ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 173–184
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 173–184

УДК 519.41.47

СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ СКІНЧЕННИХ DM-ГРУП

Тетяна САВОЧКІНА

Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди,
вул. Блюхера, 2, Харків, 61000
e-mail: savochkinat@rambler.ru

Досліджено скінченні 2-групи, в яких усяка максимально циклічна підгрупа має доповнення (DM-групи). Знайдено низку структурних властивостей таких груп. Отримано повну характеристику скінченних DM-груп експоненти 4.

Ключові слова: скінченні 2-групи, доповнювальні підгрупи, максимально циклічні підгрупи.

1. Вступ. Нехай G – скінченна 2-група і $S(G)$ – система усіх її максимально циклічних підгруп. Якщо усяка підгрупа $A \in S(G)$ має в G доповнення, то згідно з [1] група G називається DM-групою. Суттєві результати з опису скінченних DM-груп отримано в [1-3]. Зокрема, в [2] знайдено необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G експоненти 2^n, $n \geqslant 4$, була DM-групою. Зауважимо, що характеристику DM-груп в [1] подаємо на підставі поняття базисної системи циклічних підгруп, яке фактично є частинним випадком поняття рівномірного добутку циклічних підгруп ([4, с. 159-179]). Однак будову скінченних DM-груп ще не повністю з'ясовано. Зокрема, відкритим залишається питання про будову DM-груп експоненти 4 і 8.

Ми отримали низку важливих тверджень стосовно скінченних DM-груп, а також знайшли повний опис DM-груп експоненти 4. Крім того, започатковано дослідження DK-груп, тобто скінченних DM-груп, у яких усякий гомоморфний образ є DM-групою.

Результати досліджень доповідали на 7-й Міжнародній алгебричній конференції в Україні [5].

Усі невизначені поняття та позначення можна знайти в [1], [2] і [4].

2. Основна частина. Розглядатимемо два класи скінченних 2-груп: L і H, де L – клас усіх скінченних DM-груп, H – множина усіх груп із L, для яких усякий гомоморфний образ є DM-групою.

2.1. Загальні твердження про скінченні DM-групи. Нехай G – довільна скінченна 2-група. Циклічна підгрупа $A = \langle a \rangle$ називається максимально циклічною в G, якщо з умови $\langle a \rangle \leqslant \langle b \rangle \leqslant G$ випливає, що $\langle a \rangle = \langle b \rangle$. Підгрупа M називається доповнювальною в групі G (має доповнення в G), якщо існує така підгрупа T, що $G = M \cdot T$ і $M \cap T = 1$ ([1]). Якщо група G є добутком попарно переставних підгруп M_i, тобто $G = M_1 \cdot M_2 \cdots M_k$, то кажуть ([4]), що група G факторизується попарно переставними підгрупами M_i. Згідно з [4] факторизація $G = M_1 \cdot M_2 \cdots M_k$ називається точною, якщо перетин кожної підгрупи M_i з добутком усіх інших підгруп M_j є одиничною підгрупою.

Відомо [1], що усяка група G із L має точну факторизацію циклічними підгрупами. Вагомі результати про групи, які факторизуються своїми попарно переставними циклічними підгрупами, можна знайти у монографії М.С. Чернікова [4]. Оскільки клас L не замкнений стосовно гомоморфних образів [1], то доцільно провести дослідження DK-груп, тобто груп із класу H.

Теорема 1. *Нехай G – скінченна 2-DM-група, яка містить власну циклічну нормальну підгрупу T, що збігається зі своїм централізатором. Тоді G є групою діедра і T – максимальна в G.*

Доведення. Нехай $T = \langle t \rangle$, $|t| = 2^n$, де $n > 1$. Зрозуміло, що T – максимально циклічна в G, тому $G = T\lambda A$. Розглянемо довільну інволюцію $u \in G \setminus T$ і доведемо, що $utu = t^{\alpha}$, де $\alpha = -1$ або $\alpha = 1 + 2^{n-1}$, де $n \geqslant 3$. Оскільки підгрупа $T \lhd G$, то $utu = t^{\alpha}$, де α – непарне число. Для $n = 2$ отримаємо $|t| = 4$, тому $utu = t^3 = t^{-1}$. Припустимо тепер, що $n \geqslant 3$. Приймемо $\alpha = 1 + 2^l \cdot m$, де m – непарне, а $1 \leqslant l < n$, оскільки за умовою $C_G(T) = T$.

За умовою $t = u^2 \cdot t \cdot u^2 = t^{\alpha^2}$, тоді $\alpha^2 \equiv 1(\mathtt{mod}\ 2^n)$. Отже, одержимо $2^{l+1} \cdot m(1 + 2^{l-1} \cdot m) \equiv 0(\mathtt{mod}\ 2^n)$. Припустимо $l > 1$, тоді $n = l + 1$, а тому $utu = t^{1+2^{n-1}}$. Нехай тепер $l = 1$. У цьому випадку $\alpha = 1 + 2m$, тому $\alpha^2 = 1 + 4m + 4m^2$, звідси $4m(1+m) \equiv 0(\mathtt{mod}\ 2^n)$. Отже, $m = -1+2^{n-2}\theta$, для деякого числа θ. Якщо θ – парне, то $\alpha = 1 + 2m \equiv -1(\mathtt{mod}\ 2^n)$, тому $utu^{-1} = t^{-1}$. Нехай тепер θ – непарне число, тоді $\alpha = 1 + 2m \equiv -1 + 2^{n-1}(\mathtt{mod}\ 2^{^n})$, тому $utu = t^{-1+2^{n-1}}$, де $n \geqslant 3$.

Доведемо, що для групи G остання рівність приводить до суперечності. Нехай для групи G ця рівність виконується. Розглянемо підгрупу $\langle ut \rangle = M$. Припустимо, що $ut = z^2$, для деякого $z \in G$. Із розвинення $G = T\lambda A$ отримаємо $z = at^{\alpha}$, де $a \in A$. Оскільки u не належить T, то $a \neq 1$. Далі знаходимо $ut = at^{\alpha}at^{\alpha} = a^2(a^{-1}t^{\alpha}a)t^{\alpha} = a^2t^{\alpha s}t^{\alpha} = a^2t^{\alpha(s+1)}$, де s – непарне число. Звідси випливає $u = a^2$ і $t = t^{\alpha(s+1)}$, що неможливо, оскільки $s + 1$ парне число. Отож, доведено, що M – максимально циклічна підгрупа в G. Отримали рівність $(ut)^2 = t^{2^{n-1}}$, тому $|ut| = 4$. З іншого боку, максимально циклічні підгрупи M і T мають нетривіальний перетин, тому вони мають однаковий порядок ([1], лема 1.2). Оскільки $|ut| = 4$, а $|t| = 2^n$, $n \geqslant 3$, то отримали суперечність. Отже, рівність $utu = t^{-1+2^{n-1}}$ для групи G неможлива. Отож, доведено, що для усякої інволюції u, яка не належить T, одержуємо одну з рівностей $utu = t^{-1}$ або $utu = t^{1+2^{n-1}}$.

Доведемо тепер, що A – циклічна підгрупа. За умовою $G = T\lambda A$ і $C_G(T) = T$, тому A ізоморфна деякій підгрупі з групи автоморфізмів $L = \mathtt{Aut}\ T$. Оскільки L – абелева група, то і підгрупа A – абелева. Припустимо, що A – нециклічна підгрупа. У цьому випадку в A є три різні інволюції. Нехай це інволюції u, v і w, які визначають автоморфізми $\varphi(t) = utu = t^{\alpha}$, $\psi(t) = vtv = t^{\beta}$ і $f(t) = wtw = t^{\gamma}$. Звідси випливає, що числа $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1; 1 + 2^{n-1}\}$, тому отримаємо суперечність, оскільки φ, ψ і f –

попарно різні автоморфізми. Отож, доведено, що A – циклічна підгрупа. Приймемо $A = \langle a \rangle$, $|a| = 2^m$, де $m \geqslant 1$. Оскільки $T \lhd G$, то $a^{-1}ta = t^{\lambda}$, де λ – непарне число. Нехай v – інволюція з A.

Припустимо $m = 1$, тоді $a = v$. Якщо $\lambda = -1$, то $at = t^{-1}a$, тому $G = T\lambda A$ – група діедра, і все доведено. Нехай тепер $ata = t^{1+2^{n-1}}$. Підгрупа $K = \langle at^2 \rangle$ є максимально циклічною в G. Оскільки $(at^2)^2 = (ata)^2 \cdot t^2 = t^{2+2^n} \cdot t^2 = t^4 \neq 1$, то $\langle at^2 \rangle \cap T \neq \{1\}$. З одного боку, $|at^2| = 2^{n-1}$, а з іншого – $|at^2| = 2^n$. Отримали суперечність, тому випадок $\lambda = 1 + 2^{n-1}$ неможливий.

Припустимо тепер $m \geqslant 2$ і інволюція $v = a^{2^{m-1}}$. Одержали $vtv = t^{\lambda}$, де $\lambda = 1 + 2^l w$, w – непарне і $1 \leqslant l < n$. Розглянемо випадок, коли $l = 1$, тоді $\lambda = 1 + 2w$. Оскільки елемент $a^2 \cdot t^2 \in \Phi(G)$, то для деякого елемента $z \in G$ отримаємо $a^2 \cdot t^2 = z^2$. Із рівності $G = T\lambda A$ одержимо $h = a^i \cdot t^j$, тому $z^2 = a^i \cdot t^j \cdot a^i \cdot t^j = a^{2i} \cdot (a^{-i} \cdot t \cdot a^i)^j \cdot t^j = a^{2i} \cdot t^{\theta}$, де $\theta = (1 + 2w)^i \cdot j + j = 2j(1 + wi + 2h)$, для деякого цілого h. Оскільки $T \cap A = \{1\}$, то $a^2 = a^{2i}$, $t^2 = t^{\theta}$. Звідси випливає, що i – непарне, тому число $\theta = 4\rho$. Отримали суперечність. Отож, доведено, що $\lambda = 1 + 2^l \cdot w$, де $l \geqslant 2$, $(2, w) = 1$.

Доведемо рівність $|a| = 2^{n-l}$. Індукцією по $k \geqslant 1$ отримуємо рівність $a^{-2^k} t a^{2^k} = t^{1+2^{l+k} \cdot \theta_k}$, де θ_k – непарне число, $l + k \leqslant n$.

Якщо $l + k < n$, то $a^{2^k} \neq 1$. Далі, для $\theta = n - l$ одержуємо $a^{-2^{\theta}} \cdot t \cdot a^{2^{\theta}} = t$, тому $a^{2^{\theta}} \in C_G(T) \cap A = \{1\}$. Отже, $a^{2^{n-l}} = 1$ і $|a| = 2^{n-l}$, $n - l \geqslant 2$, $a^2 \neq 1$, оскільки $a^{2^{n-l-1}} \neq 1$.

Індукцією по k доводимо рівність $(at^2)^{2^k} = a^{2^k} \cdot t^{2^{k+1} \cdot \theta_k}$, де θ_k – непарне число. Оскільки $l \geqslant 2$, то для $k = n - l$ отримаємо $(at^2)^{2^{n-l}} = t^{2^{n-l+1} \cdot \theta_k} \neq 1$. Отримали, що дві максимально циклічні підгрупи T і $K = \langle at^2 \rangle$ мають нетривіальний перетин, але мають різні порядки $|T| = 2^n$, $|K| \leqslant 2^{n-1}$. Одержали суперечність. Отож, випадок $m \geqslant 2$ неможливий.

Отже, доведено, що $A = \langle a \rangle$ і $ata = t^{-1}$, $|a| = 2$, тому $G = T\lambda\langle a \rangle$ – група діедра. □

Означення 1. *Нехай G – довільна скінченна 2-група. Згідно з* [1] *система її неодиничних підгруп $S = \{M_1, ..., M_k\}$ називається базисною системою підгруп для групи G, якщо виконуються такі умови:*

1) підгрупи M_i попарно переставні;

2) справджується факторизація $G = M_1 \cdots M_k$;

3) факторизація є точною, тобто для довільного $i \in \{1, ..., k\}$ отримаємо $M_i \bigcap \prod_{j \neq i} M_j = \{1\}$.

В [1] доведено, що для всякої скінченної DM-групи G експоненти 2^n, де $n \geqslant 2$, знайдеться базисна система циклічних підгруп узгоджених порядків. А для експоненти 2^n, $n \geqslant 4$, знайдено необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G була DM-групою. Однак для експоненти 4 і 8 питання про будову DM-груп залишалось відкритим.

Позначимо через $\Re$ клас усіх скінченних 2-груп G, які мають базисні системи циклічних підгруп. Отже, правильні включення $H \subset L \subset \Re$. У зв'язку з цим, доцільно розглянути такі приклади груп.

Приклад 1. Групи 16-го порядку: $G_1 = \langle a,\, b||a| = |b| = 4;\ [a,b] = a^2 \cdot b^2,\ [a^2,b] = 1,\ [b^2,a] = 1\rangle$, $G_2 = \langle a,b||a| = 8; |b| = 2; [a,b] = a^4\rangle$ мають базисні системи циклічних підгруп, однак вони не є DM-групами. Отже, клас $L \neq \Re$, оскільки $G_1, G_2 \in \Re \backslash L$.

Приклад 2. (Приклад скінченної DM-групи G експоненти 8, в якій усяка максимальна циклічна підгрупа не є нормальною в G). Розглянемо групу $R_1 = \langle a,b,c\rangle$, яка визначається такою системою співвідношень: $\Sigma = \{|a| = |b| = |c| = 8,\ [a,b] = a^4,\ [b,c] = b^4,\ [c,a] = c^4\}$. Безпосередньо перевіряється, що така група R_1 існує і $|R_1| = 512$. Крім того, R_1 є DM-групою, але не є DK-групою.

Теорема 2. *Нехай G – довільна скінченна 2-DM-група і T – максимально циклічна підгрупа із G. Приймемо $N = N_G(T) = T\lambda E$ і $M = C_E(T)$. Тоді виконуються твердження:*

а) централізатор $C_G(T) = T \times M$;

б) підгрупа $M \lhd N$;

в) якщо підгрупа N є DK-групою, то фактор-група $\overline{N} = N/M = \overline{T}\lambda\overline{E}$ – група діедра, де $|\overline{T}| = 2^m$, $\overline{E} = \langle\overline{b}\rangle$, $|\overline{b}| = 2$ і $\overline{b}\overline{t}\overline{b} = \overline{t}^{-1}$, $m \geqslant 2$.

Доведення. Оскільки за умовою G є DM-групою і T – максимально циклічна в G, то у підгрупі N є доповнення E до T, тому $N = T\lambda E$. Для доведення рівності *а* достатньо довести, що $C_G(T) \leqslant T \times M$. Розглянемо елемент $v \in C_G(T)$. Тоді $v \in N$, тому $v = t^\alpha u$, де $u \in E$. Звідси випливає, що $u = t^{-\alpha}v \in C_G(T) \cap E = M$, отже, елемент $v \in T \times M$. Рівність *а* доведено.

Розглянемо елементи $a \in N$ і $b \in M$. Тоді $[a^{-1}ba, t] = a^{-1}[b,t]a = 1$. Доведемо, що елемент $a^{-1}ba \in E$. Справді, $a \in N = T\lambda E$, тому $a = t_1 h$, де $t_1 \in T$, $h \in E$. Отже, $a^{-1}ba = h^{-1}t_1^{-1}bt_1h = h^{-1}bh \in E$, оскільки елемент b централізує T. Звідси випливає, що $a^{-1}ba \in M$, тому підгрупа $M \lhd N$. Доведемо, що підгрупа $\overline{T}$ збігається зі своїм централізатором у фактор-групі $\overline{N} = N/M = \overline{T}\lambda\overline{E}$. Для елементів $\overline{u} \in \overline{E}$ і $\overline{t} \in \overline{T}$ з рівності $[\overline{u}, \overline{t}] = \overline{1}$ одержимо $[u,t] \in M$, тому $[u,t] \in E \cap T = \{1\}$. Звідси випливає, що $u \in M$, отже, $\overline{u} = \overline{1}$. Отримали $C_{\overline{N}}(\overline{T}) = \overline{T}$. Група $\overline{N}$ задовольняє усі умови теореми 1, тому $\overline{N} = \overline{T}\lambda\overline{E}$ – група діедра, де $|\overline{E}| = 2$, $|\overline{t}| = 2^m$, $\overline{E} = \langle\overline{b}\rangle$, $\overline{b}\overline{t}\overline{b} = \overline{t}^{-1}$. □

У зв'язку з доведеними теоремами 1,2 доцільно зауважити, що не у всякій скінченній DM-групі існує максимально циклічна підгрупа T, для якої $C_G(T) = T$. Група R_1 (приклад 2) за доведеним не містить нормальної максимально циклічної підгрупи T. Звідси випливає, що комутант $R_1' \nsubseteq T$. Оскільки $R_1' \leqslant Z(G)$, то існує центральний елемент $w \in R_1' \backslash T$, тому $C_{R_1}(T) \neq T$ для всякої максимально циклічної T із R_1.

Розглянемо скінченну 2-групу G. Згідно з [1] базисна система циклічних підгруп $S = \{\langle a_1\rangle, ..., \langle a_k\rangle\}$ є системою підгруп узгоджених порядків, якщо існує натуральне число $n \geqslant 2$, що $|a_i| \in \{2^{n-1}, 2^n\}$, для усіх $i = \overline{1,n}$ (надалі S називається U-системою). Зауважимо, що наявність U-системи не є необхідною умовою для DM-групи G. Наприклад, група діедра 16-го порядку $G = \langle a\rangle\lambda\langle b\rangle$, де $|a| = 8$, $|b| = 2$ і $ab = ba^{-1}$, є DM-групою, однак G не містить жодної U-системи S.

Теорема 3. *Нехай G – скінченна 2-група і $G = D \times \langle w\rangle$, де $|w| = 2$. Група $G \in \Re$ тоді і тільки тоді, коли підгрупа $D \in \Re$.*

Доведення. 1. Нехай для підгрупи D отримаємо базисну систему циклічних підгруп $\Sigma = \{\langle d_1\rangle, ..., \langle d_s\rangle\}$. Доведемо, що $\Sigma_1 = \{\langle d_1\rangle, ..., \langle d_s\rangle, \langle w\rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп для групи G. Рівності $G = \langle d_1\rangle \cdots \langle d_s\rangle \cdot \langle w\rangle = D \cdot \langle w\rangle$ і $D \cap \langle w\rangle = \{1\}$ виконуються за умовою. Очевидно, що для довільних $A, B \in \Sigma_1$ одержуємо $A \cdot B = B \cdot A$. Залишається довести, що факторизація групи G є точною.

Розглянемо дві підгрупи $\langle d_1\rangle$ і $T = \langle d_2\rangle \cdots \langle d_s\rangle \cdot \langle w\rangle$. Припустимо, що $\langle d_1\rangle \cap T \neq \neq \{1\}$. Якщо $|d_1| = 2$, то $d_1 \in T$, тому $d_1 = d_2^{\alpha_2} \cdots d_s^{\alpha_s} \cdot w^{\varepsilon}$, де $\varepsilon \in \{0, 1\}$. У випадку $\varepsilon = 0$ отримуємо суперечність з умовою для підгрупи D. Нехай $\varepsilon = 1$, тоді $w \in D$, що неможливо. Отже, $\langle d_1\rangle \cap T = \{1\}$. Аналогічно доводимо, що для довільного індексу $1 \leqslant m \leqslant s$ одержимо $\langle d_m\rangle \cap K = \{1\}$, де $K = \langle d_1\rangle \cdots \langle d_{m-1}\rangle \cdot \langle d_{m+1}\rangle \cdots \langle d_s\rangle \cdot \langle w\rangle$. Отже, доведено, що Σ_1 – базисна система циклічних підгруп для групи G.

2. Нехай тепер група G має базисну систему циклічних підгруп $\sigma = \{\langle g_1\rangle, ..., \langle g_n\rangle\}$. За умовою $G = D \times \langle w\rangle = \langle g_1\rangle \cdot \langle g_2\rangle \cdots \langle g_n\rangle$. Приймемо $g_i = d_i \cdot w_i$, де $d_i \in D$, $w_i \in \langle w\rangle$, $i = \overline{1, n}$. Розглянемо множину σ_1 усіх неодиничних підгруп $\langle d_i\rangle$ із множини $\{\langle d_1\rangle, ..., \langle d_n\rangle\}$. Очевидно, можна вважати, що $\sigma_1 = \{\langle d_1\rangle, \langle d_2\rangle, ..., \langle d_s\rangle\}$, де $1 \leqslant s \leqslant n$. Доведемо, що $\langle d_i\rangle \cdot \langle d_j\rangle = \langle d_j\rangle \cdot \langle d_i\rangle$. За умовою $\langle g_i\rangle \cdot \langle g_j\rangle = \langle g_j\rangle \cdot \langle g_i\rangle$, звідси $g_i \cdot g_j = g_j^{\alpha} \cdot g_i^{\gamma}$, для деяких чисел α, γ. Звідси $d_i \cdot w_i \cdot d_j \cdot w_j = d_j^{\alpha} \cdot w_j^{\alpha} \cdot d_i^{\gamma} \cdot w_i^{\gamma}$, тому $d_i \cdot d_j = d_j^{\alpha} \cdot d_i^{\gamma} \cdot w_i^{\gamma+1} \cdot w_j^{\alpha+1}$. Оскільки $D \cap \langle w\rangle = \{1\}$, то $w_i^{\gamma+1} \cdot w_j^{\alpha+1} \in D \cap \langle w\rangle = \{1\}$, тому отримали $d_i \cdot d_j = d_j^{\alpha} \cdot d_i^{\gamma}$. Отож, $\langle d_i\rangle \cdot \langle d_j\rangle \leqslant \langle d_j\rangle \cdot \langle d_i\rangle$. Звідси випливає рівність $\langle d_i\rangle \cdot \langle d_j\rangle = \langle d_j\rangle \cdot \langle d_i\rangle$.

Для довільного елемента $d \in D$ одержимо, що

$$d = g_1^{\gamma_1} \cdots g_n^{\gamma_n} = d_1^{\gamma_1} \cdots d_n^{\gamma_n} \cdot w_1^{\gamma_1} \cdots w_n^{\gamma_n} \in D,$$

тому $w_1^{\gamma_1} \cdots w_n^{\gamma_n} = 1$. Звідси випливає, що $d = d_1^{\gamma_1} \cdots d_n^{\gamma_n}$, отже, $D = \langle d_1\rangle \cdots \langle d_s\rangle$. Якщо $s = n$, то $|G| = |g_1| \cdots |g_n| = |d_1| \cdots |d_n| = |D|$, що неможливо. Отже, обов'язково $s < n$. Можна вважати, що $d_n = 1$, тому $g_n = w$. Отримаємо: $|G| = |g_1| \cdots |g_{n-1}| \cdot |w| = 2 \cdot |D|$, звідси $|g_1| \cdots |g_{n-1}| = |D| = |\langle g_1\rangle \cdots \langle g_s\rangle| = |d_1| \cdots |d_{n-1}| = |\langle d_1\rangle \cdots \langle d_s\rangle|$. Оскільки $s \leqslant n-1$, то $|d_1| \cdots |d_s| = |\langle d_1\rangle \cdots \langle d_s\rangle|$. Звідси випливає, що факторизація підгрупи $D = \langle d_1\rangle \cdots \langle d_s\rangle$ є точною. $\square$

Із доведення теореми 3 безпосередньо випливає наслідок.

Наслідок 1. *Нехай G – довільна скінченна 2-група і $G = D \times \langle w\rangle$, де $|w| = 2$. Тоді:*

1) якщо $\Sigma = \{\langle d_1\rangle, ..., \langle d_n\rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп для підгрупи D, то $\sigma = \Sigma \cup \{\langle w\rangle\}$ є базисною системою циклічних підгруп групи G;

2) нехай $\sigma_1 = \{\langle g_1\rangle, ..., \langle g_k\rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп групи G і $g_i = d_i w_i$, де $d_i \in D$, $w_i \in \langle w\rangle$, $i = \overline{1, k}$, тоді $\Sigma_1 = \{\langle b_1\rangle, ..., \langle b_s\rangle\}$, де $\langle b_j\rangle$ усі неодиничні підгрупи з системи $\{\langle d_1\rangle, ..., \langle d_k\rangle\}$ є базисною системою циклічних підгруп для підгрупи D.

2.2. Будова DM-груп експоненти 4.

Позначимо через L_4 клас усіх скінченних DM-груп експоненти 4. Як відомо [1], скінченна 2-група $G \in L_4$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

а) усяка циклічна підгрупа 4-го порядку $\langle g\rangle$ має доповнення в групі G;

б) усяка інволюція $f \in \Phi(G)$ є квадратом деякого елемента $z \in G$.

Зауважимо, що умови *а* і *б* незалежні. Наприклад, група 16-го порядку $G_3 = \langle a, b | a^4 = b^4, ab = ba^{-1} \rangle$ задовольняє умову *а* і не задовольняє умову *б*, оскільки $\langle a^2 b^2 \rangle$ – максимально циклічна в G і не має в G доповнення. З іншого боку, група кватерніонів 8-го порядку Q, очевидно, задовольняє умову *б* і не задовольняє умову *а*. Клас L_4 достатньо широкий. Зокрема, до класу L_4 належать такі групи:

1) усяка скінченна абелева 2-група R_2 експоненти 4;

2) група $R_3 = D \times B$, де B – абелева група експоненти $\leqslant 4$, а D – група діедра 8-го порядку;

3) група 32-го порядку

$$R_4 = \langle g, a, b || g| = |a| = 4, |b| = 2, [g, a] = g^2 a^2, [g, b] = g^2, [a, b] = a^2 \rangle;$$

4) група типу $R_5 = A \lambda \langle w \rangle$, де $A = R_2$, $|w| = 2$ і комутатор $[a, w] = a^2$, для всякого $a \in A$.

Правильна така теорема.

Теорема 4. *Клас груп L_4 замкнений стосовно прямих добутків скінченної кількості груп і не замкнений стосовно гомоморфних образів.*

Доведення. Розглянемо дві групи A, B із L_4 і доведемо, що група $G = A \times B$ є DM-групою. Нехай $\langle g \rangle$ довільна максимально циклічна підгрупа з G. За умовою $g = a_1 \cdot b_1$, де $a_1 \in A$ і $b_1 \in B$. Обов'язково $|a_1| = 4$ або $|b_1| = 4$. Можна вважати $|a_1| = 4$. У цьому випадку для підгрупи $\langle a_1 \rangle$ існує доповнення M у групі A. Очевидно, $M \cdot B$ – підгрупа групи G, яка не містить інволюцію a_1^2, тому $\langle a_1 \rangle \cap (M \cdot B) = \{1\}$. Звідси випливає, що $G = \langle a_1 \rangle \cdot (M \cdot B)$, тобто $M \cdot B$ – доповнення до $\langle a_1 \rangle$ у групі G, тому $G = \langle g \rangle \cdot (M \cdot B)$. Залишилось довести, що $\langle g \rangle \cap (M \cdot B) = \{1\}$. Справді, нехай $h \in \langle g \rangle \cap (M \cdot B)$ тоді $h = g^l = u \cdot b_2$, де $u \in M$, $b_2 \in B$, тому $(a_1 \cdot b_1)^l = u \cdot b_2$, отже, $a_1^l \cdot b_1^l = u \cdot b_2$. Отож, $u^{-1} \cdot a_1^l = b_2 \cdot b_1^{-l} \in A \cap B = \{1\}$ звідси випливає, що $u = a_1^l = 1$, тому $l \vdots 4$, і отже, $h = 1$.

Нехай інволюція $f \in \Phi(G)$. Одержимо $f = f_1 \cdot f_2$, де $f_1 \in \Phi(A)$, $f_2 \in \Phi(B)$, тому $f_1 = a^2$, $f_2 = b^2$, де $a \in A$, $b \in B$. Звідси $f = (ab)^2$. Отже, доведено, що G – DM-група.

Розглянемо групу 32-го порядку $G = \langle g \rangle \cdot \langle a \rangle \cdot \langle w \rangle$, де $|g| = |a| = 4$, $|w| = 2$, $[a, w] = 1$, $[g, a] = [g, w] = g^2$. Безпосередньо перевіряється, що G є DM-групою і для інволюції $z = g^2 \cdot a^2$ фактор-група $\overline{G} = G / \langle z \rangle$ не є DM-групою.

□

Безпосередньо з доведених теорем 2-4 випливають такі твердження.

Наслідок 2. *Нехай G – скінченна група експоненти 4 і $G = A \times B$. Для того, щоб G була DM-групою необхідно і достатньо, щоб підгрупи A, B були DM-групами.*

Наслідок 3. *Нехай G – скінченна DM-група експоненти 4. Якщо у групі G існує циклічна підгрупа $T = \langle t \rangle$ 4-го порядку, яка збігається зі своїм централізатором, то G – група діедра 8-го порядку.*

Теорема 5. *Усяка скінченна DM-група G експоненти 4, яка має базисну систему циклічних підгруп 4-го порядку, є абелевою групою.*

Доведення. Нехай G задовольняє умови теореми і $\Sigma = \{A_1, ..., A_k\}$ – базисна система циклічних підгруп $A_i = \langle a_i \rangle$ 4-го порядку. Доведемо, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \langle a_1^2 \rangle \cdots \langle a_k^2 \rangle$. Оскільки $\mathtt{exp}\ G = 4$ і для довільного елемента $f \neq 1$ із $\Phi(G)$ одержимо $f = z^2$, для деякого $z \in G$, то $f^2 = 1$. Отже, $\Phi(G)$ – елементарна абелева підгрупа групи G. Звідси випливає, що $M = \langle a_1^2 \rangle \cdots \langle a_k^2 \rangle$ нормальна підгрупа в G і на групі G виконується тотожність $[x^2, y^2] = 1$. Комутатор $[a_i, a_j] \in \langle a_i^2 \rangle \cdot \langle a_j^2 \rangle$, тому комутант $G' \leqslant M \lhd G$. Оскільки фактор-група $\overline{G} = G/M$ – елементарна абелева, то $M = \Phi(G) = \Phi$.

Із доведеного випливає, що $|\Phi(G)| = 2^k$ і $|G/\Phi(G)| = 2^k$, оскільки для групи G система елементів $\{a_1, ..., a_k\}$ – мінімальна система твірних. Розглянемо відображення $\psi : \overline{G} \to \Phi$, яке визначається так: для класу суміжності $g\Phi$ приймемо $\psi(g\Phi) = g^2$. Очевидно, що ψ не залежить від елемента $z \in g\Phi$. Справді, якщо $z = gf$, то $z^2 = g^2$. Із доведеного випливає, що ψ – взаємно однозначне відображення G/Φ на Φ. Звідси випливає, що з рівності $x^2 = y^2$ отримаємо $x\Phi = y\Phi$, для $x, y \in G$.

Припустимо тепер, що G – неабелева група. Існують елементи a_i, a_j такі, що комутатор $[a_i, a_j] \neq 1$. Одержуємо $[a_i, a_j] = b_i \cdot b_j$, де $b_i \in \langle a_i^2 \rangle$, $b_j \in \langle a_j^2 \rangle$. Крім того, $b_i \neq 1$ або $b_j \neq 1$. Розглянемо такі випадки.

Нехай $b_i = 1$, $b_j = a_j^2$. Тоді $(a_i a_j)^2 = a_i^2 a_j^2 \cdot [a_i, a_j] = a_i^2$. Звідси отримаємо $\psi(a_i a_j \Phi) = \psi(a_i \Phi)$, тому $a_i a_j \Phi = a_i \Phi$. Із останньої рівності випливає $a_j \in \Phi$, що неможливо, оскільки за умовою a_j – твірний елемент групи G. Аналогічно отримуємо суперечність і у випадку $b_i = a_i^2$, $b_j = 1$.

Нехай тепер $b_i = a_i^2$, $b_j = a_j^2$. Тоді $(a_i a_j)^2 = 1$, тому $a_i a_j \Phi = \Phi$, звідси $a_i a_j \in \Phi$, що неможливо, оскільки $a_i a_j \neq 1$.

Отож, доведено, що $[a_i, a_j] = 1$. Отже, доведено, що G – абелева група. □

Теорема 6. *Для довільної скінченної DM-групи G експоненти 4 виконуються такі твердження:*

1) якщо $|g| = 4$ і B – доповнення до підгрупи $\langle g \rangle$ у групі G, то $\Phi(G) = \langle g^2 \rangle \cdot (\Phi(G) \cap B)$ і підгрупа $\Phi(G) \cap B \lhd G$;

2) підгрупа Фраттіні $\Phi = \Phi(G)$ елементарна абелева і міститься в центрі групи G;

3) якщо група G – неабелева, то система $\Sigma = \{x^4 = 1, [x, y, z] = 1, [x^2, y] = 1\}$ задає базис тотожностей на групі G;

4) нехай $S = \{\langle a_1 \rangle, ..., \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, ..., \langle v_l \rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп, де $|a_i| = 4$, $|v_j| = 2$, тоді підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \langle a_1^2 \rangle \times ... \times \langle a_m^2 \rangle$. Крім того, для всякого $i \in \{1, ..., m\}$ підгрупа $M_i = \langle a_i \rangle \cdot E$, де $E = \langle v_1 \rangle \times ... \times \langle v_l \rangle$ є DM-групою.

Доведення. 1. За умовою $\mathtt{exp}\ G = 4$ і $|g| = 4$, тому $\langle g \rangle$ – максимально циклічна в G. Отже, існує доповнення B до підгрупи $\langle g \rangle$, тобто $G = \langle g \rangle B$, $\langle g \rangle \cap B = \{1\}$. За теоремою Віланда [4] (лема 1.26) підгрупа Фраттіні $\Phi = \Phi(G)$ факторизується стосовно розкладу $G = \langle g \rangle \cdot B$, тобто одержуємо рівність

$$\Phi = (\Phi \cap \langle g \rangle) \cdot (\Phi \cap B) = \langle g^2 \rangle \cdot (\Phi \cap B).$$

Доведемо, що підгрупа $\Phi \cap B \lhd G$. Нехай $M = \bigcap_{z \in G} z^{-1} B z$, тобто M – найбільша нормальна підгрупа з G, яка міститься в B. Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/M =$

$= \langle\overline{g}\rangle\cdot\overline{B}$, де $\langle\overline{g}\rangle\cap\overline{B} = \{\overline{1}\}$, $\overline{B} = B/M$ і $|\overline{g}| = |g|$. Якщо $\overline{G}$ – абелева, то комутант $G' \leqslant M \leqslant B$, тому $\Phi\cap B \lhd G$.

Припустимо, що $\overline{G}$ – неабелева група. Доведемо, що підгрупа $\langle\overline{g}\rangle$ збігається зі своїм централізатором у групі $\overline{G}$. Припустимо, що існує елемент $\overline{c} \neq \overline{1}$ із $\overline{B}$ такий, що $[\overline{g}, \overline{c}] = \overline{1}$, де $c \in B\backslash M$. Розглянемо підгрупу $B_1 = \langle b^{-1}cb | b \in B\rangle$. Очевидно, $M_1 = M\cdot B_1 \lhd G$. Оскільки $M < M_1 \leqslant B$, то отримали суперечність. Отож, $C_{\overline{G}}(\langle\overline{g}\rangle) = \langle\overline{g}\rangle$. Очевидно, $\mathtt{exp}\ \overline{G} = 4$, оскільки $|g| = |\overline{g}| = 4$. Одержимо центр $Z(\overline{G}) \leqslant \langle\overline{g}\rangle$. За наслідком 3, $\overline{G} = \langle\overline{g}\rangle\lambda\overline{B}$ – група діедра 8-го порядку. Припустимо, що інволюція $f \in (\Phi\cap B)\backslash M$, тоді для деякого елемента h 4-го порядку із G, отримаємо $f = h^2$, тому $\langle h\rangle\cap M = \{1\}$. Оскільки $|\overline{f}| = 2$, то $|\overline{h}| = 4$. Звідси випливає, що $\langle\overline{g}\rangle = \langle\overline{h}\rangle$, тому $\overline{f} \in \langle\overline{g}\rangle\cap\overline{B}$, що суперечить умові. Отож, $\Phi\cap B \leqslant M$, тому $\Phi\cap B = \Phi\cap M \lhd G$.

Доведемо тепер, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) \leqslant Z(G)$. Розглянемо елемент $f \in \Phi(G)\backslash Z(G)$. Існує такий елемент $u \in G$, що $[f, u] = v \neq 1$. Оскільки $v \in \Phi(G)$, то існує елемент 4-го порядку $g \in G$ такий, що $v = g^2$. Нехай $G = \langle g\rangle\cdot B$, $\langle g\rangle\cap B = \{1\}$. За доведеним, підгрупа $\Phi(G) = \langle v\rangle\times(B\cap\Phi)$, оскільки $\Phi = \Phi(G)$ елементарна абелева підгрупа та елемент v не належить B. Очевидно, $M = \langle v\rangle\cdot B$ – підгрупа групи G. Оскільки $\langle v\rangle\cap B = \{1\}$ і $v^2 = 1$, то $B \lhd M$. Для елементів f, u одержуємо: $f = v^\gamma\cdot b$, $u = g^\alpha\cdot t$, де $b \in \Phi\cap B$, $t \in B$. Тоді $v = [f, u] = [v^\gamma, t]\cdot w$, для деякого $w \in B\cap\Phi$, тому елемент $v \in B$, що суперечить умові $\langle g\rangle\cap B = \{1\}$.

Із доведеного випливає, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) \leqslant Z(G)$.

Оскільки, за доведеним, комутант $G' \leqslant \Phi(G) \leqslant Z(G)$, то на всякій скінченній DM-групі G виконуються тотожності з системи $\Sigma = \{x^4 = 1, [x, y, z] = 1, [x^2, y] = 1\}$. Нехай G – неабелева група і $w(x_1, ..., x_l) = 1$ – довільна тотожність, яка виконується на групі G. За відомою теоремою Х.Нейман ([8], теорема 12.12) тотожність $w(x_1, ..., x_l) = 1$ рівносильна системі тотожностей $\sigma = \{x^m = 1, t(x_1, ..., x_k) = 1\}$, де $m \geqslant 0$, а $t(x_1, ..., x_k)$ – деяке комутаторне слово ([8], с.16). Очевидно, з системи Σ випливають тотожності: $[x, y]^2 = 1$; $[xy, z] = [x, z][y, z]$, тому на групі G слово $t(x_1, ..., x_k)$ рівносильне 1 або $[x_1, x_2]$. Оскільки $G' \neq \{1\}$, то на G отримаємо рівність $t(x_1, ..., x_k) = 1$. Зрозуміло також, що показник $m \vdots 4$.

Отже, доведено, що Σ – базис тотожностей на групі G.

Доведення твердження 4. Нехай $S = \{\langle a_1\rangle, ..., \langle a_m\rangle, \langle v_1\rangle, ..., \langle v_l\rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп DM-групи G. За лемою 3.2 із [1] одержуємо $\Phi(G) = \langle a_1^2\rangle \times ... \times \langle a_m^2\rangle$. Доведемо тепер, що $M_i = \langle a_i\rangle E$ є DM-групою.

Очевидно, усяка підгрупа $\langle h\rangle$ 4-го порядку з M_i має доповнення у підгрупі M_i. Розглянемо інволюцію $f \in \Phi(M_i)$ і доведемо, що існує елемент $z \in M_i$ такий, що $f = z^2$. Оскільки $\Phi(M_i) \leqslant \Phi(G)$, то інволюція $f \in \Phi(G)\cap M_i \leqslant \langle a_i^2\rangle$. Отже, отримали $f = a_i^2$. $\square$

Зауваження 1. 1. Із теореми 6 випливає, що усяка скінченна неабелева DM-група G експоненти 4 породжує многовид груп γ, який визначається системою тотожностей $\Sigma = \{x^4 = 1, [x, y, z] = 1, [x^2, y] = 1\}$.

2. Надалі будемо вважати, що група $G \in \gamma\cap L_4$ і не містить центральних твірних елементів (теорема 4).

Правильне таке твердження.

Теорема 7. *Нехай скінченна група $G \in \gamma$ і $G = \langle g \rangle \lambda D$. Група G є DM-групою тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*

1) підгрупа D є DM-групою;

2) для всякого елемента $d \in D$ існує такий елемент $d_1 \in D$, що $d^2 = d_1^2$ і $[g, d_1] = 1$.

Доведення. Нехай скінченна група G є DM-групою і $G = \langle g \rangle \leftthreetimes D$. Якщо $|g| = 2$, то $G = \langle g \rangle \times D$. Звідси випливає, що D є DM-групою. Припустимо тепер, що $|g| = 4$. Очевидно, що всяка циклічна підгрупа $\langle d \rangle$ 4-го порядку з D має в D доповнення. Нехай інволюція $f \in \Phi(D) \leqslant \Phi(G)$. За умовою існує елемент $z \in G$ такий, що $z^2 = f$. Далі, нехай $z = g^\alpha \cdot d$, де $d \in D$. Звідси, $f = z^2 = g^{2\alpha} \cdot d^2 \cdot [g^\alpha, d]$, тому $f \cdot d^2 \in \langle g \rangle \cap D = 1$. Отже, $f = d^2$ і все доведено.

Розглянемо тепер елемент $d \in D$. Для інволюції $w = g^2 d^2$ існує елемент $z \in G$ такий, що $w = z^2$. Приймемо $z = g^\gamma d_1$, де $d_1 \in D$. Тоді $w = z^2 = (g^\gamma d_1)^2 = g^{2\gamma} d_1^2 [g^\gamma, d_1] = g^2 d^2$, звідси одержуємо рівності $d_1^2 = d^2$ і $g^2 = g^{2\gamma}[g^\gamma, d_1]$. Оскільки $g^2 \neq 1$, то γ – непарне, тому $[g, d_1] = 1$. Отож, необхідність умов *1* і *2* доведено.

Доведемо тепер обернене твердження. Нехай група G задовольняє умови *1* і *2*. Доведемо, що G є DM-групою. Розглянемо циклічну підгрупу 4-го порядку $\langle z \rangle$ із групи $G = \langle g \rangle \lambda D$. Отримали $z = g^\alpha d$, де $d \in D$. Якщо z^2 не належить D, то доповненням до $\langle z \rangle$ є підгрупа D.

Припустимо, що $z^2 \in D$. У цьому випадку $d \neq 1$ і $z^2 = g^{2\alpha} d^{2\alpha} [g^{2\alpha}, d]$, тому $z^2 = d^2$ і $|d| = 4$. За умовою до підгрупи $\langle d \rangle$ існує доповнення D_1 у підгрупі D. Оскільки $\langle g \rangle \lhd G$, то $M = \langle g \rangle D_1$ – підгрупа групи G і $|D| = |M|$. Якщо $z^2 = d^2 \in M$, то $d^2 = g^\varepsilon d_1$, де $d_1 \in D_1$. Звідси одержуємо $g^\varepsilon = 1$ і $d^2 = d_1 \in D_1$, що неможливо. Отже, $\langle z \rangle \cap M = \{1\}$, тому $G = \langle z \rangle M$. Отже, доведено, що для $\langle z \rangle$ існує доповнення M у групі G.

Розглянемо тепер інволюцію $f \in \Phi(G)$. За умовою $f = g^\gamma d$, де $d \in D$. Якщо γ – непарне, то $g \in D \cdot \Phi(G) = G$, тому $D = G$, що неможливо. Отож, доведено $\gamma \in \{0, 2\}$. Якщо $\gamma = 0$, то $f = d \in D$. За умовою D є DM-групою, отже, $f = h^2$ для деякого $h \in D$.

Припустимо, що $\gamma = 2$, тобто $f = g^2 d$. Оскільки елемент $d \in \Phi(G)$, то $d = y_1^2 \cdots y_k^2$, для деяких $y_i \in G$, $i = \overline{1,k}$. За умовою $y_i = g_i \theta_i$, де $g_i \in \langle g \rangle$, $\theta_i \in D$. Звідси $d = (g_1\theta_1)^2 \cdots (g_k\theta_k)^2 = g^m \theta_1^2 \theta_2^2 \cdots \theta_k^2$, для деякого $m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Оскільки $\langle g \rangle \cap D = \{1\}$, то $g^m = 1$, тому $d = \theta_1^2 \cdots \theta_k^2 = h^2$, де $h \in D$. Отримали інволюцію $f = g^2 h^2$. За умовою існує елемент $d_1 \in D$ такий, що $h^2 = d_1^2$, $[g, d_1] = 1$. Звідси отримаємо $f = g^2 d_1^2 = (g d_1)^2$. Отже, доведено, що G є DM-групою. □

Наслідок 4. *Усяка скінченна група $G \in \gamma$ вигляду $G = \langle g \rangle \lambda E$, де $|g| = 4$, а E – елементарна абелева, є DM-групою.*

Теорема 8. *Для того, щоб скінченна неабелева група експоненти 4 була DM-групою, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:*

1) для групи G існує базисна система циклічних підгруп $S = \{\langle a_1 \rangle, ..., \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, ..., \langle v_l \rangle\}$, де $|a_i| = 4$, $|v_j| = 2$, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., l\}$;

2) для довільних елементів $b_1, ..., b_s \in \{a_1, ..., a_m\}$ існує елемент $v \in E = \langle v_1 \rangle \times \cdots \times \langle v_l \rangle$ такий, що $b_1^2 \cdots b_s^2 = (b_1 \cdots b_s \cdot v)^2$;

3) група $G \in \gamma$.

Доведення. Необхідність. Нехай G – довільна скінченна група експоненти 4 і $|G| = 2^n$. За теоремою 6, група G належить многовиду γ. Існування базисної системи циклічних підгруп для групи G доведено в [1] (теорема 4.1). За умовою група G – неабелева. Зрозуміло, що у цьому випадку базисна система S містить циклічні підгрупи $\langle a_i \rangle$ 4-го порядку та підгрупи $\langle v_i \rangle$ 2-го порядку. Розглянемо випадки.

а) Для $n = 3; 4$ або 5 твердження перевіряється безпосередньо. Справді, якщо $n = 3$ або 4, то група $G = D_8$ або $G = D_8 \times \langle u \rangle$, де $u^2 = 1$, D_8 – група діедра 8-го порядку. Оскільки для такої групи G підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \{1, a^2\}$, то твердження очевидне.

Нехай $n = 5$, тобто G – неабелева група 32-го порядку. У цьому випадку група $G \in \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, де

$G_1 = D_8 \times \langle b \rangle$, $|b| = 4$;

$G_2 = (\langle g \rangle \times \langle a \rangle)\lambda\langle u \rangle$, де $|g| = |a| = 4$, $|u| = 2$, $[g, u] = g^2$, $[a, u] = a^2$;

$G_3 = D_8 \times A_4^*$, де A_4^* – група Клейна 4-го порядку;

$G_4 = R = \langle g \rangle\langle a \rangle\langle v \rangle$, де $|g| = |a| = 4$, $|v| = 2$, $[g, a] = g^2a^2$, $[g, v] = g^2$, $[a, v] = a^2$.

Для груп G_1, G_2 і G_3 усе очевидно.

Нехай $G = G_4 = R$. Підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = \{1, g^2, a^2, g^2a^2\}$. Одержуємо, що $g^2a^2 = (gav)^2$, тому для $n = 5$ твердження доведено.

б) Припустимо тепер, що твердження правильне для фіксованого числа $n \geqslant 5$. Розглянемо довільну неабелеву групу G порядку $|G| = 2^{n+1}$ і нехай $S = \{\langle a_1 \rangle, ..., \langle a_m \rangle, \langle v_1 \rangle, ..., \langle v_l \rangle\}$, де $|a_i| = 4$, $|v_j| = 2$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, l}$.

Приймемо $\langle w \rangle = \langle a_m^2 \rangle$ і розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\langle w \rangle = \langle \overline{a_1}, ..., \overline{a_{m-1}}, \overline{a_m}, \overline{v_1}, ..., \overline{v_l} \rangle$, де $|\overline{a_1}| = ... = |\overline{a_{m-1}}| = 4$; $|\overline{a_m}| = |\overline{v_1}| = ... = |\overline{v_l}| = 2$. Оскільки $\overline{G}$ є DM-група і $|G| = 2^n$, то твердження виконується для групи $\overline{G}$.

Розглянемо інволюцію $f = b_1 \cdots b_s$, де $1 \leqslant s < m$, $b_1, ..., b_s \in \{a_1, ..., a_{m-1}\}$, тоді $\overline{b_1}, ..., \overline{b_s} \in \{\overline{a_1}, ..., \overline{a_{m-1}}\}$ і $\overline{b_1}^2 \cdots \overline{b_s}^2 = (\overline{b_1} \cdots \overline{b_s}\overline{v})^2$, звідси отримаємо рівність $b_1^2 \cdots b_s^2 = (b_1 \cdots b_s v)^2 w^\gamma$, де $\gamma \in \{0, 1\}$ і $v \in E$. Якщо $\gamma = 1$, то інволюція w міститься у підгрупі $D_m = \langle a_1 \rangle \cdots \langle a_{m-1} \rangle \cdot E$, що суперечить умові. Отож, $\gamma = 0$, тому одержуємо необхідну рівність $b_1^2 \cdots b_s^2 = (b_1 \cdots b_s v)^2$.

Нехай тепер $s = m$. У цьому випадку отримаємо, що $f = a_1^2 \cdots a_m^2$. Оскільки G є DM-групою, то $f = (a_1 \cdots a_m v)^2$, де $v \in E$ і все доведено. Отже, необхідність доведено.

Достатність. За умовою для скінченної неабелевої групи G справджуються твердження *1*, *2* і *3*. Оскільки $G \in \gamma$, то підгрупа $M = \langle a_1^2 \rangle \times ... \times \langle a_m^2 \rangle \leqslant Z(G)$ і фактор-група G/M – елементарна абелева. Звідси випливає, що підгрупа Фраттіні $\Phi(G) = M$.

Розглянемо циклічну підгрупу $\langle z \rangle$ 4-го порядку з групи G. Тоді $z^2 \in \Phi(G)$ і нехай $z^2 = b_1^2 \cdots b_s^2$, для деяких $b_1, ..., b_s \in \{a_1, ..., a_m\}$. Можна вважати, що $b_1 = a_1$. Приймемо $D_1 = \langle a_2 \rangle \cdots \langle a_m \rangle \cdot E$. Тоді $\langle z \rangle \cap D_1 = \{1\}$ і $\langle z \rangle D_1 = G$, тобто D_1 – доповнення до підгрупи $\langle z \rangle$. Для довільної інволюції $f \in \Phi(G)$ одержуємо $f = d_1^2 \cdots d_r^2$, де $d_1, ..., d_r \in \{a_1, ..., a_m\}$. За умовою *2* існує елемент $v \in E = \langle v_1 \rangle \times ... \times \langle v_l \rangle$ такий, що $f = (d_1 \cdots d_r \cdot v)^2$. Отож, доведено, що G – DM-група. □

Наслідок 5. *Нехай G – скінченна DM-група експоненти 4 і $S = \{\langle a_1\rangle, ..., \langle a_m\rangle, \langle v_1\rangle, ..., \langle v_l\rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп групи G. Для усякого $i \in \{1, .., m\}$ підгрупа $G_i = \langle a_i\rangle \cdots \langle a_m\rangle \cdot E$ є DM-групою.*

Наслідок 6. *Нехай G – скінченна DM-група експоненти 4 і $S = \{\langle a_1\rangle, ..., \langle a_m\rangle, \langle v_1\rangle, ..., \langle v_l\rangle\}$ – базисна система циклічних підгруп групи G. Розглянемо довільну інволюцію $v \in E$ і нехай $[a_1, v] = 1$. Тоді для $a_1^* = a_1 v$ система $S_1 = \{\langle a_1^*\rangle, \langle a_2\rangle, ..., \langle a_m\rangle, E\}$ – є базисною системою циклічних підгруп.*

Сформулюємо проблеми подальших досліджень.

Проблема 1. *Знайти необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G експоненти 8 була DM-групою.*

Проблема 2. *Нехай G – мінімальна неабелева DM-група експоненти 8. Знайти базис тотожностей групи G.*

3. Висновки. 1. Доведено твердження, які стосуються будови скінченних DM-груп довільної експоненти (теореми 1, 2, 3).

2. Проведено детальне дослідження скінченних DM-груп експоненти 4 (теореми 6, 7). Знайдено необхідні та достатні умови того, щоб скінченна група G експоненти 4 була DM-групою.

Список використаної літератури

1. *Крекнин В.А.* Конечные 2-группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами / *В.А. Крекнин, В.Ф. Малик, И.И. Мельник, О.К. Шиловская* – Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1992.
2. *Крекнин В.А.* Достаточное условие дополняемости максимальных циклических подгрупп в конечной группе / *В.А. Крекнин, И.И. Мельник* // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №11. – С. 1572-1575.
3. *Крекнин В.А.* Конечные группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами / *В.А. Крекнин, И.И. Мельник* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, №7. – С. 918-926.
4. *Черников Н.С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп / *Н.С. Черников* – К.: Наук. думка, 1987.
5. *Savochkina T.* Frattini series and involutions of finite L-group / *T. Savochkina* 7-th International algebraic conference in Ukraine. Kharkov. – 2009. – P. 122.
6. *Aschbacher M.* Finite group theory / *M. Aschbacher* Camdridge University Press, 2000.
7. *Савочкіна Т.І.* Про існування максимального нормалізатора у періодичній FC-групі / *Т.І. Савочкіна* // Вісн. Харк. нац. ун-ту. ім. В.Н. Каразіна. Сер. Мат., прикл. мат. і мех. – 2007. – Т. 790. – С. 125-131.
8. *Нейман Х.* Многообразия групп / *Х. Нейман* – М.: Мир, 1969.

Стаття: надійшла до редакції 18.11.2011
доопрацьована 24.05.2012
прийнята до друку 12.12.2012

STRUCTURAL PROPERTIES OF FINITE DM-GROUPS

Tetiana SAVOCHKINA

G.S. Skovoroda National Pedagogical University of Kharkiv,
Blukhera Str., 2, Kharkiv, 61000
e-mail: savochkinat@rambler.ru

We investigate finite groups with complemented maximal cyclic subgroups (DM-groups). We have established the structural properties of such groups. We have a complete characterization of finite DM-groups of exponent 4.

Key words: finite 2-groups, supplemented by group, maximum cyclic subgroups.

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ DM-ГРУПП

Татьяна САВОЧКИНА

Харьковский национальный педагогический университет им. Г.С. Сковороды,
ул. Блюхера, 2, Харьков, 61000
e-mail: savochkinat@rambler.ru

Исследовано конечные 2-группы, у которых всякая максимальная циклическая подгруппа имеет дополнение (DM-группы). Установлено ряд структурных свойств таких групп. Получено полную характеристику конечных DM-групп экспоненты 4.

Ключевые слова: конечные 2-группы, дополняемые подгруппы, максимально циклические подгруппы.