ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 124–131
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 124–131

УДК 517.53+519.213

ПРО МОДИФІКОВАНІ УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ТА ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ ЙМОВІРНІСНИХ ЗАКОНІВ

Любов КУЛЯВЕЦЬ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com, m_m_sheremeta@list.ru

Для цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k exp\{s\lambda_k\}$ у термінах модифікованих узагальнених порядків доведено зв'язок між зростанням $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і спаданням a_n. Отримані результати застосовано до вивчення зростання цілих характеристичних функцій ймовірнісних законів.

Ключові слова: ряд Діріхле, ймовірнісний закон, характеристична функція, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай (λ_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а

$$F(s) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

– цілий ряд Діріхле. Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in R\}$, і нехай

$$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| exp\{\sigma\lambda_n\} \ : \ n \geqslant 0\}$$

– максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – його центральний індекс.

Через L позначимо клас неперервних на $(-\infty; +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) \equiv \alpha(x_0) > 0$ для $x \leqslant x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ для $x_0 \leqslant x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$, і $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{ПЗ}} \subset L^0$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком цілого ряду Діріхле (1) називається [2] величина $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma,F))}{\beta(\sigma)}$. В [2] доведено таке: якщо

$$\ln k = o\left(\lambda_k \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))\right), \quad k \to \infty, \tag{2}$$

для кожного $c \in (0; +\infty)$, а функції $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$ такі, що $x\frac{d}{dx}\beta^{-1}(c\alpha(x)) = O(1)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0; +\infty)$, то $\varrho_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_k|}\right)}$.

Умову $x\frac{d}{dx}\beta^{-1}(c\alpha(x)) = O(1), x \to +\infty$ у цьому твердженні можна знати [3], якщо модифікувати означення узагальненого порядку.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ модифікованими узагальненими порядком і нижнім порядком називаються, відповідно, величини $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right)$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = \underline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln M(\sigma,F)}{\sigma}\right)$.

В [3] доведено таке: якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то за умови (2) правильна рівність

$$\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = p_{\alpha\beta}[F], \quad p_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)}. \tag{3}$$

Мета нашої праці – узагальнити наведений результат з [3].

Теорема 1. *Нехай показники цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову (2) і або $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ та $\beta \in L^0$, або $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ та $\alpha \in L^0$. Тоді правильна рівність (3). Якщо, крім того, $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < \infty$, $\varkappa_k[F] = \frac{\ln|a_k| - \ln|a_{k+1}|}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \nearrow +\infty \quad (k \to \infty)$ і $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))} \to 1$, при $k \longrightarrow \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$, то*

$$\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = q_{\alpha\beta}[F], \quad q_{\alpha\beta}[F] = \underline{\lim_{k\longrightarrow\infty}} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\beta(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_n|})}. \tag{4}$$

Теорему 1 буде застосовано до дослідження зростання одного класу цілих характеристичних функцій ймовірнісних законів.

2. Доведення теореми 1. Приймемо

$$\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\sigma}\right), \qquad \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = \underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\sigma}\right)$$

і припустимо, що $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] < +\infty$. Тоді для кожного $\varrho > \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$, всіх $\sigma \geqslant \sigma_0(\varrho)$ і всіх $k \geqslant 0$ отримаємо $\ln|a_k| + \sigma\lambda_k \leqslant \ln\mu(\sigma) \leqslant \sigma\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$, тобто $\ln|a_k| \leqslant (\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)) - \lambda_k)\sigma$. Виберемо $\sigma = \sigma_k = \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(\delta\lambda_k)\right)$, де $\delta \in (0;1)$ – довільне число. Тоді $\sigma_k \geqslant \sigma_0(\varrho)$ для $k \geqslant k_0(\varrho,\delta)$, тому $\ln|a_k| \leqslant -(1-\delta)\lambda_k\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\delta\lambda_k)\right)$, тобто

$$\frac{\alpha(\delta\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_k|}\right)} \leqslant \varrho. \tag{5}$$

Оскільки для цілих рядів Діріхле $\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_n|} \to +\infty \quad (k \to \infty)$, то з (5) отримаємо

$$p_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\alpha(\delta\lambda_k)}{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)} \frac{\beta\left(\frac{1}{(1-\delta)\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\alpha(\delta\lambda_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \varrho \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\beta\left(\frac{x}{1-\delta}\right)}{\beta(x)} \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)}. \tag{6}$$

Якщо $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\alpha \in L^0$, то з (6) отримаємо $p_{\alpha\beta}[F] \leqslant \varrho \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\alpha(\delta x)}$. Але в [4] доведено таке: якщо $\alpha \in L^0$, то $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\alpha((1+\varepsilon)x)}{\alpha(x)} = A(\varepsilon) \searrow 1$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Тому, спрямовуючи $\delta \uparrow 1$, з останньої нерівності з огляду на довільність $\varrho > \varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ випливає, що

$$\varkappa_{\alpha\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu]. \tag{7}$$

Якщо ж $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то з (6) подібно випливає нерівність $p_{\alpha\beta}[F] \leqslant \leqslant \varrho \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\beta((1+\delta)x)}{\beta(x)}$, і, спрямовуючи тепер $\delta \downarrow 0$, знову приходимо до нерівності (7), яка є очевидною, коли $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = +\infty$.

Доведення протилежної до (7) нерівності проведемо від супротивного. Припустимо, що $\varkappa_{\alpha\beta}[F] < \rho_{\alpha\beta}[\ln\mu]$. Тоді для кожного $\varrho \in (\varkappa_{\alpha\beta}[F]; \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu])$ і всіх $k \geqslant k_0(\varrho)$ одержуємо $\ln|a_k| \leqslant -\lambda_k\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_k)\right)$, тобто

$$\ln\mu(\sigma,F) \leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant k_0(\varrho)} \ln|a_n| + \sigma\lambda_k;\quad \max_{k\geqslant k_0(\varrho)} \lambda_k\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_k)\right)\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\lambda_k\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_k)\right)\right)\ :\ k \geqslant 0\right\} + O(\sigma), \quad \sigma \to +\infty.$$

Оскільки $\ln\mu(\sigma,F) \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$, то звідси випливає, що

$$\sigma \geqslant \beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\right)$$

для $\sigma \geqslant \sigma_0$, тобто $\lambda_{\nu(\sigma,F)} \leqslant \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))$ для $\sigma \geqslant \sigma_0$, і отже, [5, с. 17]

$$\ln\mu(\sigma,F) = \ln\mu(\sigma_0,F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t,F)}dt \leqslant \ln\mu(\sigma_0,F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\varrho\beta(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \ln\mu(\sigma_0,F) + \alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma))(\sigma-\sigma_0) = (1+o(1))\alpha^{-1}(\varrho\beta(\sigma)), \quad \sigma \to +\infty.$$

Звідси за умови $\alpha \in L^0$ (і тим паче $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$) випливає, що $\varrho_{\alpha\beta}[\ln\mu] < \varrho$, що неможливо. Отже, правильна рівність $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = \varkappa_{\alpha\beta}[F]$ і нам залишилось довести, що $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] = \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$.

За нерівністю Коші $\mu(\sigma,F) \leqslant M(\sigma,F)$ отримаємо $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \leqslant \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F]$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \leqslant \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$. Якщо $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] < +\infty$, то для кожного $\varrho > \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ і всіх $k \geqslant k_0(\varrho)$ правильна оцінка $\ln|a_k| \leqslant -\lambda_k\beta^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\alpha(\lambda_k)\right)$, а з огляду на умову (2) $\ln k = o(\ln|a_k|)$ при $k \to \infty$. Тому [5, с. 23] $M(\sigma,F) \leqslant A_0(\varepsilon)\mu\left(\frac{\sigma}{1-\varepsilon}, F\right)$ для кожного $\varepsilon \in (0;1)$, де $A_0(\varepsilon)$ – додатна стала, звідки випливає, що $\ln M(\sigma,F) \leqslant (1+o(1))\ln\mu\left((1+o(1))\sigma,F\right)$ при $\sigma \to +\infty$. Тому, якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ і $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$. Якщо $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = +\infty$, то нерівність $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] \leqslant \overline{\varrho}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$ є очевидною, і першу частину теореми 1 доведено.

Доведемо другу частину. Оскільки за умови $\overline{\varrho}_{\alpha\beta}[F] < +\infty$ правильна рівність $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[F] = \overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu]$, то залишилось довести, що $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = q_{\alpha\beta}[F]$.

Припустимо спочатку, що $q_{\alpha\beta}[F] < +\infty$. Тоді існують число $q > q_{\alpha\beta}[F]$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (k_j) натуральних чисел такі, що

$$\ln|a_{k_j}| \leqslant -\lambda_{k_j}\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_{k_j})\right).$$

Оскільки $\varkappa_k[F] \nearrow +\infty \quad (k \to \infty)$, то [5, с. 19] $\mu(\varkappa_k(F), F) = |a_k| exp\{\lambda_k \varkappa_k(F)\}$ для всіх k.

Тому для $\sigma_j = \mu(\varkappa_{k_j}(F), F)$ отримаємо

$$\ln\mu(\sigma_j, F) = \ln|a_{k_j}| + \lambda_{k_j}\sigma_j \leqslant -\lambda_{k_j}\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_{k_j})\right) + \sigma_j\lambda_{k_j} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\lambda_k\left(\sigma_j - \beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right)\right) \,:\, k \geqslant 0\right\}.$$

Звідси, застосовуючи отриману у доведенні першої частини теореми оцінку цього максимуму, одержуємо асимптотичну нерівність $\ln\mu(\sigma_j, F) \leqslant (1+o(1))\alpha^{-1}(q\beta(\sigma_j))\sigma_j$ при $j \to \infty$. З цієї оцінки випливає нерівність $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \leqslant q_{\alpha\beta}[F]$, яка є очевидною, якщо $\overline{q}_{\alpha\beta}[F] = +\infty$.

Для доведення протилежної нерівності припустимо, що $q_{\alpha\beta}[F] > 0$. Тоді для кожного $q \in (0; q_{\alpha\beta}[F])$ і всіх $k \geqslant k_0(q)$ одержуємо $\ln|a_k| \geqslant -\lambda_k\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right)$, тобто $\ln\mu(\sigma, F) \geqslant \lambda_k\left(\sigma - \beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right)\right)$ для всіх σ і $k \geqslant k_0(q)$. Виберемо $\sigma_k = \beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right)(1+\delta)$, де $\delta > 0$ – довільне число. Тоді

$$\ln\mu(\sigma_k, F) \geqslant \lambda_k\delta\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right), \quad k \geqslant k_0(q). \tag{7}$$

Оскільки $\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{k+1})) = \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_k))(1+o(1))$ при $k \to \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$, то $\sigma_k/\sigma_{k+1} \to 1$ при $k \to \infty$. Зауважимо також, що $\alpha(\lambda_{k+1})/\alpha(\lambda_k) \to 1$ при $k \to \infty$. Справді, якщо $\alpha(\lambda_{k_j}) \leqslant (1-\xi)\alpha(\lambda_{k_j+1})$ для деякого $\xi \in (0;1)$ і всіх j, то

$$\frac{\beta^{-1}\left(c\alpha(\lambda_{k_j})\right)}{\beta^{-1}\left(c\alpha(\lambda_{k_j+1})\right)} \leqslant \frac{\beta^{-1}\left(c(1-\xi)\alpha(\lambda_{k_j+1})\right)}{\beta^{-1}\left(c\alpha(\lambda_{k_j+1})\right)} = \frac{\beta^{-1}((1-\xi)t_j)}{\beta^{-1}(t_j)} = B(t_j, \xi),$$

де $t_j = c\alpha(\lambda_{k_j+1})$. Тому треба довести, що $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} B(t,\xi) < 1$. Цю нерівність будемо доводити від супротивного. Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} B(t,\xi) = 1$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ і деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (t_n) отримаємо $\beta^{-1}((1-\xi)t_n) \geqslant$ $\geqslant (1-\varepsilon)\beta^{-1}(t_n)$, тобто за умови $\beta \in L^0$

$$\frac{1}{(1-\xi)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\beta(\beta^{-1}(t_n))}{\beta((1-\varepsilon)\beta^{-1}(t_n))} = A(\varepsilon) \searrow 1, \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

що неможливо, тобто $\alpha(\lambda_{n+1}) \sim \alpha(\lambda_n)$ при $k \to \infty$.

Нехай тепер $\sigma_k \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{k+1}$. Тоді з огляду на (7), якщо $\alpha \in L^0$, то

$$\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = \underline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma)}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma, F)}{\sigma}\right) \geqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\beta(\sigma_{k+1})}\alpha\left(\frac{\ln\mu(\sigma_k, F)}{\sigma_{k+1}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(\frac{\lambda_k \delta\left(\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right)\right)}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_k)\right)(1+\delta)}\right)}{\beta\left((1+\delta)\beta^{-1}\left(\frac{1}{q}\alpha(\lambda_{k+1})\right)\right)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(\frac{\delta}{1+\delta}\lambda_k\right)}{\frac{1}{q}\alpha(\lambda_{k+1})A(\delta)} = \frac{q}{A(\delta)} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(\frac{\delta\lambda_k}{1+\delta}\right)}{\alpha(\lambda_{k+1})}, \quad (8)$$

де $A(\delta) \equiv 1$, коли $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$ і $A(\delta) \searrow 1$, коли $\beta \in L^0$.

Якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L_0$, то з (8) одержимо

$$\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \geqslant \frac{q}{A(\delta)} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_k)}{\alpha(\lambda_{k+1})} = \frac{q}{A(\delta)},$$

звідки випливає нерівність $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \geqslant q_{\alpha\beta}[F]$. Якщо ж $\alpha \in L_0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, то $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \geqslant q \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(\frac{\delta}{1+\delta}\lambda_k\right)}{\alpha(\lambda_k)}$. Оскільки $\frac{\delta}{1+\delta} \to 1$ при $\delta \to +\infty$, то звідси знову отримуємо нерівність $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] \geqslant q_{\alpha\beta}[F]$, яка є очевидною, коли $q_{\alpha\beta}[F] = 0$. Отже, $\overline{\lambda}_{\alpha\beta}[\ln\mu] = q_{\alpha\beta}[F]$ і теорему 1 доведено повністю.

3. Застосування. Неспадна неперервна зліва на $(-\infty,\infty)$ функція F називається [6, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} F(-x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, а характеристичною функцією закону F називається [6, с. 12] функція

$$\varphi(z) = \varphi(z;F) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x), \quad z \in (-\infty,\infty). \quad (9)$$

Якщо функція φ допускає аналітичне продовження на всю комплексну площину, то вона називається цілою характеристичною функцією. Відомо [6, с. 37-38], що для того, щоб характеристична функція була цілою, необхідно і достатньо, щоб $W_F(x) = O\left(e^{-rx}\right)$ при $x \to +\infty$ для кожного $r > 0$, де $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), \quad x > 0$. Приймемо $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$. Тоді [6, с. 43] $M_\varphi(r) = \max\{|\varphi(ir)|, |\varphi(-ir)|\}$. Н.І. Яковлєва [7-8], узагальнюючи формулу Рамачандрана [9], для знаходження порядку функції φ довела таке: якщо $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, то для того, щоб $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M_\varphi(r)\right)}{\beta(r)} = \gamma > 0$, необхідно і достатньо, щоб $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \frac{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}{\alpha(x)} = \frac{1}{\gamma}$. Використовуючи теорему 1, дослідимо зростання цілої характеристичної функції зрізаного зліва східчастого ймовірнісного закону. Ймовірнісний закон F називається зрізаним зліва [10, с. 27], якщо $F(x) \equiv 0$ для всіх $x \leqslant 0$ і називається східчастим або дискретним, [10, с. 26], якщо $F(x) = \sum\limits_n p_n E(x - x_n)$, де $E(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$, а $\{x_n\}$ – зліченна множина дійсних чисел, $p_n > 0$ і $\sum\limits_n p_n = 1$. Припустимо, що послідовність $X = (x_k)$ така, що $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n \to +\infty$, а ймовірносний закон F задовольняє умови $F(x) \equiv 0$ для $x \leqslant 0$, $F(x) = F(x_{k+1})$ для $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ і $F(x_k) \uparrow 1$ при $k \to \infty$. Клас таких ймовірносних законів позначимо через $\prod(X)$. Якщо $F \in \prod(X)$, то

$$\varphi(z) = \int\limits_0^{+\infty} e^{izx} dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{izx_k}(F(x_k+0) - F(x_k)) = \sum_{k=0}^{\infty}(F(x_{k+1}) - F(x_k))e^{izx_k}. \quad (10)$$

Зауважимо, що $W_F(x_k) = 1 - F(x_k)$ і

$$W_F(x) = 1 - F(x) = 1 - F(x_{k+1}) = W_F(x_{k+1})$$

для $x_k < x \leqslant x_{k+1}$. Для того, щоб φ була цілою функцією, необхідно і достатньо, щоб $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)} = +\infty$, а

$$\min\left\{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)} : x_k < x \leqslant x_{k+1}\right\} = \frac{1}{x_{k+1}}\ln\frac{1}{W_F(x_{k+1})},$$

то для того, щоб φ була цілою характеристичною функцією ймовірносного закону $F \in \prod(X)$, необхідно і достатньо, щоб $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k}\ln\frac{1}{W_F(x_k)} = +\infty$. Звідси випливає, що $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k}\ln\frac{1}{W_F(x_k)-W_F(x_{k+1})} = +\infty$, тобто $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k}\ln\frac{1}{F(x_{k+1})-F(x_k)} = +\infty$. Якщо $a_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k}\ln\frac{1}{a_k} = +\infty$. Оскільки з (10) випливає, що $|\varphi(ir)| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{-rx_k}$ і $|\varphi(\text{-}ir)| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{rx_k}$, то $M_\varphi(r) = F(r) =: \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e^{rx_k}$. Застосовуючи до цього ряду Діріхле теорему 1, приходимо до теореми 2.

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ та $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ та $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, а φ – ціла характеристична функція ймовірносного закону $F \in \prod(X)$, де послідовність $X = (x_k)$ задовольняє умову $\ln k = o(x_k\beta^{-1}c\alpha(x_k)))$ при $k \to \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$. Тоді*

$$\varrho_{\alpha\beta}[\varphi] =: \varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{\beta(r)}\alpha\left(\frac{\ln M_\varphi(r)}{r}\right) = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\alpha(x_k)}{\beta\left(\frac{1}{x_k}\ln\frac{1}{F(x_{k+1})-F(x_k)}\right)}.$$

Якщо, крім того, $\varrho_{\alpha\beta}[\varphi] < +\infty$, $\frac{1}{x_{k+1}-x_n}\ln\frac{F(x_{n+1})-F(x_n)}{F(x_{k+2})-F(x_{k+1})} \nearrow +\infty \quad (n \to +\infty)$ і $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x_{k+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(x_k))} \to 1$, при $k \longrightarrow \infty$ для будь-якого $c \in (0; +\infty)$, то

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{\beta(r)}\alpha\left(\frac{\ln M_\varphi(r)}{r}\right) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{\alpha(x_n)}{\beta\left(\frac{1}{x_n}\ln\frac{1}{F(x_{n+1})-F(x_n)}\right)}.$$

Список використаної літератури

1. *Шеремета М.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / *М. Шеремета* // Изв. вузов. Матем. – 1967. – №2. – С. 100-108.
2. *Пьяныло Я.Д.* О росте целых функций представленных рядами Дирихле / *Я.Д. Пьяныло, М.М. Шеремета* // Изв. вузов. Матем. – 1975. – №10. – С. 91-93.
3. *Зеліско М.М.* Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування / *М.М. Зеліско* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 143-147.
4. *Sheremeta M.M.* On two classes of positive functions and belonding to them of main characterivhes of entire functions / *M.M. Sheremeta* // Mat. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 74-83.
5. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле / *М.М. Шеремета* – К.: ІСДО, 1993.
6. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, Н.В. Островський* – М.: Наука, 1972.

7. *Яковлева Н.И.* О росте целых характерестических функций вероятносных законов / *Н.И. Яковлева* // Теория функций и их преложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43-49.
8. *Яковлева Н.И.* О росте целых характерестических функций вероятносных законов / *Н.И. Яковлева* // Вопросы математической физики и функц. анализа. – Киев: Наукова думка, 1976.
9. *Ramacxhandran B.* On the order and the type of entire characteristic functions / *B. Ramacxhandran* // Ann. Math. – 1962. – Vol. 33, №4. – P. 1238-1255.
10. *Рамачандран Б.* Теория характеристических функций / *Б. Рамачандран* – М.: Наука, 1975.

Стаття: надійшла до редакції 27.07.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ON MODIFIED GENERALIZED ORDERS OF ENTIRE DIRICHLET AND CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PROBABILITY LAWS

Lyubov KULYAVEC', Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ljubasik26@gmail.com, m_ m_ sheremeta@list.ru

For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k exp\{s\lambda_k\}$ a connection between the growth of $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and the decrease of a_n is established in the terms of modified generalized orders. The obtained results are applied to the investigation of the growth of entire characteristic functions of probable laws.

Key words: Dirichlet series, probable law, characteristic function, generalized order.

О МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОБОБЩЁННЫХ ПОРЯДКАХ ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Любовь КУЛЯВЕЦ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000,
e-mail: ljubasik26@gmail.com, m_m_sheremeta@list.ru

Для целого ряда Дирихле $F(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k exp\{s\lambda_k\}$ в терминах модифицированных обобщённых порядков установлено связь между ростом $M(\sigma) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ и убыванием a_n. Полученные результаты применены к изучению роста целых характеристических функций вероятностных законов.

Ключевые слова: ряд Дирихле, вероятностный закон, характеристическая функция, обобщённый порядок.