Levinson.* – New York; Toronto; London: McGraw-Hill book company, 1955.
22. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Ж.-Л. Лионс.* – М.: Мир, 1972.
23. *Evans L.C.* Partial differential equations / *L.C. Evans* // Graduate Studies in Mathematics. – Vol. 19. Amer. Math. Soc.

Стаття: надійшла до редакції 04.12.2013
прийнята до друку 11.12.2013

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ELLIPTIC-PARABOLIC ANISOTROPIC HIGHER ORDER EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Mykola BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

The elliptic-parabolic anisotropic higher order equations with variable exponents of nonlinearity are considered. The conditions of existence and uniqueness of generalized solutions of the initial-boundary value problem with condition Dirichlet to such equations are obtained. Also the estimates of this solutions are obtained.

Key words: elliptic-parabolic equation, anisotropic higher order equation, variable exponents of nonlinearity.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Николай БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Рассмотрено эллиптически-параболические анизотропные уравнения высших порядков с переменными показателями нелинейности. Найдены условия существования и единственности обобщенных решений смешанной задачи с условием Дирихле для таких уравнений и получены оценки этих решений.

Ключевые слова: эллиптически-параболические уравнения, анизотропные уравнения высших порядков, переменные показатели нелинейности.