ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 235–242
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 235–242

УДК 519.6

МЕТОД ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КУРЧАТОВА ЗА УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ПОДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ПОРЯДКІВ

Степан ШАХНО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: shakhno@is.lviv.ua

Досліджено збіжність методу лінійної інтерполяції Курчатова для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банахових просторах за узагальненої умови Ліпшиця для поділених різниць першого та другого порядку. Доведено умови та швидкість збіжності цього методу, знайдено область єдиності розв'язку задачі.

Ключові слова: нелінійне рівняння, ітераційний метод, поділена різниця, порядок збіжності.

1. Вступ. Нехай задано рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де $F : D \subseteq X \to Y$ – нелінійний оператор; X, Y – банахові простори.

Нехай x, y дві фіксовані точки з D. Лінійний оператор $F(x, y)$ з X в Y називатимемо поділеною різницею першого порядку для оператора F за точками x і y, якщо правильна рівність [1]

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{2}$$

Вважатимемо, що існує похідна Фреше оператора F в D, причому $F(x, x) = F'(x)$.

Поділеною різницею другого порядку від функції F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x, y, z)$, який задовольняє умову

$$F(x, y, z)(y - z) = F(x, y) - F(x, z). \tag{3}$$

Відомим різницевим методом розв'язування нелінійних рівнянь є метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - (F(x_n, x_{n-1}))^{-1} F(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

де $F(x_n, x_{n-1})$ – поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} – задані.

Метод хорд для розв'язування нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі досліджували автори [1, 2, 3, 4, 5] за умови, що поділені різниці нелінійного оператора F задовольняють умову Ліпшиця (Гьольдера) з невід'ємною постійною L.

У [9] досліджено метод Курчатова за звичайних умов Ліпшиця на поділені різниці першого та другого порядків і доведено квадратичну збіжність його. Ітераційна формула методу Курчатова набула вигляду

$$x_{n+1} = x_n - (F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))^{-1} F(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

де $F(u, v)$ – поділена різниця першого порядку; x_0, x_{-1} – задані.

У праці [6] для дослідження методу Ньютона запропонували узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість константи L використано деяку додатну інтегровну функцію. У нашій праці [10] введено аналогічну узагальнену умову Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цієї умови досліджено збіжність методу хорд, знайдено порядок збіжності $(1 + \sqrt{5})/2$. Ми вводимо узагальнену умову Ліпшиця також для поділеної різниці другого порядку і вивчаємо збіжність методу Курчатова (5).

Позначимо $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\} \subset D$ – відкриту кулю радіуса r з центром в точці x_0.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leqslant L(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D \tag{6}$$

називають умовою Ліпшиця в області D з постійною L.

Якщо виконується умова

$$\|F(x, y) - F'(x_0)\| \leqslant L(\|x - x_0\| + \|y - x_0\|) \quad \forall x, y \in B(x_0, r), \tag{7}$$

то ми називаємо її центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ з константою L.

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути константою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку (6) і (7) для $x_0 = x^*$ будуть замінені, відповідно, на

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, y) - F(u, v))\| \leqslant \int\limits_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du \quad \forall x, y, u, v \in D \tag{8}$$

та

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x, y) - F'(x^*))\| \leqslant \int\limits_0^{\|x-x^*\|+\|y-x^*\|} L(u)du \quad \forall x, y \in B(x^*, r). \tag{9}$$

Водночас умови Ліпшиця (8) і (9) називаються узагальненими умовами Ліпшиця.

Аналогічно вводимо узагальнену умову Ліпшиця для поділеної різниці другого порядку

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u, x, y) - F(v, x, y))\| \leqslant \int\limits_0^{\|u-v\|} N(u)du \quad \forall x, y, u, v \in B(x^*, r), \tag{10}$$

де N – додатна інтегровна функція.

2. Збіжність методу Курчатова. З радіусу області збіжності та порядоку збіжності методу Курчатова випливає теорема.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77

Теорема 1. *Нехай F – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y. Припустимо, що: 1) $F(x) = 0$ має розв'язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого та другого порядку в $B(x^*, 3r) \subset D$, які задовольняють узагальнені умови Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \leqslant \int\limits_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u)du, \tag{11}$$

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y) - F(v,x,y))\| \leqslant \int\limits_0^{\|u-v\|} N(u)du, \tag{12}$$

де $x, y, u, v \in B(x^*, 3r)$, L і N – неспадні функції. Нехай r задовольняє рівняння

$$\frac{\int\limits_0^r L(u)du + 2r\int\limits_0^{2r} N(u)du}{1 - \Big(\int\limits_0^{2r} L(u)du + 2r\int\limits_0^{2r} N(u)du\Big)} = 1. \tag{13}$$

Тоді для всіх $x_0, x_{-1} \in B(x^*, r)$ ітераційний процес (5) коректно визначений і генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ належить $B(x^*, r)$, збігається до x^* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \\ \leqslant \frac{\int\limits_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|}{1 - \Big(\int\limits_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_n-x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|\Big)}\|x_n - x^*\|, \tag{14}$$

де $\varrho(y) = \|y - x^*\|$. Порядок збіжності ітераційної процедури (5) квадратичний.

Доведення. Доведемо, що функції $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t L(u)du$ та $h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N(u)du$ монотонно неспадні стосовно t. Справді, при монотонності L отримаємо

$$\Big(\frac{1}{t_2}\int\limits_0^{t_2} - \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1}\Big)L(u)du = \Big(\frac{1}{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\int\limits_0^{t_1}\Big)L(u)du \geqslant$$

$$\geqslant L(t_1)\Big(\frac{1}{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\int\limits_0^{t_1}\Big)du = L(t_1)\Big(\frac{t_2 - t_1}{t_2} + t_1\Big(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\Big)\Big) = 0$$

для $0 < t_1 < t_2$. Отже, $g(t)$ – неспадна стосовно t. Аналогічно отримуємо для $h(t)$.

Позначимо через A_n лінійний оператор $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$. Легко переконатися в такому: якщо $x_n, x_{n-1} \in B(x^*, r)$, то $2x_n - x_{n-1}, x_{n-1} \in B(x^*, 3r)$. Тоді

A_n – оборотний і виконується нерівність

$$\begin{gathered}\|A_n^{-1}F^{'}(x^*)\| = \|[I - (I - F^{'}(x^*)^{-1}A_n))^{-1}\| \leqslant \\ \leqslant \Big(1 - \Big(\int\limits_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|\Big)\Big)^{-1}.\end{gathered} \tag{15}$$

Справді, з формул (11) і (12) отримаємо

$$\begin{aligned}&\|I - F^{'}(x^*)^{-1}A_n\| = \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - \\ &- F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\|) = \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x^*, x^*) - F(x_n, x_n) + \\ &+ F(x_n, x_n) - F(x_n, x_{n-1}) + F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))\| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \\ &+ \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n))(x_n - x_{n-1})\| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\| < \int\limits_0^{2r} L(u)du + 2r\int\limits_0^{2r} N(u)du.\end{aligned}$$

З означення r одержуємо

$$\int\limits_0^{2r} L(u)du + 2r\int\limits_0^{2r} N(u)du = 1 - \int\limits_0^{r} L(u)du - 2r\int\limits_0^{2r} N(u)du < 1. \tag{16}$$

Використовуючи теорему Банаха про обернений оператор [7], отримуємо формулу (15).

Далі можна записати

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1} - x^*\| = \|x_n - x^* - A_n^{-1}(F(x_n) - F(x^*))\| = \| - A_n^{-1}(F(x_n, x^*) - \\ &- A_n)(x_n - x^*)\| \leqslant \|A_n^{-1}F^{'}(x^*)\|\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - A_n)\|\|x_n - x^*\|.\end{aligned} \tag{17}$$

Згідно з умовами (11) і (12) теореми одержуємо

$$\begin{aligned}&\|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - A_n)\| = \\ &= \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\|) = \\ &= \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - F(x_n, x_n) + F(x_n, x_n) - F(x_n, x_{n-1}) + \\ &+ F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}))\| \leqslant \\ &\leqslant \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x^*) - F(x_n, x_n))\| + \\ &+ \|F^{'}(x^*)^{-1}(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n))(x_n - x_{n-1})\| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^{\rho(x_n)} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|.\end{aligned}$$

З (15) і (17) видно, що виконується (14).

Далі з (14) і (13) отримаємо

$$\|x_{n+1} - x^*\| < \|x_n - x^*\| < ... < \max\{\|x_0 - x^*\|, \ \ \|x_{-1} - x^*\|\} < r.$$

Тому ітераційний процес (5) коректно визначений і послідовність, яку він породжує, належить $B(x^*, r)$. З останньої нерівності й оцінки (14) отримуємо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0$. Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ збігається до x^*, то

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \|x_n - x^*\| + \|x_{n-1} - x^*\| \leqslant 2\|x_{n-1} - x^*\|,$$

отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$.

Позначимо $\rho_{max} = \max\{\rho(x_0), \rho(x_{-1})\}$. Оскільки $g(t)$ і $h(t)$ монотонно неспадні, то, враховуючи вирази

$$\int\limits_0^{\rho(x_n)} L(u)du = \frac{\int\limits_0^{\rho(x_n)} L(u)du\rho(x_n)}{\rho(x_n)} \leqslant \frac{\int\limits_0^{\rho_{max}} L(u)du\rho(x_n)}{\rho_{max}} = A\rho(x_n),$$

$$\int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du = \frac{\int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|}{\|x_n - x_{n-1}\|} <$$

$$< \frac{\int\limits_0^{\|x_0 - x_{-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|}{\|x_0 - x_{-1}\|} = G\|x_n - x_{n-1}\|$$

та

$$\Big(1 - \Big(\int\limits_0^{2\rho(x_n)} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_n - x_{n-1}\|} N(u)du\|x_n - x_{n-1}\|\Big)\Big)^{-1} <$$

$$< \Big(1 - \Big(\int\limits_0^{2\rho_{max}} L(u)du + \int\limits_0^{\|x_0 - x_{-1}\|} N(u)du\|x_0 - x_{-1}\|\Big)\Big)^{-1} = H,$$

з нерівності (14) випливає

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant H(A\rho(x_n) + G\|x_n - x_{n-1}\|^2)\|x_n - x^*\|$$

або

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant C_3\|x_n - x^*\|^2 + C_4\|x_n - x_{n-1}\|^2\|x_n - x^*\|. \tag{18}$$

Очевидно, порядок збіжності ітераційного процесу (5) не перевищує 2, тобто існують $C_5 \geqslant 0$ і $N > 0$, що для всіх $n \geqslant N$ виконується нерівність

$$\|x_n - x^*\| \geqslant C_5\|x_{n-1} - x^*\|^2.$$

Оскільки

$$\|x_n - x_{n-1}\|^2 \leqslant (\|x_n - x^*\| + \|x_{n-1} - x^*\|)^2 \leqslant 4\|x_{n-1} - x^*\|^2,$$

то з (18) одержимо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}-x^*\| &\leqslant C_3\|x_n-x^*\|^2+4C_4\|x_{n-1}-x^*\|^2\|x_n-x^*\| \leqslant \\ &\leqslant (C_3+4C_4/C_5)\|x_n-x^*\|^2 = C_6\|x_n-x^*\|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

З нерівності (19) випливає квадратичний порядок збіжності послідовності $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ до x^*. Теорему доведено. □

3. Область єдиності розв'язку рівняння.

Теорема 2. *Припустимо, що: 1) $F(x)=0$ має розв'язок $x^*\in D$, в якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого порядку $F(x,x^*)$ в $B(x^*,3r)\subset D$, які задовольняють узагальнену умову Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,x^*)-F'(x^*)\| \leqslant \int\limits_0^{\rho(x)} L(u)du \quad \forall x\in B(x^*,3r),$$

де $\rho(x)=\|x-x^*\|$ і L – додатна інтегровна функція. Нехай r задовольняє

$$\int\limits_0^{r} L(u)du \leqslant 1.$$

Тоді рівняння $F(x)=0$ має єдиний розв'язок x^* в $B(x^*,r)$.

Доведення. Аналогічне [10]. □

4. Наслідки. При вивченні різницевих методів традиційними є припущення, що поділені різниці задовольняють умови Ліпшиця. Вважаючи, що L і N є константами, отримаємо з теорем 1 та 2 такі наслідки.

Наслідок 1. *Припустимо, що: 1) $F(x)=0$ має розв'язок $x^*\in D$, в якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого та другого порядку $F(x,y)$ і $F(x,y,z)$ в $B(x^*,3r)\subset D$, які задовольняють умови Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,y)-F(u,v))\| \leqslant L(\|x-u\|+\|y-v\|),$$

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(u,x,y)-F(v,x,y))\| \leqslant N\|u-v\|,$$

де $x,y,u,v\in B(x^*,r)$, L, N – додатні числа і r є додатним коренем рівняння $8Nr^2+3Lr-1=0$. Тоді метод Курчатова (5) збігається для всіх $x_{-1},x_0\in B(x^*,r)$ і виконується (14).

Зауважимо, що отримане r збігається зі значенням, наведеним в [9, 8].

Наслідок 2. *Припустимо, що: 1) $F(x)=0$ має розв'язок $x^*\in D$, в якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона оборотна; 2) F має поділені різниці першого порядку $F(x,x^*)$ в $B(x^*,3r)\subset D$, які задовольняють умову Ліпшиця*

$$\|F'(x^*)^{-1}(F(x,x^*)-F'(x^*))\| \leqslant L\|x-x^*\| \quad \forall x\in B(x^*,3r),$$

де L – додатне число і $r=\frac{1}{L}$. Тоді рівняння $F(x)=0$ має єдиний розв'язок x^* у відкритій кулі $B(x^*,r)$. Таке r залежить тільки від L і не залежить від F.

5. Висновки. У працях [1, 3, 5, 8, 9] досліджено локальну збіжність методів хорд і Курчатова у разі виконання умов Ліпшиця для поділених різниць, які містять деякі постійні Ліпшиця. Ми дослідили локальну збіжність методу Курчатова за загальніших умов Ліпшиця, в яких замість сталих Ліпшиця використовують деякі додатні інтегровні функції. Отримані результати містять відомі як частинні випадки.

Список використаної літератури

1. *Argyros I.K.* On an algorithm for solving nonlinear operator equation / *I.K.Argyros* // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – Vol. 10, №1. – P. 83-92.
2. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / *Дж. Ортега, В. Рейнболдт* – М.: Мир, 1975.
3. *Шахно С.М.* Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь / *С.М. Шахно* // Мат. студії. – 2004. – Т. 22, №1. – С.79-86.
4. *Шахно С.* Локальна збіжність ітераційно-різницевих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь / *С. Шахно, О. Макух* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 124-131.
5. *Hernandez M.A.* The Secant method and divided differences Hölder continuous / *M.A. Hernandez, M.J. Rubio* // Applied Mathematics and Computation. – 2001. – Vol. 124. – P. 139-149.
6. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space / *X. Wang* // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 20. – P. 123-134.
7. *Канторович Л.В.* О методе Ньютона / *Л.В. Канторович* // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1949. – Т. 28. – С. 104-144.
8. *Шахно С.М.* Про різницевий метод з квадратичною збіжністю для розв'язування нелінійних операторних рівнянь / *С.М. Шахно* // Мат. студії. – 2006. – Т. 26, №1. – С. 105-110.
9. *Shakhno S.M.* On a Kurchatov's method of linear interpolation for solving nonlinear equations / *S.M. Shakhno* // Proc. Appl. Math. Mech. – 2004. – Vol. 4. – P. 650-651.
10. *Шахно С.М.* Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку / *С.М. Шахно* // Матем. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 296-305.
11. *Potra F.A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations / *F.A. Potra* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1984-85. – Т. 7, №1. – P. 75-106.

Стаття: надійшла до редакції 13.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

KURCHATOV METHOD OF LINEAR INTERPOLATION UNDER THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS FOR THE FIRST- AND SECOND-ORDER DIVIDED DIFFERENCES

Stepan SHAKHNO

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: shakhno@is.lviv.ua

Convergence of the Kurchatov's method for solving nonlinear operator equations in the Banach spaces under the generalized Lipschitz condition for the first- and second-order divided differences is investigated. The conditions and speed of convergence of this method are found. The uniqueness ball for solution of operator equations is determined.

Key words: nonlinear equation, iterative method, divided difference, convergence order.

МЕТОД ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУРЧАТОВА ПРИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Степан ШАХНО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: shakhno@is.lviv.ua

Исследовано сходимость метода линейной интерполяции Курчатова для решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах при обобщенных условиях Липшица для разделенных разностей первого и второго порядков. Определены условия и скорость сходимости этого метода, найдено область единственности решения задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, итерационный метод, разделенная разность, порядок сходимости.