ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 5–13
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 5–13

УДК 517.95

УМОВИ ІСНУВАННЯ, ЄДИНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Галина БАРАБАШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Розглянуто мішану задачу для рівняння типу коливання пластинки з розривними коефіцієнтами, які вироджуються на частині границі. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку зазначеної задачі, а також умови стійкості за Ляпуновим нульового розв'язку.

Ключові слова: рівняння типу коливання пластинки, узагальнений розв'язок, метод Гальоркіна, стійкість за Ляпуновим.

Досліджено умови існування, єдиності та стійкості розв'язку рівняння типу коливання пластинки, коефіцієнти якого зазнають розриву. Умови стійкості поперечних коливань стержня з гострим краєм досліджено у праці [1]. Використовуючи метод Гальоркіна і результати [2], доведено теореми про стійкість за Ляпуновим та асимптотичну стійкість нульового розв'язку зазначеного рівняння.

Нехай Ω є об'єднанням областей

$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \ : \ 0 < x_1 < a_0, \ 0 < x_2 < b\}$, $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \ : \ a_0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b\}$
і контура $\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = a_0, 0 < x_2 < b\}$.

Розглянемо в циліндрі $Q = \Omega \times (0; +\infty)$ рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \left(a_{ij}^{kl(m)}(x,t) u_{x_k x_l}\right)_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{2} \left(b_{ij}^{(m)}(x,t) u_{x_j}\right)_{x_i} + c^{(m)}(x,t) u_t + h^{(m)}(x,t) u = f^{(m)}(x,t), \tag{1}$$

$x = (x_1, x_2) \in \Omega_m, \ t > 0, \ m = 1, 2,$ з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Вважаємо, що коефіцієнти рівняння (1) вироджуються при $x_2 = 0$:

$$a_0^m x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \leqslant \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant a_1^m x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2, \tag{4}$$

де $0 < \alpha_m < 2$, $a_0^m > 0$ для всіх $\eta \in \mathbb{R}^4$, $(x,t) \in Q^{(m)} = \Omega_m \times (0;+\infty)$, $m = 1,2$. Функція u повинна задовольняти такі граничні умови (залежно від величини α_m):

$$\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,0,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \quad 0 < \alpha_m < 1; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \quad 1 \leqslant \alpha_m < 2, \ m = 1,2. \end{cases}$$

Для шуканої функції u задано умови спряження

$$[u]_\Gamma = 0, \quad [u_{x_1}]_\Gamma = 0, \quad \sum_{i,k,l=1}^{2} \left(a_{i1}^{kl(1)} u_{x_k x_l} A_1 - a_{i1}^{kl(2)} u_{x_k x_l} A_2 \right)\Big|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{j,k,l=1}^{2} \left((a_{1j}^{kl(1)} u_{x_k x_l})_{x_j} A_1 - (a_{1j}^{kl(2)} u_{x_k x_l})_{x_j} A_2 \right)\Big|_\Gamma - \sum_{j=1}^{2} \left(\left(b_{1j}^{(1)} A_1 - b_{1j}^{(2)} A_2 \right) u_{x_j} \right)\Big|_\Gamma = 0,$$

де $t \in S = [0;+\infty)$, символ $[u]$ означає стрибок, який виконує функція u при переході через контур Γ, $A_m = A_m(t)$, $m = 1,2$, – задані функції.

Введемо простір $\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$ як замикання множини двічі неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови (5) за нормою

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)} = \left(\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що для довільної функції $v \in \overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$ виконуються нерівності типу Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega_m} v^2 dx \leqslant \varkappa_0^m \int\limits_{\Omega_m} x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 dx, \qquad \int\limits_{\Omega_m} \sum_{i=1}^{2} v_{x_i}^2 dx \leqslant \varkappa_1^m \int\limits_{\Omega_m} x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 dx, \tag{7}$$

причому, $\varkappa_0^m = \dfrac{(5-\alpha_m) b^{4-\alpha_m}}{3(2-\alpha_m)(4-\alpha_m)}$, $\quad \varkappa_1^m = \dfrac{2b^{2-\alpha_m}}{2-\alpha_m}$, $\quad m = 1,2$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3), (5), (6) *називається функція* u*, яка задовольняє включення*

$$u \in L^\infty_{loc}(S; \overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty_{loc}(S; L^2(\Omega)), \tag{8}$$

умови (2) *і* (5), *а також інтегральну тотожність*

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}\Bigg(-u_tv_tA_m-u_tvA_{mt}+c^{(m)}u_tvA_m+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}v_{x_ix_j}A_m+ \tag{9}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u_{x_j}v_{x_i}A_m+h^{(m)}uvA_m-f^{(m)}vA_m\Bigg)dx\,dt=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_0^{(m)}}u_1v\,A_mdx$$

для довільної $v\in L^2(S;\overset{\circ}{H}{}^2{}_{\alpha}(\Omega))$, $v_t\in L^2(S;L^2(\Omega))$, *яка має обмежений носій, де* $D_\tau^{(m)}=Q^{(m)}\cap\{t=\tau\}$, $\tau\geqslant 0$, $m=1,2$.

Спочатку з'ясуємо умови існування та єдиності цього розв'язку. Будемо припускати, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A): $a_{ij}^{kl(m)},\ a_{ijt}^{kl(m)}\in L^\infty(Q^{(m)})$, $a_{ij}^{kl(m)}=a_{kl}^{ij(m)}$, $i,j,k,l=1,2$, $m=1,2$;

(B): $b_{ij}^{(m)},\ b_{ijt}^{(m)}\in L^\infty(Q^{(m)})$, $b_{ij}^{(m)}=b_{ji}^{(m)}$, $i,j=1,2$, $m=1,2$;

$$\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant b_0^m\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\quad (x,t)\in Q^{(m)},\quad \xi\in\mathbb{R}^2;$$

$b_0^m+\frac{a_0^m\gamma_1}{\varkappa_1^m}>0$, $\gamma_1>0$, $m=1,2$;

(C): $c^{(m)},\ c_t^{(m)}\in L^\infty(Q^{(m)})$; $c^{(m)}(x,t)\geqslant c_0\geqslant 0$, $(x,t)\in Q^{(m)}$, $m=1,2$;

(H): $h^{(m)},\ h_t^{(m)}\in L^\infty(Q^{(m)})$; $h^{(m)}(x,t)\geqslant h_0^{(m)}$, $(x,t)\in Q^{(m)}$, $h_0^{(m)}+\frac{a_1^m\gamma_2}{\varkappa_0^m}>0$, $\gamma_2>0$, $\gamma_1+\gamma_2<1$, $m=1,2$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (4), (A), (B), (C), (H), і, крім того,*

$$0<A_{0m}\leqslant A_m(t)\leqslant A_{1m},\quad A\in C^1(S),\quad t\in S;$$

$$f^{(m)}\in L^2_{loc}(S;L^2(\Omega_m)),\quad m=1,2;\quad u_0\in\overset{\circ}{H}{}^2{}_{\alpha}(\Omega),\quad u_1\in L^2(\Omega).$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), (5), (6).

Доведення. Розглянемо в області $Q_T^{(m)}=\Omega_m\times(0;T)$ рівняння (1), де T – довільне додатне число. Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u^N(x,t)=\sum_{p=1}^{N}C_p^N(t)\omega_p(x),$$

де $\{\omega_p(x)\}$ – база простору $\overset{\circ}{H}{}^2{}_{\alpha}(\Omega)$, а $C_p^N(t)$ знаходимо з такої задачі:

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{\Omega_m}\Bigg(u_{tt}^N\omega_pA_m+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u^N_{x_kx_l}\omega_{px_ix_j}A_m+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u^N_{x_j}\omega_{px_i}A_m+$$

$$+c^{(m)}u_t^N\omega_pA_m+h^{(m)}u^N\omega_pA_m-f^{(m)}\omega_pA_m\Bigg)dx=0, \tag{10}$$

$$C_p^N(0)=u_{0p}^N,\quad C_{pt}^N(0)=u_{1p}^N,\quad p=1,...,N. \tag{11}$$

В умовах (11) сталі u_{0p}^N, u_{1p}^N вибираємо так, щоб

$$u_0^N(x) = \sum_{p=1}^N u_{0p}^N \omega_p(x), \quad u_1^N(x) = \sum_{p=1}^N u_{1p}^N \omega_p(x),$$

причому, $u_0^N(x) \to u_0(x)$ в $\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)$, а $u_1^N(x) \to u_1(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $N \to \infty$.

Домножимо кожне рівняння системи (10) на відповідну функцію $C_{pt}^N(t)$, підсумуємо по p від 1 до N, зінтегруємо по t від 0 до T. Після цих операцій отримаємо рівність

$$\sum_{m=1}^2 \int\limits_{Q_T^{(m)}} \Bigg(u_{tt}^N u_t^N A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^2 a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l}^N u_{x_i x_j t}^N A_m + \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}^{(m)} u_{x_j}^N u_{x_i t}^N A_m +$$
$$+ c^{(m)} (u_t^N)^2 A_m + h^{(m)} u^N u_t^N A_m - f^{(m)} u_t^N A_m \Bigg) dx\, dt = 0.$$

Використовуючи інтегрування частинами та умови теореми 1, одержуємо оцінку

$$B_1 \sum_{m=1}^2 \int\limits_{D_T^{(m)}} \Bigg((u_t^N)^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^2 (u_{x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx \leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant B_2 \sum_{m=1}^2 \Bigg(\int\limits_{D_0^{(m)}} \Bigg((u_1^N)^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^2 (u_{0 x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx + \int\limits_{Q_T^{(m)}} (f^{(m)})^2 dx\, dt \Bigg) +$$
$$+ B_3 \sum_{m=1}^2 \int\limits_{Q_T^{(m)}} \Bigg((u_t^N)^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^2 (u_{x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx\, dt,$$

де $B_1 = \min\limits_{m=1,2} \min\{A_{0m}; A_{0m} a_0^m (1 - \gamma_1 - \gamma_2)\}$,
$B_2 = \max\limits_{m=1,2} \max\{A_{1m}; A_{1m}(a_1^m + b_1^m \varkappa_1^m + h_1^m \varkappa_0^m)\}$,
$B_3 = \max\limits_{m=1,2} \max\{A_{1m} + 2A_{2m}; A_{2m}(a_1^m + b_1^m \varkappa_1^m + h_1^m \varkappa_0^m) + A_{1m}(a_2^m + b_2^m \varkappa_1^m + h_2^m \varkappa_0^m)\}$,
а додатні сталі a_2^m, b_1^m, b_2^m, h_1^m, h_2^m, A_{2m} такі, що справджуються умови:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 a_{ijt}^{kl(m)}(x,t)\, \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant a_2^m x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^2 \eta_{ij}^2,$$
$$\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}^{(m)}(x,t)\, \xi_i \xi_j \leqslant b_1^m \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad \sum_{i,j=1}^2 b_{ijt}^{(m)}(x,t)\, \xi_i \xi_j \leqslant b_2^m \sum_{i=1}^2 \xi_i^2$$
$$h^{(m)}(x,t) \leqslant h_1^m, \quad h_t^{(m)} \leqslant h_2^m, \quad (x,t) \in Q^{(m)},$$
$$|A'_m(t)| \leqslant A_{2m}, \quad t \in S, \quad m = 1, 2,$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^4$, $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Застосовуючи до (12) лему Гронуолла-Белмана, отримаємо
$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_T^{(m)}} \Big((u_t^N)^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} (u_{x_i x_j}^N)^2 \Big) dx \leqslant B_4,$$
де B_4 – додатна стала, яка не залежить від N. Тому
$$\|u^N\|_{L^\infty((0;T);\overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega))} \leqslant B_5, \quad \|u_t^N\|_{L^\infty((0;T);L^2(\Omega))} \leqslant B_5. \tag{13}$$

Нехай $S_k = (0;k)$. Згідно з оцінками (13) можна вибрати підпослідовність $\{u^{N,N}(x,t)\}$ таку, що для фіксованого k :
$$u^{N,N} \to v^k \quad * - \text{слабко в } L^\infty(S_k; \overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega)),$$
$$u_t^{N,N} \to v_t^k \quad * - \text{слабко в } L^\infty(S_k; L^2(\Omega)) \text{ при } N \to \infty.$$

Позначимо через u функцію, яка для кожного k в Q_k збігається з v^k. Очевидно, що u задовольняє включення (8). Далі за схемою, запропонованою в [3], легко довести, що u буде узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), (5), (6). □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (4), (A), (B), (C), (H), і, крім того,*
$$A_m(t) > 0, \quad A_m''(t) \in L_{loc}^\infty(S), \quad m = 1,2, \quad c_0 \geqslant 0.$$
Тоді задача (1)–(3), (5), (6) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Доведемо, що відповідна однорідна задача з нульовими початковими умовами має лише тривіальний розв'язок. Приймемо
$$v(x,t) = \begin{cases} \int_t^\tau u\, d\theta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t < \infty. \end{cases}$$
Очевидно, що $v \in H_{\mathrm{loc}}^1(S; \overset{\circ}{H}{}^2{}_\alpha(\Omega))$. Тому правильна рівність
$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q_\tau^{(m)}} \Big(-u_t v_t A_m - u_t v A_m' + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} A_m +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j} v_{x_i} A_m + h^{(m)} u v A_m + c^{(m)} u_t v A_m \Big) dx\, dt = 0.$$
Використовуючи інтегрування частинами, одержимо
$$\sum_{m=1}^{2} \Big(\int\limits_{D_\tau^{(m)}} A_m u^2 dx + \int\limits_{D_0^{(m)}} \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} z_{x_k x_l}(x,\tau) z_{x_i x_j}(x,\tau) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} z_{x_j}(x,\tau) z_{x_i}(x,\tau) \Big) A_m dx \Big) =$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \Big(- \int\limits_{Q_\tau^{(m)}} \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(m)} A_m (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} A_m (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t)) +$$

$$+\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} A'_m (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} A'_m (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t))\Bigg) dx\,dt -$$

$$-2\int\limits_{Q_\tau^{(m)}} (c^{(m)} A_m - A'_m) u^2 dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{(m)}} (c_t^{(m)} A_m + c^{(m)} A'_m - A''_m - h^{(m)}) u (z(x,\tau) - z(x,t)) dx\,dt, \tag{14}$$

де $z(x,t) = \int_0^t u(x,\theta)\,d\theta$. Сталу τ виберемо з таких умов:

$$\frac{a_0^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} + b_0^m - 2\tau(b_2^m A_{1m} + b_1^m A_{2m}) \geqslant 0, \quad \frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{2\varkappa_0^m} - 4\tau \geqslant \frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{4\varkappa_0^m},$$
$$\frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{2} - 2\tau(a_2^m A_{1m} + a_1^m A_{2m}) \geqslant \frac{a_0^m(1-\gamma_1)}{4}, \quad m = 1, 2.$$

Тоді рівність (14) перепишеться у вигляді

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_\tau^{(m)}} \Bigg(u^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_i x_j}^2 \Bigg) dx \leqslant \frac{B_6}{B_5} \sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q_\tau^{(m)}} \Bigg(u^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_i x_j}^2 \Bigg) dx\,dt,$$

де $B_5 = \min\limits_{m=1,2} \min\left\{ A_{1m};\ A_{1m} \dfrac{a_0^m(1-\gamma_1)}{2} \right\}$,

$$B_6 = \max_{m=1,2} \max\{(h_1^m)^2 + 2A_{2m} + 3(c_1^m A_{2m})^2 + 3(c_2^m A_{1m})^2 + 3(A_{3m})^2;$$
$$2(a_1^m A_{2m} + a_2^m A_{1m} + (b_1^m A_{2m} + b_2^m A_{1m})\varkappa_1^m + (h_1^m A_{2m} + h_2^m A_{1m})\varkappa_0^m)\},$$

а c_1^m, c_2^m, A_{3m} – такі додатні сталі, що задовольняють умови

$$c^{(m)}(x,t) \leqslant c_1^m, \quad c_t^{(m)}(x,t) \leqslant c_2^m, \quad |A''_m(t)| \leqslant A_{3m}, \quad (x,t) \in Q^{(m)}, \quad m = 1, 2.$$

Застосовуючи до цієї нерівності лему ([4], стор. 152), отримаємо, що

$$\sum_{m=1}^{2} \int_0^T \int\limits_{D_t^{(m)}} \Bigg(u^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_i x_j}^2 \Bigg) dx\,dt \leqslant 0$$

для довільного додатного T. Тобто $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in Q_T$. Отже, теорему 2 доведено. □

Досліджуючи стійкість, вважатимемо, що $f^{(m)} \equiv 0$, в $Q^{(m)}$, $m = 1, 2$. Розглядається стійкість нульового розв'язку. Введемо позначення

$$\rho(u) = \left(\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} \left(u_t^2 + x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_j}^2\right) dx\right)^{1/2}.$$

Означення 2. *Нульовий розв'язок задачі* (1)–(3), (5), (6) *називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $\delta > 0$, *що як тільки виконується умова* $\rho(u(x, 0)) < \delta$, *тоді* $\rho(u(x, t)) < \varepsilon$ *для майже всіх* $t \in S$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі для* $f^{(m)} \equiv 0$ *в* $Q^{(m)}$, $m = 1, 2$, *і, крім того,*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(m)} \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} \xi_i \xi_j \leqslant 0, \quad h_t^{(m)} \leqslant 0, \quad A'_m \leqslant 0, \tag{15}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^4$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $(x, t) \in Q^{(m)}$, $m = 1, 2$. *Тоді нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим. Якщо ж, додатково*

$$c_0 > 0, \tag{16}$$

то $\rho(u(x, t)) \leqslant B_{10} e^{-\mu t} \rho(u(x, 0))$ *для майже всіх* $t \in S$, *де* μ *і* B_{10} *– додатні сталі.*

Доведення. Нехай $c_0 \geqslant 0$. Тоді згідно з умовами теореми з нерівності (12) одержимо

$$B_1 \rho^2(u^N(x, \tau)) \leqslant B_2 \rho^2(u_0^N),$$

де $\tau \in [0; T]$, а T – довільне додатне число. Отже, для достатньо великих N отримаємо

$$\rho(u^N(x, t)) \leqslant B_7 \rho(u_0^N) \leqslant 2B_7 \rho(u(x, 0)), \quad t \in S.$$

Перейшовши до границі при $N \to \infty$, отримаємо

$$\rho(u(x, t)) \leqslant 2B_7 \rho(u(x, 0))$$

майже для всіх $t \in S$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ вибираємо $\delta = \varepsilon / 2B_7$ і з умови $\rho(u(x, 0)) < \delta$ випливає, що $\rho(u(x, t)) < \varepsilon$ для майже всіх $t \in S$.

Нехай $c_0 > 0$. Кожне рівняння системи (10) помножимо спочатку на відповідну функцію $C_{pt}^N e^{\mu t}$, а потім на $C_p^N \mu e^{\mu t}$ і підсумуємо по p від 1 до N. Тоді одержимо

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} \Bigg((v_{tt} - 2\mu v_t + \mu^2 v) v_t A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} v_{x_k x_l} v_{x_i x_j t} A_m +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} v_{x_j} v_{x_i t} A_m + h^{(m)} v_t v A_m + c^{(m)} (v_t - \mu v) v_t A_m \Bigg) dx = 0,$$

де $v = u^N e^{\mu t}$, μ – додатна стала. Зінтегрувавши по t від 0 до τ і використовуючи умови (15), (16), отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_\tau^{(m)}} \left(A_{1m}(v_t)^2 + A_{1m}(a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2) - c_1^m \mu \varkappa_0^m)\, x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} (v_{x_ix_j})^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant B_8 \rho^2(u^N(x,0)), \tag{17}$$

де $B_8 = \max\limits_{m=1,2} \max\{A_{1m};\, A_{1m}(a_1^m + b_1^m \varkappa_1^m + (h_1^m + \mu^2 + \mu)\varkappa_0^m)\}$, $\mu \leqslant \dfrac{c_0}{2}$. Перепишемо нерівність (17) для u^N, вибравши у цьому разі μ таким малим, щоб виконувались умови

$$a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2) - \mu\varkappa_0^m(c_1 + \frac{1}{\delta}) > 0, \quad m = 1,2; \quad c_0 - 2\mu \geqslant 0.$$

Одержимо

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_\tau^{(m)}} \Bigg(A_{1m}(1-\mu\delta)(u_t^N)^2 + A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2) -$$

$$-\mu(c_1 + 1/\delta)\varkappa_0^m)\, x_2^{\alpha_m} \sum_{i,j=1}^{2} (u_{x_ix_j}^N)^2 \Bigg) dx \leqslant B_8 \rho^2(u_0^N) e^{-2\mu\tau}.$$

Нехай $B_9 = \min\limits_{m=1,2} \min\{A_{1m}(1-\mu\delta),\ A_{1m}(a_0^m(1-\gamma_1-\gamma_2) - \mu(c_1 + 1/\delta)\varkappa_0^m)\}$, де δ – така додатна стала, що $1 - \mu\delta > 0$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\rho^2(u^N(x,t)) \leqslant \frac{B_8}{B_9}\, \rho^2(u_0^N) e^{-2\mu t} \leqslant \frac{2B_8}{B_9}\, \rho^2(u(x,0)) e^{-2\mu t},$$

$t \in S$ для достатньо великих N. Перейшовши до границі при $N \to \infty$, одержимо

$$\rho(u(x,t)) \leqslant B_{10} \rho(u(x,0)) e^{-\mu t}$$

для майже всіх $t \in S$, де B_{10} – додатна стала, яка не залежить від t. Отже, теорему 3 доведено. □

Список використаної літератури

1. *Лавренюк С.П.* Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем / *С.П. Лавренюк* // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вип. 4. – С. 62-65.
2. *Онишкевич Г.М.* Стійкість за Ляпуновим рівняння типу коливання пластинки з розривними коефіцієнтами / *Г.М. Онишкевич* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 45. – С. 5-16.
3. *Онишкевич Г.М.* Стійкість за Ляпуновим рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм / *Г.М. Онишкевич* // Деп. в ДНТБ України №2020. – 1995.
4. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики / *О.А. Ладыженская.* – М.: Наука, 1973. – 408 с.

Стаття: надійшла до редакції 27.06.2013
прийнята до друку 16.10.2013

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

THE CONDITIONS OF EXISTENCE, UNIQUENESS, AND LYAPUNOV STABILITY OF SOLUTION TO EQUATION OF TYPE OF PLATE OSCILLATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Galyna BARABASH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

The mixed problem the equation of type of plate oscillation with gaped coefficients which degenerate on the part of boundary is considered. The conditions of existence and singularity of the generalized solution of the problem and conditions of stability by Liapunov of the zero solution are obtained.

Key words: equation of type of plate oscillation, generalized solution, Galerkin's method, stability by Lyapunov.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ЗА ЛЯПУНОВЫМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Галина БАРАБАШ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Рассмотрено смешаную задачу для уравнения типа колебания пластинки с вырождающимися на части границы коэффициентами. Получены условия существования, единственности обобщённого решения этой задачи, а также условия устойчивости за Ляпуновым нулевого её решения.

Ключевые слова: уравнения типа колебания пластинки, обобщённое решение, метод Галёркина, устойчивость за Ляпуновым.