ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 218–230
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 218–230

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМИМ МОЛОДШИМ КОЕФІЦІЄНТОМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів
e-mail: snitkog@ukr.net

Знайдено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу параметрів у коефіцієнті при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, вільна межа, параболічне рівняння, функція Гріна.

1. Вступ. Завдяки активному застосуванню в економіці, медицині, ракетобудуванні та інших галузях науки і техніки обернені задачі зайняли належне місце серед інших задач для рівнянь із частинними похідними. Коефіцієнтні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння, в областях з відомими межами достатньо детально вивчені. Зокрема, в [1,2] досліджено обернені задачі визначення коефіцієнта $q(t)$ у рівнянні

$$u_t = u_{xx} + q(t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T),$$

з додатковими умовами

$$u|_{x=x_0} = \psi(t), \quad x_0 \in (0,l),$$

$$\int\limits_0^{s(t)} u(x,t)dx = E(t), \quad t \in [0,T], \quad 0 < s(t) \leqslant 1,$$

відповідно.

Питання одночасної ідентифікації коефіцієнта теплопровідності та коефіцієнта теплоємності опрацьовані в [3]–[5]. У [6] досліджено задачу одночасного визначення функцій, які залежать від різних аргументів, у коефіцієнті при невідомій функції у параболічному рівнянні

$$u_t - u_{xx} + (f(x) + g(t))u = 0.$$

Багато практично важливих задач зводяться до задач з вільними межами, в яких невідома межа розділяє або речовини з різними властивостями, або різні фази тієї самої речовини. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Такий підхід дає змогу застосувати до цих задач методику, розроблену для дослідження обернених задач. В [7, 8] знайдено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t),$$
$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

з невідомим, залежним від часу, старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої невідома. В [9]–[11] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої невідома.

2. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : h_1(t) < x < h_2(t), 0 < t < T\}$, де $h_1 = h_1(t)$, $h_2 = h_2(t)$ – невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $c_1(t)$, $c_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + (c_1(t)x + c_2(t))u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \quad u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$h_1'(t) = u_x(h_1(t),t) + \mu_3(t), \quad h_2'(t) = -u_x(h_2(t),t) + \mu_4(t),$$
$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_5(t), \quad \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)dx = \mu_6(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де $h_1(0) = h_{01}$ – задане число.

Заміною змінної $y = \frac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$ задачу (1)-(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h_1(t), h_3(t), c_1(t), c_2(t), v(y,t))$, де

$$h_3(t) = h_2(t) - h_1(t), \quad v(y,t) = u(yh_3(t) + h_1(t), t),$$

в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\, v_{yy} + \frac{b(yh_3(t) + h_1(t),t) + h_1'(t) + yh_3'(t)}{h_3(t)} v_y +$$
$$+(c_1(t)(yh_3(t) + h_1(t)) + c_2(t))v + f(yh_3(t) + h_1(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{5}$$
$$v(y,0) = \varphi(yh_3(0) + h_1(0)), \quad y \in [0,1], \tag{6}$$
$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$
$$h_1'(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h_3'(t) = -\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h_3(t)\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_5(t), \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$h_3^2(t)\int_0^1 yv(y,t)dy + h_1(t)\mu_5(t) = \mu_6(t), \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

де $h_1(0) = h_{01}$ – задане число.

3. Існування розв'язку задачі (5)-(11). Умови існування розв'язку задачі (5)-(11) подано в теоремі.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $a, b, f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0,T])$, $\varphi \in C^2[h_{01}, h_{02}]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,5,6$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j = 3,4$;
2) $0 < a_0 \leqslant a(x,t) \leqslant a_1$, $f(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 5,6$, $t \in [0,T]$;
3) $\varphi(h_{01}) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_{02}) = \mu_2(0)$, $\int\limits_{h_{01}}^{h_{02}} x\varphi(x)dx = \mu_6(0)$, *де* $h_{02} = h_2(0)$ – *розв'язок рівняння* $\int\limits_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_5(0)$.

Тоді можна зазначити таке число $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h_1, h_3, c_1, c_2, v) \in (C^1[0,T_0])^2 \times (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, *задачі (5)-(11).*

Доведення. Існування розв'язку задачі (5)-(11) ґрунтується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку визначимо початкове значення функції $h_2(t)$, що задає частину межі області. За умов теореми існує єдиний розв'язок $h_{02} = h_2(0)$ рівняння

$$\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_5(0).$$

Позначимо $h_{03} = h_{02} - h_{01}$.

Зведемо задачу (5)-(11) до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\widetilde{v}(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_{03} + h_{01}) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\widetilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\widetilde{v}_{yy} + \frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+h_1'(t)+yh_3'(t)}{h_3(t)}(\widetilde{v}_y + d(y,t)) +$$
$$+(c_1(t)(yh_3(t)+h_1(t)) + c_2(t))(\widetilde{v} + g(y,t)) + F(y,t), \quad (y,t) \in Q_T,$$
$$\widetilde{v}(y,0) = 0, \quad y \in [0,1],$$
$$\widetilde{v}(0,t) = \widetilde{v}(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

де $d(y,t) = h_{03}\varphi'(yh_{03} + h_{01}) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)$,
$g(y,t) = \varphi(yh_{03} + h_{01}) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t) - \mu_1(0))$,
$F(y,t) = h_{03}^2 \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)} \varphi''(yh_{03}+h_{01}) + f(yh_3(t)+h_1(t),t) - y\mu_2'(t) + \mu_1'(t)(y-1)$.

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\widetilde{v}_{yy} + \frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}\widetilde{v}_y$$

задачу (12) зводимо до рівняння

$$\widetilde{v}(y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg(\frac{h_1'(\tau)+\eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}(\widetilde{v}_\eta(\eta,\tau) + d(\eta,\tau)) + \frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)}{h_3(\tau)}\times$$

$$\times d(\eta,\tau) + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau)) + c_2(\tau))(\widetilde{v}(\eta,\tau) + g(\eta,\tau)) + F(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau, \qquad (13)$$

$(y,t) \in \overline{Q}_T$.

Позначимо $w(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді з умов (8), (9) отримуємо

$$h_1'(t) = \frac{w(0,t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \qquad h_3'(t) = -\frac{w(0,t)+w(1,t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t). \qquad (14)$$

Використавши (14), подамо (13) у вигляді

$$v(y,t) = \varphi(yh_{03}+h_{01}) + y(\mu_2(t)-\mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0)) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(w(\eta,\tau)\bigg(\frac{w(0,\tau)(1-\eta)-\eta w(1,\tau)}{h_3^2(\tau)} + \frac{(1-\eta)\mu_3(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)}\bigg) + F(\eta,\tau) + d(\eta,\tau)\times$$

$$\times\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)}{h_3(\tau)} + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+c_2(\tau))v(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (15)$$

Продиференціювавши (15) за змінною y, одержуємо

$$w(y,t) = h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01}) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Bigg(F(\eta,\tau)+$$

$$+\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)}{h_3(\tau)}d(\eta,\tau) + \bigg(\frac{w(0,\tau)(1-\eta)-\eta w(1,\tau)}{h_3^2(\tau)} + \frac{(1-\eta)\mu_3(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)}\bigg)\times$$

$$\times w(\eta,\tau) + (c_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau)) + c_2(\tau))v(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (16)$$

З умов (10), (11) отримуємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_5(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,T], \qquad (17)$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} - \frac{h_3^2(t)}{\mu_5(t)}\int\limits_0^1 yv(y,t)dy, \quad t\in[0,T]. \qquad (18)$$

Продиференціювавши (10), (11) за змінною t і використавши (5), (14), одержуємо

$$c_1(t) = \Big[\int\limits_0^1 (((b(yh_3(t)+h_1(t),t)-a_x(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t)+h_3(t)f(yh_3(t)+h_1(t),t))\times$$

$$\times(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t)-yh_3(t)\mu_5(t))+\mu_5(t)a(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t))dy+\Big(\mu_2(t)\mu_4(t)+$$

$$+w(1,t)\frac{a(h_3(t)+h_1(t),t)-\mu_2(t)}{h_3(t)}\Big)(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t)-h_3(t)\mu_5(t))-\Big(\mu_1(t)\mu_3(t)+$$

$$+w(0,t)\frac{a(h_1(t),t)+\mu_1(t)}{h_3(t)}\Big)(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))+\mu_6'(t)\mu_5(t)-$$

$$-\mu_5'(t)\mu_6(t)\Big]\Delta^{-1}(t), \quad t\in[0,T], \tag{19}$$

$$c_2(t) = \Big[\Big(h_3^3(t)\int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy+h_1(t)(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))\Big)\Big(\int\limits_0^1((b(yh_3(t)+h_1(t),t)-$$

$$-a_x(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t)+h_3(t)f(yh_3(t)+h_1(t),t))dy-\frac{a(h_3(t)+h_1(t),t)-\mu_2(t)}{h_3(t)}\times$$

$$\times w(1,t)+\frac{a(h_1(t),t)+\mu_1(t)}{h_3(t)}w(0,t)+\mu_5'(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_1(t)\mu_3(t)\Big)+\mu_6(t)\Big(\int\limits_0^1(yh_3(t)\times$$

$$\times(w(y,t)(b(yh_3(t)+h_1(t),t)-a_x(yh_3(t)+h_1(t),t))+h_3(t)f(yh_3(t)+h_1(t),t))-w(y,t)\times$$
$$\times a(yh_3(t)+h_1(t),t))dy+h_1(t)\mu_5'(t)+\mu_6'(t)+h_3(t)(a(h_3(t)+h_1(t),t)-\mu_2(t))w(1,t)+$$

$$+h_3^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t)\Big)\Big]\Delta^{-1}(t), \qquad t\in[0,T], \tag{20}$$

де $\Delta(t)=h_3^4(t)\begin{vmatrix}\int\limits_0^1 v(y,t)dy & \int\limits_0^1 yv(y,t)dy\\ \int\limits_0^1 yv(y,t)dy & \int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy\end{vmatrix}.$

Отже, задачу (5)-(11) зведено до системи інтегральних рівнянь (15)-(20) стосовно невідомих $(v(y,t),w(y,t),h_3(t),h_1(t),c_1(t),c_2(t))$. Якщо $(h_1,h_3,c_1,c_2,v)\in\in(C^1[0,T])^2\times(C[0,T])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)-(11), то

$$(v,w,h_3,h_1,c_1,c_2)\in(C(\overline{Q}_T))^2\times(C[0,T])^4$$

є розв'язком системи рівнянь (15)-(20). Доведемо, що правильним є й обернене твердження.

Нехай (v,w,h_3,h_1,c_1,c_2) – неперервний розв'язок системи рівнянь (15)-(20). Продиференціюємо (15) за змінною y. Праві частини отриманої рівності та рівності (16) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w(y,t)=v_y(y,t)$. Отже, функція $v\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}v_{yy}+\Big(\frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+(1-y)\mu_3(t)+y\mu_4(t)}{h_3(t)}+$$

$$+\frac{(1-y)v_y(0,t)-yv_y(1,t)}{h_3^2(t)}\Big)v_y+(c_1(t)(yh_3(t)+h_1(t))+c_2(t))v+$$
$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t),\quad (y,t)\in Q_T, \tag{21}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $c_1(t), c_2(t), h_1(t), h_3(t)$. З рівностей (17), (18) випливають умови (10), (11). Залишається довести виконання умов (8), (9). Подамо (19), (20) у вигляді

$$c_1(t)\mu_6(t)+c_2(t)\mu_5(t)=\frac{\mu_1(t)+a(h_1(t),t)}{h_3(t)}v_y(0,t)-\frac{a(h_1(t)+h_3(t),t)-\mu_2(t)}{h_3(t)}v_y(1,t)-$$
$$-\int_0^1((b(yh_3(t)+h_1(t),t)-a_x(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t)+h_3(t)f(yh_3(t)+h_1(t),t))dy+$$
$$+\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_5'(t), \tag{22}$$

$$c_1(t)\Big(h_3^3(t)\int_0^1 y^2v(y,t)dy+h_1(t)(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))\Big)+c_2(t)(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))=$$
$$=-(a(h_1(t)+h_3(t),t)-\mu_2(t))v_y(1,t)-\int_0^1(h_3(t)y((b(yh_3(t)+h_1(t),t)-$$
$$-a_x(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t)+h_3(t)f(yh_3(t)+h_1(t),t))-$$
$$-a(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t))dy-h_1(t)\mu_5'(t)-h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_6'(t). \tag{23}$$

Припущення теореми дають підстави продиференціювати (17), (18) за t. Використавши те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (21), та віднявши від отриманих рівностей (22), (23), отримуємо

$$\Big(h_3'(t)-\mu_4(t)+\mu_3(t)+\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_3(t)}\Big)\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)}=0,$$
$$\frac{2(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))}{h_3^2(t)}\Big(h_3'(t)-\mu_4(t)+\mu_3(t)+\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_3^2(t)}\Big)+$$
$$+\Big(h_1'(t)-\mu_3(t)-\frac{v_y(0,t)}{h_3(t)}\Big)\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)}=0.$$

Звідси робимо висновок, що $h_1, h_3\in C^1[0,T]$, функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (5) та умови (8), (9).

Отже, еквівалентність задачі (5)-(11) та системи рівнянь (15)-(20) у зазначеному сенсі доведено.

Подамо $\Delta(t)$ у вигляді [12]

$$\Delta(t)=\frac{h_3^4(t)}{2}\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}1 & 1\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v(y_1,t) & v(y_2,t)\\ y_1v(y_1,t) & y_2v(y_2,t)\end{vmatrix}dy_1dy_2=$$
$$=\frac{h_3^4(t)}{2}\int_0^1\int_0^1(y_2-y_1)^2v(y_1,t)v(y_2,t)dy_1dy_2.$$

Знайдемо оцінки знизу функцій $v(y,t)$ і $h_3(t)$. Згідно з припущеннями теореми з (15) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, що

$$v(y,t) \geqslant \frac{\varphi_0}{2} \equiv M_0 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{24}$$

Очевидно, що виконання умови (24) рівносильне виконанню нерівності

$$\Big| y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0))+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(d(\eta,\tau)\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)}{h_3(\tau)}+$$

$$+F(\eta,\tau)+w(\eta,\tau)\left(\frac{w(0,\tau)(1-\eta)-\eta w(1,\tau)}{h_3^2(\tau)}+\frac{(1-\eta)\mu_3(\tau)+\eta\mu_4(\tau)}{h_3(\tau)}\right)+(c_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+$$

$$+h_1(\tau))+c_2(\tau))v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau\Big| \leqslant M_0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{25}$$

Врахувавши (25), з (15) одержуємо

$$v(y,t) \leqslant \max_{[0,1]} \varphi(yh_{03}+h_{01}) + M_0 \equiv M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{26}$$

Тоді для розв'язків рівняння (17) справджується нерівність

$$h_3(t) \geqslant \frac{1}{M_1}\min_{[0,T]}\mu_5(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,t_1]. \tag{27}$$

Отож,

$$\Delta(t) \geqslant C_0 > 0, \quad t \in [0,t_1]. \tag{28}$$

Знайдемо оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(20). Врахувавши (24), (26), для розв'язків рівнянь (17), (18) одержуємо такі нерівності:

$$h_3(t) \leqslant \frac{1}{M_0}\max_{[0,T]}\mu_5(t) \equiv H_1 < \infty,$$

$$|h_1(t)| \leqslant (\max_{[0,T]}|\mu_6(t)| + M_1H_1)(\min_{[0,T]}\mu_5(t))^{-1} \equiv H_2 < \infty, \quad t \in [0,t_1]. \tag{29}$$

Позначимо $W(t) = \max_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. З (19), (20), врахувавши (26)-(29), одержуємо

$$|c_1(t)| \leqslant C_1 + C_2W(t), \quad |c_2(t)| \leqslant C_3 + C_4W(t), \quad t \in [0,t_1]. \tag{30}$$

Використавши (26), (27), (29) та оцінки функції Гріна [13], з (16) отримуємо

$$W(t) \leqslant C_5 + C_6\int_0^t (1+|c_1(t)|+|c_2(t)|+W(\tau)+W^2(\tau))\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,t_1].$$

Врахувавши (30), подамо останню нерівність у вигляді

$$W(t) \leqslant C_7 + C_8\int_0^t \frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \quad t \in [0,t_1].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [14]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t) \leqslant M_2 < \infty, \quad t \in [0,T_0],$$

де $T_0, 0 < T_0 \leqslant t_1$, визначається сталими C_7, C_8. Тоді

$$|c_1(t)| \leqslant C_1 + C_2 M_2 \equiv B_1 < \infty, \quad |c_2(t)| \leqslant C_3 + C_4 M_2 \equiv B_2 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Подамо систему рівнянь (15)-(20) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y,t), w(y,t), h_3(t), h_1(t), c_1(t), c_2(t))$, а оператор $P = (P_1, \dots, P_6)$ визначається правими частинами рівнянь (15)-(20). Позначимо $N = \{(v, w, h_3, h_1, c_1, c_2) \in \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])^4 : \ M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1, \ |w(y,t)| \leqslant M_2, \ H_0 \leqslant h_3(t) \leqslant H_1, \ |h_1(t)| \leqslant H_2, \ |c_1(t)| \leqslant B_1, \ |c_2(t)| \leqslant B_2\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як у [9].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (15)-(20). Оскільки система рівнянь (15)-(20) та задача (5)-(11) еквівалентні у зазначеному сенсі, то існує розв'язок задачі (5)-(11) при $(y,t) \in \overline{Q}_{T_0}$. $\square$

4. Єдиність розв'язку задачі (5)-(11).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:* $a \in C^{2,0}(\mathbb{R} \times [0,T])$, $b, f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0,T])$, $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1, 2, 5$. *Тоді задача (5)-(11) не може мати двох різних розв'язків*

$$(h_1, h_3, c_1, c_2, v) \in (C^1[0,T])^2 \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T), \qquad h_3(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

Доведення. Припустимо, що $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), c_{1i}(t), c_{2i}(t), v_i(y,t))$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)-(11). Позначимо

$$\frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t), \quad \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t), \quad i = 1, 2, \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

$$r(t) = c_{11}(t) - c_{12}(t), \quad q(t) = c_{21}(t) - c_{22}(t), \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $r(t), q(t), s(t), p(t), v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}(t)} + s_1(t) + yp_1(t) \right) v_y + (c_{11}(t) \times$$
$$\times (yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + c_{21}(t)) v + \left(\frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} - \frac{a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}^2(t)} \right) v_{2yy} +$$
$$+ \left(s(t) + yp(t) + \frac{b(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}(t)} - \frac{b(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}(t)} \right) v_{2y} +$$
$$+ (r(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + c_{12}(t)(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)) + q(t)) v_2 +$$
$$+ f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{31}$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \tag{32}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{33}$$

$$s(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_{31}^2(t)} + v_{2y}(0,t) \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) + \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \quad t \in [0,T], \tag{34}$$

$$p(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_{31}^2(t)} - (v_{2y}(0,t) + v_{2y}(1,t)) \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) +$$

$$+(\mu_4(t)-\mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right), \qquad t\in[0,T], \tag{35}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_5(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right), \tag{36}$$

$$\int\limits_0^1 yv(y,t)dy=(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)-$$
$$-(h_{11}(t)-h_{12}(t))\frac{\mu_5(t)}{h_{32}^2(t)}, \quad t\in[0,T]. \tag{37}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)}v_{yy}+\left(\frac{b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}(t)}+s_1(t)+yp_1(t)\right)v_y+$$
$$+(c_{11}(t)(yh_{31}(t)+h_{11}(t))+c_{21}(t))v$$

з урахуванням умов (32), (33) функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}+$$
$$+\left(s(\tau)+\eta p(\tau)+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}(\tau)}-\frac{b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+(r(\tau)(h_{11}(\tau)+\eta h_{31}(\tau))+c_{12}(\tau)(\eta(h_{31}(\tau)-h_{32}(\tau))+h_{11}(\tau)-h_{12}(\tau))+q(\tau))v_2(\eta,\tau)+$$
$$+f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{38}$$

Продиференціювавши (38) за змінною y, одержуємо

$$v_y(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}+$$
$$+\left(s(\tau)+\eta p(\tau)+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}(\tau)}-\frac{b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+(r(\tau)(h_{11}(\tau)+\eta h_{31}(\tau))+c_{12}(\tau)(\eta(h_{31}(\tau)-h_{32}(\tau))+h_{11}(\tau)-h_{12}(\tau))+q(\tau))v_2(\eta,\tau)+$$
$$+f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{39}$$

Оскільки для $b_{1i}(t)$, $b_{2i}(t)$, $i=1,2$ справджуються рівності, аналогічні до (19), (20), то отримуємо

$$r(t)\mu_6(t)+q(t)\mu_5(t)=\frac{a(h_{11}(t),t)+\mu_1(t)}{h_{31}(t)}v_y(0,t)-\frac{a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t)-\mu_2(t)}{h_{31}(t)}v_y(1,t)+$$
$$+\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)(v_{2y}(0,t)(a(h_{11}(t),t)+\mu_1(t))-v_{2y}(1,t)(a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t)-\mu_2(t)))+$$
$$+(v_{2y}(0,t)(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))-(a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t)-a(h_{12}(t)+h_{32}(t),t))v_{2y}(1,t))\times$$

$$\times\frac{1}{h_{31}(t)}+\int\limits_0^1((b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_y(y,t)+(b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$
$$-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t)+$$
$$+(h_{31}(t)-h_{32}(t))f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+h_{31}(t)(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$
$$-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))dy,\quad t\in[0,T], \tag{40}$$

$$r(t)=\Bigg[\int\limits_0^1(((b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_{1y}(y,t)+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\times$$
$$\times h_{31}(t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)-yh_{31}(t)\mu_5(t))+\mu_5(t)a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_{1y}(y,t))dy+$$
$$+\left(v_{1y}(1,t)\frac{a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-\mu_2(t)}{h_{31}(t)}+\mu_2(t)\mu_4(t)\right)(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_5(t))-$$
$$-\left(v_{1y}(0,t)\frac{a(h_{11}(t),t)+\mu_1(t)}{h_{31}(t)}+\mu_1(t)\mu_3(t)\right)(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))+\mu_6'(t)\mu_5(t)-\mu_5'(t)\times$$
$$\times\mu_6(t)\Bigg]\mu_5(t)\Bigg(\mu_5(t)(h_{11}^2(t)-h_{12}^2(t))-h_{31}^3(t)\int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy-2\mu_6(t)(h_{11}(t)-h_{12}(t))-$$
$$-(h_{31}^3(t)-h_{32}^3(t))\int\limits_0^1 y^2v_2(y,t)dy\Bigg)\big(\Delta_1(t)\Delta_2(t)\big)^{-1}+\Bigg[\int\limits_0^1((\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)-yh_{31}(t)\times$$
$$\times\mu_5(t))((b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_y(y,t)+(b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$
$$-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t)+(h_{31}(t)-$$
$$-h_{32}(t))f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+h_{31}(t)(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))-\mu_5(t)\times$$
$$\times(v_{2y}(y,t)(b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))+h_{32}(t)f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))\times$$
$$\times(h_{11}(t)-h_{12}(t)+y(h_{31}(t)-h_{32}(t))))+\mu_5(t)a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_y(y,t)+\mu_5(t)v_{2y}(y,t)\times$$
$$\times(a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))dy+\frac{a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-\mu_2(t)}{h_{31}(t)}v_y(1,t)\times$$
$$\times(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_5(t))-\frac{a(h_{11}(t),t)+\mu_1(t)}{h_{31}(t)}v_y(0,t)(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))+$$
$$+\frac{1}{h_{31}(t)}(v_{2y}(1,t)(a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(h_{32}(t)+h_{12}(t),t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)-h_{31}(t)\times$$
$$\times\mu_5(t))-(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))v_{2y}(0,t))+\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\times$$
$$\times(v_{2y}(1,t)(a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-\mu_2(t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_5(t))-(\mu_6(t)-h_{11}(t)\times$$
$$\times\mu_5(t))(a(h_{11}(t),t)+\mu_1(t))v_{2y}(0,t))-\mu_5(t)(h_{11}(t)-h_{12}(t))\left(\frac{a(h_{11}(t),t)+\mu_1(t)}{h_{32}(t)}v_{2y}(0,t)-\right.$$
$$\left.-\frac{a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-\mu_2(t)}{h_{32}(t)}v_{2y}(1,t)+\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)\right)-\mu_5(t)(h_{31}(t)-h_{32}(t))\times$$
$$\times\left(\mu_2(t)\mu_4(t)+\frac{a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-\mu_2(t)}{h_{32}(t)}v_{2y}(1,t)\right)\Bigg]\Delta^{-1}(t),\quad t\in[0,T], \tag{41}$$

де $\Delta_i(t) = 2h_{1i}(t)\mu_5(t)\mu_6(t) - \mu_6^2(t) - h_{1i}^2(t)\mu_5^2(t) + h_{3i}^3(t)\mu_5(t)\int_0^1 y^2 v_2(y,t)dy$, $i = 1,2$.

Подамо $\Delta_i(t),\ i = 1,2$, у вигляді

$$\Delta_i(t) = \frac{h_{3i}^4(t)}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (y_2 - y_1)^2 v_i(y_1,t)v_i(y_2,t)dy_1dy_2, \quad i = 1,2.$$

Використавши принцип максимуму [13] для розв'язку задачі (5)-(7), отримуємо

$$v_i(y,t) \geqslant M > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \quad i = 1,2,$$

де стала M визначається вихідними даними задачі. Тоді

$$\Delta_i(t) > 0, \quad i = 1,2.$$

Згідно з припущеннями теореми правильною є така рівність:

$$f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t) = (h_{11}(t) - h_{12}(t) + y(h_{31}(t) - h_{32}(t)))\times$$
$$\times\int\limits_0^1 f_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t) + \sigma(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)),t)d\sigma, \tag{42}$$

яка правильна і для функцій $b(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t),t)$, $a(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t),t)$ та $a_x(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t),t)$, $i = 1,2$.

Виразимо $h_{3i}(t)$, $h_{1i}(t)$ через $p_i(t)$, $s_i(t)$

$$h_{3i}(t) = h_{3i}(0)\exp\left(\int\limits_0^t p_i(\tau)d\tau\right),$$

$$h_{1i}(t) = h_{1i}(0) + h_{3i}(0)\int\limits_0^t s_i(\tau)\exp\left(\int\limits_0^\tau p_i(\sigma)d\sigma\right)d\tau, \quad i = 1,2,$$

де $h_{31}(0) = h_{32}(0) = h_{03}$, $h_{11}(0) = h_{12}(0) = h_{01}$. Враховуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int\limits_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

одержимо

$$\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} = -\frac{1}{h_{03}}\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\int\limits_0^1 \exp\left(-\int\limits_0^t (\sigma p(\tau) + p_2(\tau))d\tau\right)d\sigma, \tag{43}$$

$$h_{11}(t) - h_{12}(t) = h_{03}\left(\int\limits_0^t s(\tau)\exp\left(\int\limits_0^\tau p_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t s_2(\tau)\int\limits_0^\tau p(\eta)d\eta\exp\left(\int\limits_0^\tau (p_2(\rho) + \sigma p(\rho))d\rho\right)d\sigma d\tau\right). \tag{44}$$

Аналогічно (43), (44) використаємо для зображення різниць

$$h_{31}(t) - h_{32}(t), \quad h_{11}^2(t) - h_{12}^2(t), \quad h_{31}^3(t) - h_{32}^3(t), \quad \frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}.$$

Врахувавши (42)-(44) і підставивши (38), (39) в (34), (35), (40), (41), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $p(t)$, $s(t)$, $q(t)$, $r(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $p(t) = 0$, $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Звідси отримаємо $p_1(t) = p_2(t)$, $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $r_1(t) = r_2(t)$, $t \in [0, T]$, а отже, $h_{31}(t) = h_{32}(t)$, $h_{11}(t) = h_{12}(t)$, $c_{11}(t) = c_{12}(t)$, $c_{21}(t) = c_{22}(t)$, $t \in [0, T]$. Використавши це в задачі (31)-(33), знаходимо, що $v_1(y, t) = v_2(y, t)$, $(y, t) \in \overline{Q}_T$. $\square$

Список використаної літератури

1. *Мамаюсупов О.Ш.* Об определении коэффициента параболического уравнения / *О.Ш. Мамаюсупов* // Исслед. по инт.-диф. уравн. Фрунзе. – 1989. – Вып. 22. – С. 157-160.
2. *Cannon J.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation / *J. Cannon, Y. Lin, S. Wang* // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – Vol. 33. – P. 149-163.
3. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости / *Н.И. Иванчов* // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35, №3. – С. 612-621.
4. *Ковальчук С.М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатошаровому середовищі / *С.М. Ковальчук* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, №2. – С. 153-159.
5. *Пабирівська Н.В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення / *Н.В. Пабирівська* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, №1. – С. 51-58.
6. *Саватеев Е.Г.* Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа / *Е.Г. Саватеев* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 334, №5. – С. 562-563.
7. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності / *М.І. Іванчов* // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, №7. – С. 901-910.
8. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами / *І. Баранська* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
9. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.
10. *Снітко Г.А.* Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643, №643. – С. 45-52.
11. *Снітко Г.А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, №4. – С. 37-47.
12. *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций / *Г. Полиа, Г. Сеге* – М.: Наука, 1978.
13. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева* – М.: Наука, 1967.
14. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *M. Ivanchov* – Lviv: VNTL Publ., 2003.

Стаття: надійшла до редакції 29.11.2012
прийнята до друку 12.12.2012

INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN MINOR COEFFICIENT IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Dudaev Str., 15, 79005, Lviv
e-mail: snitkog@ukr.net

We establish unique solvability conditions of the inverse problem of finding the time-dependent parameters in the coefficient of the unknown function in one-dimensional parabolic equation in a free boundary domain.

Key words: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Галина СНИТКО

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С. Подстригача НАН Украины,
ул. Дж. Дудаева, 15, 79005, Львов
e-mail: snitkog@ukr.net

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения зависящих от времени параметров в коэффициенте при неизвестной функции в одномерном параболическом уравнении в области со свободной границей.

Ключевые слова: обратная задача, свободная граница, параболическое уравнение, функция Грина.