ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 89–102
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 89–102

УДК 517.956.2

КОЛИВНІ СИСТЕМИ З ВАЖКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ МАЛОЇ ЖОРСТКОСТІ: АСИМПТОТИКА СПЕКТРА

Віталій Гут

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: v.hut@ukr.net

Вивчено модель композитного середовища, яке містить скінченну кількість важких включень малої жорсткості. Відношення коефіцієнтів жорсткості компонент є порядку $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$, а відношення густин маси – порядку $O(\varepsilon^{\varkappa})$, де $\varkappa \in \mathbb{N}$. Досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій сингулярно збуреної спектральної задачі Неймана. Гранична задача містить інтегральну крайову умову, яка описує нетривіальну взаємодію усіх включень. Побудовано та обґрунтовано повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій задачі.

Ключові слова: сингулярно збурена задача, асимптотика власних значень, сильно неоднорідне середовище, важкі включення.

1. Вступ. Ми досліджували спектральні властивості крайової задачі для еліптичного оператора другого порядку зі сингулярно збуреними коефіцієнтами. Задача моделює власні коливання системи зі скінченною кількістю гнучких і одночасно важких включень довільної форми. Такі моделі виникають у різноманітних розділах фізики та техніки, їх вивчають у рамках математичної теорії сильно неоднорідних середовищ [1]-[3].

За останні чотири десятиліття з'явилось багато праць, присвячених дослідженню різноманітних моделей, в яких фізичні характеристики середовища чи його геометрія сингулярно залежать від параметрів. Задачі зі скінченною кількістю жорстких включень розглянуто в [4, 5]. Коливні системи з концентрованими масами вивчали в [6]-[9], див. також огляд результатів в [10]. Зокрема, в [7] розглянуто випадок великої кількості тонких важких включень, за припущення, що включення виконують жорсткі переміщення. В праці [11] досліджували механічні властивості систем з масами, які концентруються в околі одновимірних многовидів. Моделі середовищ складної геометричної структури з одночасним збуренням густини маси та жорсткості вивчені в [12, 13]. Припускали, що жорсткіший матеріал має більшу густину. Деякі одновимірні моделі контрастних структур, які ми досліджуємо, вивчали в [14, 15].

У [16, 17] розглянуто модель пружної коливної системи зі скінченною кількістю жорстких, водночас і легких включень. Вивчено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій сингулярно збуреної крайової задачі для еліптичного оператора другого порядку. Основні результати праць – теореми збіжності спектрів і власних підпросторів. У [18] вивчено власні коливання композитного середовища, яке містить скінченну кількість м'яких важких включень. Для такої моделі отримали аналогічні результати про асимптотичну поведінку власних елементів. Обґрунтування асимптотичних формул опирається на рівномірну резольвентну збіжність деякої сім'ї необмежених самоспряжених операторів.

Ми будуємо та обґрунтовуємо повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій задачі, розглянутої в [18], у випадку власного значення граничної задачі довільної кратності. Асимптотику кратних власних значень, які при збуренні розщеплюються на прості власні значення, побудовано, зокрема, в [19, 20].

2. Формулювання задачі та допоміжні факти. Нехай Ω – обмежена гладка область в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, а ω – її строго внутрішня підмножина з гладкою межею $\partial\omega$. Вважатимемо, що ω має K компонент зв'язності $\omega_1, \dots \omega_K$. Введемо позначення $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\omega}$. В області Ω розглянемо задачу на власні значення

$$-\mathrm{div}(a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \qquad \partial_\nu u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1}$$

де ε – малий додатний параметр, а ∂_ν – зовнішня нормальна похідна. Коефіцієнти a_ε та r_ε мають вигляд

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & \text{коли } x \in \omega, \\ \alpha(x), & \text{коли } x \in \Omega_0, \end{cases} \qquad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & \text{коли } x \in \omega, \\ \varepsilon^\varkappa \rho(x), & \text{коли } x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Тут функції a, α, r та ρ – неперервні і додатні в замиканні своїх областей визначення, $\varkappa$ – натуральне число. На межі $\partial\omega$ контакту двох середовищ потрібно, щоб виконались умови спряження

$$\big[u^\varepsilon\big]_{\partial\omega} = 0, \qquad \big[a_\varepsilon\, \partial_\nu u^\varepsilon\big]_{\partial\omega} = 0. \tag{2}$$

Тут $\big[\,\cdot\,\big]_{\partial\omega}$ – стрибок функції при переході через поверхню $\partial\omega$.

При кожному фіксованому $\varepsilon > 0$ спектр задачі (1), (2) складається зі зліченної кількості невід'ємних власних значень скінченної кратності. Перенумеруємо власні значення задачі з врахуванням кратності

$$0 = \lambda_0^\varepsilon < \lambda_1^\varepsilon \leqslant \dots \leqslant \lambda_n^\varepsilon \leqslant \dots \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Власні функції $\{u_n^\varepsilon\}_{n=0}^\infty$ можна вибрати так, що вони утворюватимуть ортонормований базис у ваговому просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ зі скалярним добутком

$$(u, v)_\varepsilon = \int_\Omega r_\varepsilon uv\, dx = \int_\omega ruv\, dx + \varepsilon^\varkappa \int_{\Omega_0} \rho u\overline{v}\, dx$$

та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u,u)_\varepsilon^{1/2}$. Зрозуміло, що число $\lambda^\varepsilon = 0$ є власним значенням із сталою власною функцією при всіх $\varepsilon \in (0,1)$. Вивчатимемо асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ відмінних від нуля власних значень і відповідних власних функцій.

Розглянемо також спектральну задачу

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla w) = \mu r w \quad \text{в } \omega, \\ w \text{ – стала функція на } \partial\omega_j, \quad j=1,\dots,K, \quad w|_{\partial\omega_1} = \ldots = w|_{\partial\omega_K}, \\ \int_{\partial\omega_1} a\,\partial_\nu w\,ds + \ldots + \int_{\partial\omega_K} a\,\partial_\nu w\,ds = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Зауважимо, що значення w на межах $\partial\omega_j$ невідоме. Надалі для зручності, пишучи "*w – стала на $\partial\omega$*", розумітимемо, що звуження w на кожну з меж $\partial\omega_j$ дорівнює тій самій сталій c. Ця задача має дискретний невід'ємний спектр $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, де власні значення перенумеровані в порядку зростання і з врахуванням кратності.

У [18] доведено, що власні значення λ_n^ε збуреної задачі є неперервними функціями параметра $\varepsilon \in (0,1)$. Крім того, для кожного натурального n відношення $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до власного значення μ_n задачі (3).

Асимптотично близькими є і власні функції. Нехай μ – m-кратне власне значення задачі (3), тобто $\mu_{k-1} < \mu_k = \ldots = \mu_{k+m-1} < \mu_{k+m}$. Через S_μ позначимо власний підпростір, що відповідає μ, а через S_μ^0 – підпростір в $L_2(\Omega)$, отриманий продовженням кожного елемента S_μ за неперервністю сталою на всю область Ω. Нехай також S_μ^ε – підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений такими власними функціями u_n^ε задачі (1), (2), для яких $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Зокрема, сумарна кратність таких власних значень λ_n^ε дорівнює m. В [18] також доведено, що для кожної точки μ спектра задачі (3) розхил між підпросторами S_μ^ε та S_μ^0 стає нескінченно малим при $\varepsilon \to 0$.

Зауваження 1. Якщо ж μ – просте власне значення, то власна функція u^ε збуреної задачі збігається в $L_2(\Omega)$ до власної функції w граничної задачі (3), яка продовжена за неперервністю сталою в область Ω_0. Нехай задача Діріхле

$$-\operatorname{div}(a\nabla v) = \mu r v \quad \text{в } \omega, \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\omega,$$

має простий спектр, а відповідні власні функції задовольняють умову $\int_\omega a\,\partial_\nu v\,ds \neq 0$, тоді спектр задачі (3) також простий і спектри цих задач не перетинаються.

Вибір крайових умов Неймана в задачі (1), (2) зумовлений тим, що в цьому випадку виникає нетривіальна взаємодія включень ω_j, що виражається інтегральною умовою в граничній задачі (3). Для інших типів крайових умов можна отримати аналогічні результати про збіжність власних значень і власних підпросторів.

Мета нашої праці – побудувати повні асимптотичні розвинення власних значень λ^ε, які лежать в околі точки $\varepsilon\mu$, де μ – власне значення граничної задачі довільної скінченної кратності.

3. Формальна асимптотика. Асимптотичні розвинення власних значень λ^ε і власних функцій u^ε задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon(\mu + \mu_1\varepsilon + \cdots + \mu_n\varepsilon^n + \ldots), \tag{4}$$

$$u^\varepsilon(x) \sim w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + \cdots + \varepsilon^n w_n(x) + \ldots, \qquad x \in \omega, \tag{5}$$

$$u^\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \cdots + \varepsilon^n v_n(x) + \ldots, \qquad x \in \Omega_0. \tag{6}$$

Крім того, власну функцію u^ε додатково підпорядкуємо умові

$$(u^\varepsilon, w_0)_{L_2(r,\omega)} = 1. \tag{7}$$

Підставивши ряди у (1), (2) та прирівнявши члени при однакових степенях ε в кожному з розвинень, отримаємо рівняння та крайові умови для w_n і v_n

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla v_n) = \sum_{j=0}^{n-\varkappa-1} \mu_j \rho v_{n-\varkappa-j-1} \quad \text{в } \Omega_0, \tag{8}$$

$$-\operatorname{div}(a\nabla w_n) = \mu r w_n + \sum_{j=1}^{n} \mu_j r w_{n-j} \quad \text{в } \omega; \tag{9}$$

$$w_n = v_n \quad \text{на } \partial\omega, \quad \alpha\,\partial_\nu v_n = a\partial_\nu w_{n-1} \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{10}$$

Тут і надалі функції з від'ємними індексами вважаємо нульовими, а $\mu_0 = \mu$.

3.1. Головні члени асимптотики. Із рівностей (8) та (10) отримаємо, що

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla v_0) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \qquad \partial_\nu v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0, \tag{11}$$

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla v_1) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \qquad \alpha\,\partial_\nu v_1 = a\partial_\nu w_0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{12}$$

Позаяк задача Неймана для оператора $\operatorname{div}(\alpha\nabla\,\cdot)$ має нульове власне значення, то розв'язок задачі (11) v_0 є сталим в Ω_0. Далі, згідно з альтернативою Фредгольма, розв'язок v_1 існуватиме лише у разі виконання умови $\int_{\partial\omega} \alpha\,\partial_\nu w_0\,ds = 0$, де ds – елемент об'єму на $\partial\omega$. Звідси та з рівностей (9) та (10) для $n = 0$ отримаємо

$$-\operatorname{div}(a\nabla w_0) = \mu r w_0 \quad \text{в } \omega, \quad w_0 - \text{стала на } \partial\omega, \qquad \int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu w_0\,ds = 0. \tag{13}$$

Отже, μ і w_0 повинні бути власним значенням та власною функцією задачі (3), як і передбачалося. Нехай μ – власне значення задачі (13) кратності m, а S_μ – відповідний власний підпростір. Через $u_1, \dots, u_m$ позначимо ортонормований базис в S_μ. Нехай $\|w_0\|_{L_2(r,\omega)} = 1$, тоді функція w_0, як елемент простору S_μ, має зображення

$$w_0 = c_{0,1}u_1 + \ldots + c_{0,m}u_m = (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}),$$

де $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^m$ і $\|\mathbf{c}_0\| = 1$. Тут $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$. Нехай також $v_{1,j}$ – розв'язки задач

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla v) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \qquad \alpha\,\partial_\nu v = a\,\partial_\nu u_j \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0 \tag{14}$$

такі, що $\int_{\Omega_0} \rho v_{1,j}\,dx = 0$. Тоді $v_1 = (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) + \beta_1$, де $\mathbf{v}_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{1,m})$, а β_1 – стала функція.

Розглянемо задачі на такі члени асимптотичних рядів (4)–(6). Для v_2 отримаємо

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla v_2) = \mu\rho v_{1-\varkappa} \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha\,\partial_\nu v_2 = a\,\partial_\nu w_1 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{15}$$

Розв'язок v_2 існує тоді і лише тоді, коли $\int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu w_1\,ds = -\mu \int_{\Omega_0} \rho v_{1-\varkappa}\,dx$. З рівності $w_1 = v_1$ та зображення для v_1 одержимо, що $w_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) = \beta_1$, тобто ця різниця є сталою на $\partial\omega$. Тому для w_1 отримаємо задачу

$$-\operatorname{div}(a\nabla w_1) - \mu r w_1 = \mu_1 r(\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) \quad \text{в } \omega, \tag{16}$$

$$(w_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1)) - \text{стала на } \partial\omega, \quad \int_{\partial\omega} a\,\partial_\nu w_1\,ds = -\mu \int_{\Omega_0} \rho v_{1-\varkappa}\,dx. \tag{17}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77

Згідно з домовленістю про від'ємні індекси інтеграл в (17) дорівнює нулю при $\varkappa \geqslant 2$. Надалі через $H^p(U)$ позначатимемо простори Соболєва на многовиді U.

Лема 1. *Нехай μ – власне значення задачі (13) кратності m, а $u_1, \dots, u_m$ – ортонормований базис в S_μ. Неоднорідна задача*

$$-\operatorname{div}(a\nabla w) = \mu r w + f \quad \text{в } \omega, \quad (w-\varphi) - \text{ стала на } \partial\omega, \quad \int\limits_{\partial\omega} a\,\partial_\nu w\,ds = g, \tag{18}$$

де $f \in L_2(\omega)$, $\varphi \in H^{3/2}(\partial\omega)$, а g – задане число, має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\int\limits_{\omega} f u_j\,dx + \int\limits_{\partial\omega} a\varphi\,\partial_\nu u_j\,ds - g\,u_j\big|_{\partial\omega} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Цей розв'язок належить до класу $H^2(\omega)$ і визначений з точністю до довільного елемента з S_μ.

Доведення. Припустимо, що розв'язок задачі (18) існує. Щоб довести необхідність умов (19), домножимо рівняння (18) почергово на u_j і проінтегруємо частинами

$$\int\limits_{\partial\omega} a u_j\,\partial_\nu w\,ds - \int\limits_{\partial\omega} a w\,\partial_\nu u_j\,ds = \int\limits_{\omega} f u_j\,dx, \quad j = 1, \dots, m.$$

Позаяк функція u_j є сталою на $\partial\omega$ і виконуються рівність $\int\limits_{\partial\omega} a\,\partial_\nu u_j\,ds = 0$, отримаємо (19).

Згідно з альтернативою Фредгольма ці умови є також і достатніми для існування розв'язку, бо задачі (13) в просторі $L_2(r,\omega)$ відповідає самоспряжений оператор з компактною резольвентою [18]. □

Згідно з доведеною лемою розв'язок задачі (16)–(17) при $\varkappa = 1$ існує, коли

$$\int\limits_{\partial\omega} a(\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1)\,\partial_\nu u_j ds + \mu M(\mathbf{c}_0, u_j\mathbf{u})\big|_{\partial\omega} = -\mu_1 \int\limits_{\omega} r(\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) u_j\,dx, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{20}$$

де $M = \int\limits_{\Omega_0} \rho\,dx$. Для $\varkappa \geqslant 2$ одержимо

$$\int\limits_{\partial\omega} a(\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1)\,\partial_\nu u_j ds = -\mu_1 \int\limits_{\omega} r(\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) u_j\,dx, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{21}$$

бо в цьому випадку права частина інтегральної рівності (17) є нульовою.

Через $B(\varkappa)$ позначимо квадратну матрицю порядку m з елементами

$$b_{lj}(\varkappa) = -\int\limits_{\partial\omega} a\,v_{1,l}\,\partial_\nu u_j ds - \delta_{1\varkappa}\mu M(u_l u_j)\big|_{\partial\omega}, \tag{22}$$

де δ_{lj} – символ Кронекера. Тоді умови (20) та (21) можна записати у вигляді задачі на власні значення для матриці $B(\varkappa)$ зі спектральним параметром μ_1, тобто

$$B(\varkappa)\mathbf{c}_0 = \mu_1 \mathbf{c}_0.$$

Отже, розв'язок задачі (16)–(17) існуватиме лише у випадку, коли μ_1 – власне значення матриці $B(\varkappa)$, а $\mathbf{c}_0$ – відповідний власний вектор.

Лема 2. *Всі власні значення матриці $B(\varkappa)$ дійсні.*

Доведення. Матриця $B(\varkappa)$ є симетричною, тому має дійсний спектр. Справді, доможивши рівняння (14) на $v_{1,l}$ і проінтегрувавши частинами, для $l \neq j$ отримаємо $\int_{\partial\omega} \alpha v_{1,l}\, \partial_\nu v_{1,j} ds = \int_{\partial\omega} \alpha v_{1,j}\, \partial_\nu v_{1,l} ds$. Врахувавши крайові умови $\alpha\, \partial_\nu v_{1,j} = a\, \partial_\nu u_j$ на $\partial\omega$, одержимо рівність $\int_{\partial\omega} a\, \partial_\nu u_j v_{1,l}\, ds = \int_{\partial\omega} a\, \partial_\nu u_l v_{1,j}\, ds$, тобто $b_{jl} = b_{lj}$. □

Припустимо надалі, що всі власні значення μ_1^j матриці $B(\varkappa)$ прості, тобто m-кратне власне значення при збуренні розпадається на m простих власних значень λ_ε^j, $j = 1, \dots, m$. Зауважимо, що такі асимптотичні розвинення можна побудувати й у випадку кратних власних значень матриці $B(\varkappa)$. Такі асимптотики описуватимуть іншу біфуркаційну картину спектра в околі точки μ. Нормовані власні вектори, які відповідають власним значенням μ_1^j, позначимо через $\mathbf{c}_0^j$. Приймемо

$$w_0^j = c_{0,1}^j u_1 + \ldots + c_{0,m}^j u_m, \quad j = 1, \dots, m. \tag{23}$$

Функція v_0 стала на Ω_0, тому з (10) одержуємо

$$v_0^j = w_0^j|_{\partial\omega} \quad \text{в } \Omega_0. \tag{24}$$

Отже, ми отримали m формальних асимптотик

$$\lambda_\varepsilon^j \sim \varepsilon\mu + \varepsilon^2 \mu_1^j, \quad j = 1, \dots, m$$

таких власних значень збуреної задачі, для яких відношення $\varepsilon^{-1}\lambda_\varepsilon^j$ близьке до μ.

3.2. Перші коректори асимптотичних розвинень власних функцій. Зафіксуємо μ_1^j, відповідні функції v_0^j і w_0^j, та продовжимо побудову асимптотики, опускаючи надалі верхній індекс j. Запишемо функцію w_1 у вигляді

$$w_1 = \hat{w}_1 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}), \tag{25}$$

де $\hat{w}_1$ – розв'язок задачі (16)–(17), ортогональний до S_μ в просторі $L_2(r, \omega)$, $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^m$. Нагадаємо, що $w_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1) = \beta_1$ на поверхні $\partial\omega$, тому

$$\beta_1 = \left(\hat{w}_1(x) - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1(x)) + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}(x))\right)\big|_{\partial\omega}. \tag{26}$$

Отже, визначивши вектор $\mathbf{c}_1$, ми однозначно знайдемо w_1 та v_1. Вибір вектора $\mathbf{c}_1$ продиктовано умовами існування розв'язку w_2.

Інтегральна умова (17) забезпечує існування розв'язку задачі (15), який має зображення $v_2 = \hat{v}_2 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{v}_1) + \beta_2$, де β_2 стала. Тут $\hat{v}_2$ є таким розв'язком задачі

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla v_2) = \mu\rho v_{1-\varkappa} \quad \text{в } \Omega_0, \qquad \alpha\, \partial_\nu v_2 = a\, \partial_\nu \hat{w}_1 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

що $\int_{\Omega_0} \rho\hat{v}_2\, dx = 0$. Далі, задача

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla v_3) = \rho(\mu v_{2-\varkappa} + \mu_1 v_{1-\varkappa}) \quad \text{в } \Omega_0, \quad \alpha\, \partial_\nu v_3 = a\, \partial_\nu w_2 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_3 = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\int_{\partial\omega} a\, \partial_\nu w_2\, ds = -\int_{\Omega_0} \rho(\mu v_{2-\varkappa} + \mu_1 v_{1-\varkappa})\, dx.$$

Звідси для w_2 отримаємо

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla w_2) - \mu r w_2 = \mu_1 r w_1 + \mu_2 r w_0 \quad \text{в } \omega, \\ (w_2 - \hat{v}_2 - (\mathbf{c}_1, \mathbf{v}_1)) - \text{ стала на } \partial\omega, \quad \int\limits_{\partial\omega} a\,\partial_\nu w_2\,ds = \int\limits_{\Omega_0} \rho(\mu v_{2-\varkappa} + \mu_1 v_{1-\varkappa})\,dx. \end{cases}$$

Згідно з лемою 1 розв'язок попередньої задачі існуватиме лише тоді, коли

$$\int\limits_{\partial\omega} a\hat{v}_2\,\partial_\nu u_l ds + u_l\big|_{\partial\omega} \int\limits_{\Omega_0} \rho(\mu v_{2-\varkappa} + \mu_1 v_{1-\varkappa})\,dx = -\int\limits_{\omega} r(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_0) u_l\,dx, \tag{27}$$

для всіх $l = 1, \ldots, m$. Врахувавши зображення функцій w_1, v_1 та v_2, умови (27) можна переписати у вигляді

$$(B(\varkappa) - \mu_1)\mathbf{c}_1 = \mu_2 \mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_2(\varkappa), \tag{28}$$

де вектор $\mathbf{b}_2(\varkappa)$ має компоненти $b_{2,l}(\varkappa) = -\int\limits_{\partial\omega} a\hat{v}_2\,\partial_\nu u_l ds - M g_2(\varkappa) u_l\big|_{\partial\omega}$, а також

$$g_2(\varkappa) = \begin{cases} (\mu(\hat{w}_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{v}_1)) + \mu_1 v_0)\big|_{\partial\omega}, & \varkappa = 1, \\ \mu v_0\big|_{\partial\omega}, & \varkappa = 2, \\ 0, & \varkappa > 2. \end{cases}$$

Позаяк μ_1 – просте власне значення матриці $B(\varkappa)$ з власним вектором $\mathbf{c}_0$, то умова $\mu_2 = -(\mathbf{b}_2(\varkappa), \mathbf{c}_0)$ гарантує існування розв'язку системи (28). З умови нормування w_0 та (7) випливає, що $(w_k, w_0)_{L_2(r,\omega)} = 0$ для всіх $k \geqslant 1$. Врахувавши зображення для w_0 та w_1, з попередньої рівності при $k = 1$ отримаємо

$$(\hat{w}_1, w_0)_{L_2(r,\omega)} + ((\mathbf{c}_1, \mathbf{u}), (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}))_{L_2(r,\omega)} = 0.$$

З останньої рівності випливає умова $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_0) = 0$, яка однозначно визначає вектор $\mathbf{c}_1$. Далі однозначно знаходимо функцію w_1 та сталу β_1 за формулами (25) та (26), тому і функцію v_1.

Отже, ми знайшли функції v_1 та w_1, а також число μ_2. Крім того, функцію v_2 знайдено з точністю до сталого доданка, а w_2 – з точністю до елемента простору S_μ.

3.3. Загальні члени асимптотичних розвинень. Аналогічно можна побудувати загальні члени асимптотичних розвинень (5), (6). Припустимо, що коректори μ_l, w_l та v_l для $l \leqslant n-2$ відомі. Функцію w_{n-1} знайшли з точністю до елемента простору S_μ і вона має зображення $w_{n-1} = \hat{w}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u})$, де $\hat{w}_{n-1}$ – розв'язок цієї самої задачі ортогональний до S_μ. Функція v_{n-1} визначена з точністю до сталого доданка β_{n-1}.

Для функцій v_n та w_n отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\alpha\nabla v_n) = -\sum\limits_{l=0}^{n-\varkappa-2} \mu_l \rho v_{n-\varkappa-2} \quad \text{в } \Omega_0, \\ \alpha\,\partial_\nu v_n = a\,\partial_\nu(\hat{w}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u})) \quad \text{на } \partial\omega, \quad \partial_\nu v_n = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}(a\nabla w_n) + \mu r w_n = -\mu_1 r w_{n-1} - \sum\limits_{l=2}^{n} \mu_l r w_{n-l} \quad \text{в } \omega, \\ (w_n - \hat{v}_n - (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{v}_1)) - \text{ стала на } \partial\omega, \int\limits_{\partial\omega_k} a\,\partial_\nu w_n ds = \sum\limits_{l=0}^{n-\varkappa} \mu_l \int\limits_{\Omega_0} \rho v_{n-\varkappa-l}\,dx, \end{cases} \tag{30}$$

Розв'язок v_n задачі (29) існує, що гарантується вибором w_{n-1} на попередньому кроці. Цей розв'язок має зображення $v_n = \hat{v}_n + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{v}_1) + \beta_n$. Як і вище, $\hat{v}_n$ – розв'язок задачі (29) з крайовою умовою $\alpha\,\partial_\nu v_n = a\,\partial_\nu \hat{w}_{n-1}$ на $\partial\omega$ такий, що $\int\limits_{\Omega_0} \rho\hat{v}_n\,dx = 0$. Умови існування розв'язку задачі (30) можна записати у вигляді системи алгебричних рівнянь

$$(B(\varkappa) - \mu_1)\mathbf{c}_{n-1} = \mu_n \mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_n(\varkappa), \tag{31}$$

з невідомим параметром μ_n. Тут $\mathbf{b}_n(\varkappa)$ – вектор з координатами

$$b_{n,l}(\varkappa) = -\int\limits_{\partial\omega} a\hat{v}_n\,\partial_\nu u_l ds - Mg_n(\varkappa)u_l\big|_{\partial\omega} + \sum_{j=2}^{n-1}\mu_j c_{n-j,l},$$

$$g_n(\varkappa) = \begin{cases} \mu(\hat{w}_{n-1} - \hat{v}_{n-1})\big|_{\partial\omega} + \sum\limits_{j=1}^{n-\varkappa}\mu_j\beta_{n-\varkappa-j}, & \text{коли } \varkappa = 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{n-\varkappa}\mu_j\beta_{n-\varkappa-j}, & \text{коли } \varkappa \geqslant 2. \end{cases}$$

Розв'язок системи (31) існуватиме тоді і лише тоді, коли

$$\mu_n = -(\mathbf{b}_n(\varkappa), \mathbf{c}_0), \tag{32}$$

яка одночасно визначає коректор μ_n розвинення (4). Крім того, розв'язок $\mathbf{c}_{n-1}$ системи (31) вибираємо ортогональним до $\mathbf{c}_0$.

Отже, на цьому кроці ми однозначно вибрали коректори w_{n-1} та v_{n-1}, які задаються рівностями

$$w_{n-1} = \hat{w}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u}), \quad v_{n-1} = \hat{v}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-2}, \mathbf{v}_1) + \beta_{n-1}, \tag{33}$$

де стала β_{n-1} має зображення

$$\beta_{n-1} = (\hat{w}_{n-1} - \hat{v}_{n-1} + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{u}) - (\mathbf{c}_{n-2}, \mathbf{v}_1))\big|_{\partial\omega}. \tag{34}$$

Для розв'язків задач (29) і (30) отримали зображення

$$w_n = \hat{w}_n + (\mathbf{c}_n, \mathbf{u}), \quad v_n = \hat{v}_n + (\mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{v}_1) + \beta_n,$$

де невідомі β_n та $\mathbf{c}_n$ знайдемо на наступному кроці побудови асимптотики. За допомогою цього алгоритму можна побудувати всі члени асимптотичних розвинень (5), (6).

Нагадаємо, що наведений алгоритм залежить від вибору власного значення μ_1^j матриці $B(\varkappa)$. Тому, повертаючись до верхнього індекса j, зафіксуємо натуральне число N і введемо такі позначення:

$$\Lambda^j_{\varepsilon,N} = \mu + \mu_1^j\varepsilon + \cdots + \mu_N^j\varepsilon^N, \tag{35}$$

$$W^j_{\varepsilon,N}(x) = w_0^j(x) + \varepsilon w_1^j(x) + \cdots + \varepsilon^N w_N^j(x), \qquad x \in \omega, \tag{36}$$

$$V^j_{\varepsilon,N}(x) = v_0^j(x) + \varepsilon v_1^j(x) + \cdots + \varepsilon^N v_N^j(x), \qquad x \in \Omega_0, \tag{37}$$

де $j = 1, \ldots, m$, а m – кратність власного значення μ. Функції $w_0^1, \ldots, w_0^m$ визначені в (23), а функції v_0^j задані рівностями (24). Для $l \geqslant 1$ функції v_l^j та w_l^j є розв'язками задач (29), (30), відповідно, а числа μ_l^j задані рівністю (32) для $l \geqslant 2$. Всі члени частинних сум (36) і (37) двічі неперервно диференційовні на відповідних областях визначення. Через $U^j_{\varepsilon,N}$ позначимо функцію, яка збігається з $W^j_{\varepsilon,N}$ на ω та з $V^j_{\varepsilon,N}$ на Ω_0. Для зручності надалі опускатимемо нижній індекс N, якщо це не призводитиме до непорозумінь.

4. Обґрунтування асимптотики. Нехай H – гільбертів простір з нормою $\|\cdot\|$. Нехай U та V – підпростори гільбертового простору H.

Означення 1. *Розхилом між підпросторами U та V в просторі H називатимемо величину $\delta_H(U,V) = \|P_U - P_V\|$, де P_U і P_V – ортогональні проектори на ці підпростори.*

Твердження 1 (лема 1.3 [6]). *Нехай U та V – підпростори гільбертового простору H і $\dim U = \dim V$. Якщо для кожного $v \in V$, $\|v\|_H = 1$, існує нормований елемент $u \in U$ такий, що $\|u - v\|_H \leqslant \gamma$, то виконується нерівність $\delta_H(U,V) \leqslant M\gamma$, де стала M залежить лише від розмірності підпросторів.*

У просторі розглянемо необмежений самоспряжений оператор A з областю визначення $\mathcal{D}(A)$. Нехай також A має дискретний спектр.

Означення 2. *Квазімодою оператора A з похибкою δ називатимемо таку пару $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(A)$, що $\|Av - \mu v\| \leqslant \delta$ і $\|v\| = 1$.*

Твердження 2 ([21]). *Якщо (μ, v) – квазімода оператора A із похибкою δ, то для довільного $d > \delta$ існує пара (λ, u) така, що*

$$|\lambda - \mu| \leqslant \delta, \quad \|u - v\| \leqslant 2d^{-1}\delta,$$

де λ – власне значення оператора A, а u – нормована лінійна комбінація власних функцій оператора A, яким відповідають власні значенням з інтервалу $[\mu-d, \mu+d]$.

Означення 3. *Нехай $(\mu, v_1), \dots, (\mu, v_s)$ – квазімоди оператора A. Говоритимемо, що вони утворюють сім'ю квазімод з похибкою δ та відхиленням від ортогональності τ, якщо $\|Av_j - \mu v_j\| \leqslant \delta$ та $|(v_j, v_k) - \delta_{jk}| \leqslant \tau$ для всіх $j, k = 1, \dots, s$.*

Твердження 3 ([22]). *Нехай $\{(\mu, v_j)\}_{j=1}^s$ – сім'я квазімод оператора A з похибкою δ та відхиленням від ортогональності τ. Якщо $\delta h^{-1} + \tau < s^{-1}$, то оператор A на відрізку $[\mu - h, \mu + h]$ має власні значення сумарної кратності не менше s.*

Задачі (1), (2) у просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ відповідає оператор $A_\varepsilon = -\frac{1}{r_\varepsilon}\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla\,\cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \bigl\{u \in H^2(\Omega \setminus \partial\omega)\colon \partial_\nu u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad [u]_{\partial\omega} = 0, \quad [a_\varepsilon\, \partial_\nu u]_{\partial\omega} = 0\bigr\}.$$

Цей оператор самоспряжений, додатний і має компактну резольвенту.

Використовуючи формальні асимптотики (35) – (37), побудуємо сім'ю квазімод оператора A_ε, яка апроксимує спектр цього оператора, зосереджений в околі точки $\varepsilon\mu$. Загалом, функції U^j_ε не належать до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Хоча за побудовою функції U^j_ε неперервні на $\partial\omega$, проте умова $[a_\varepsilon\, \partial_\nu U^j_\varepsilon]_{\partial\omega} = 0$ може і не виконуватись, бо

$$\alpha\, \partial_\nu V^j_\varepsilon - \varepsilon a\, \partial_\nu W^j_\varepsilon = -a\, \partial_\nu w^j_N \varepsilon^{N+1} \text{ на } \partial\omega.$$

Підкорегуємо U^j_ε до елементів з $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Введемо функції $\varphi^j \in C^2(\Omega \setminus \partial\omega) \bigcap C(\Omega)$ такі, що $\varphi^j = 0$ в $\overline{\omega}$, $\partial_\nu \varphi^j = 0$ на $\partial\Omega$ і $\alpha\, \partial_\nu \varphi^j = a\, \partial_\nu w^j_N$ на $\partial\omega$. Тоді $U^j_\varepsilon + \varepsilon^{N+1}\varphi^j \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$.

Нехай $\hat{U}_\varepsilon^j = \Theta_\varepsilon^j(U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j)$, де $\Theta_\varepsilon^j = \|U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j\|_\varepsilon^{-1}$. Крім того, $\Theta_\varepsilon^j \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, бо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\Theta_\varepsilon^j)^{-2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\|U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j\|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^\varkappa\|V_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j\|^2_{L_2(\rho,\Omega_0)} + \|W_\varepsilon^j\|^2_{L_2(r,\omega)}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\|w_0^j + \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n w_n^j\|^2_{L_2(r,\omega)} = \|w_0^j\|^2_{L_2(r,\omega)} = 1. \tag{38}$$

Надалі через $C_N, \tilde{C}_N, C_N^*$ тощо позначатимемо сталі, які не залежать від ε, проте можуть залежати від N.

Лема 3. *Пари* $\{(\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)\}_{j=1}^m$ *утворюють сім'ю квазімод оператора* A_ε *з похибкою* $O(\varepsilon^{N+1-\varkappa/2})$ *та відхиленням від ортогональності порядку* $O(\varepsilon^{N-1-\varkappa/2})$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Підставимо числа $\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j$ і функції $U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j$ в рівняння (1) та оцінимо залишки у правих частинах. В області Ω_0 отримаємо

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla(V_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j)) + \varepsilon^{1+\varkappa}\Lambda_\varepsilon^j\rho(V_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j) = F_\varepsilon^j$$

з правою частиною

$$F_\varepsilon^j = \varepsilon^{N+1}\rho\Bigg[\sum_{n=0}^{\varkappa}\varepsilon^n\sum_{l=0}^{N-\varkappa+n}\mu_l^j v_{\tilde{N}+n-l}^j + \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n+\varkappa}\sum_{l=n}^{N}\mu_l^j v_{N+n-l}^j +$$

$$+ \rho^{-1}\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi^j) + \varepsilon^{1+\varkappa}\Lambda_\varepsilon^j\varphi^j\Bigg].$$

На множині ω одержимо $\varepsilon\operatorname{div}(a\nabla W_\varepsilon^j) + \varepsilon r\Lambda_\varepsilon^j W_\varepsilon^j) = G_\varepsilon^j$, де

$$G_\varepsilon^j = \varepsilon^{N+2}r\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n-1}\sum_{l=n}^{N}\mu_l^j w_{N+n-l}^j.$$

Отже, врахувавши зображення $\hat{U}_\varepsilon^j$, отримаємо $A_\varepsilon\hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j\hat{U}_\varepsilon^j = f_\varepsilon^j$, з правою частиною $f_\varepsilon^j = -\varepsilon^{-\varkappa}\Theta_\varepsilon^j\rho^{-1}F_\varepsilon^j$ в Ω_0 та $f_\varepsilon^j = -\Theta_\varepsilon^j r^{-1}G_\varepsilon^j$ в ω.

Позаяк всі члени частин сум (36) і (37) є обмеженими функціями на відповідних множинах, то $\|F_\varepsilon^j\|_{C(\Omega_0)} \leqslant \hat{C}_N^j\varepsilon^{N+1}$ і $\|G_\varepsilon^j\|_{C(\omega)} \leqslant \tilde{C}_N^j\varepsilon^{N+2}$. Тому

$$\|A_\varepsilon\hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j\hat{U}_\varepsilon^j\|_\varepsilon^2 = \varepsilon^\varkappa\int_{\Omega_0}\rho(f_\varepsilon^j)^2\,dx + \int_\omega r(f_\varepsilon^j)^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\big(\varepsilon^{-\varkappa}\int_{\Omega_0}(F_\varepsilon^j)^2\,dx + \int_\omega(G_\varepsilon^j)^2\,dx\big) \leqslant C_N^j\varepsilon^{2N+2-\varkappa}. \tag{39}$$

Отже, $\|A_\varepsilon\hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j\hat{U}_\varepsilon^j\|_\varepsilon \leqslant C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$. Доведемо, що сім'я функцій $\{\hat{U}_\varepsilon^j\}_{j=1}^m$ майже ортогональна в просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$. Справді, для довільних $j, l = 1, \ldots, m$ виконуються рівності

$$(A_\varepsilon\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j(\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon = (f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon, \quad (A_\varepsilon\hat{U}_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^l(\hat{U}_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon = (f_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon.$$

Віднявши їх і скориставшись самоспряженістю оператора A_ε, отримаємо

$$\varepsilon(\Lambda_\varepsilon^l - \Lambda_\varepsilon^j)(\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon = (f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^l)_\varepsilon - (f_\varepsilon^l, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon. \tag{40}$$

Врахувавши, що $|\Lambda^l_\varepsilon - \Lambda^j_\varepsilon| \geqslant \varepsilon|\mu^l_1 - \mu^j_1|$, а також оцінку $|(f^j_\varepsilon, \hat{U}^j_\varepsilon)_\varepsilon| \leqslant C_N \varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$, яка випливає з (39), для $j \neq l$ одержимо

$$|(\hat{U}^j_\varepsilon, \hat{U}^l_\varepsilon)_\varepsilon| \leqslant C^*_N \varepsilon^{N-1-\varkappa/2}.$$

Отже, набір $\{(\varepsilon\Lambda^j_\varepsilon, \hat{U}^j_\varepsilon)\}^m_{j=1}$ утворює сім'ю квазімод A_ε з похибкою $C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$ та відхиленням від ортогональності $C^*_N \varepsilon^{N-1-\varkappa/2}$. □

Нагадаємо, що через S^ε_μ ми позначали підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений такими власними функціями u^ε_n задачі (1), (2), для яких $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon_n \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Через $\hat{S}^\varepsilon_\mu$ позначимо підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений елементами $\hat{U}^j_{\varepsilon,N}$.

Теорема 1. *Нехай μ – власне значення задачі* (13) *кратності m, а всі власні значення матриці $B(\varkappa)$ прості. Тоді в околі точки $\varepsilon\mu$ існує m простих власних значень збуреної задачі, які позначатимемо $\lambda^{\varepsilon,j}$ і для них виконуються оцінки*

$$\left|\varepsilon^{-1}\lambda^{\varepsilon,j} - \Lambda^j_{\varepsilon,N}\right| \leqslant \hat{C}_N \varepsilon^{N+1}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

де стала $\hat{C}_N$ не залежить від ε.

Розхил між підпросторами $\hat{S}^\varepsilon_\mu$ та S^ε_μ прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, а саме

$$\delta_{L_2(\Omega)}(\hat{S}^\varepsilon_\mu, S^\varepsilon_\mu) \leqslant \tilde{C}_N \varepsilon^{N+1},$$

зі сталою $\tilde{C}_N$ не залежною від ε.

Доведення. З доведеного в лемі 3 одержимо, що пара $(\varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,N}, \hat{U}^j_{\varepsilon,N})$ є квазімодою A_ε з похибкою $C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$. З твердження 2 випливає, що для кожного $j = 1, \dots, m$ існує власне значення $\lambda^{\varepsilon,j}$ оператора A_ε, для якого $|\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,N}| \leqslant C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$. Тоді

$$|\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,N}| \leqslant |\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,\tilde{N}}| + |\varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - \varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,N}| \leqslant C_{\tilde{N}}\varepsilon^{N+2} + \sum_{k=N+1}^{\tilde{N}} |\mu^j_k|\varepsilon^{k+1} \leqslant \hat{C}_N\varepsilon^{N+2},$$

де $\tilde{N} = N+1+[\varkappa/2]$, а $[\cdot]$ – ціла частина від числа. Крім того, всі власні значення $\lambda^{\varepsilon,j}$ – різні. Справді, перенумеруємо власні значення матриці $B(\varkappa)$ в порядку зростання, тоді для достатньо малих ε отримаємо

$$\begin{aligned}\lambda^{\varepsilon,j+1} - \lambda^{\varepsilon,j} =& \varepsilon(\Lambda^{j+1}_{\varepsilon,N} - \Lambda^j_{\varepsilon,N}) + (\lambda^{\varepsilon,j+1} - \varepsilon\Lambda^{j+1}_{\varepsilon,N}) + (\varepsilon\Lambda^j_{\varepsilon,N} - \lambda^{\varepsilon,j}) \geqslant \\ \geqslant& \varepsilon(\Lambda^{j+1}_{\varepsilon,N} - \Lambda^j_{\varepsilon,N}) - 2\hat{C}_N\varepsilon^{N+1} \geqslant \varepsilon^2 c(\mu^{j+1}_1 - \mu^j_1), \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1.\end{aligned}$$

Виберемо h таким, щоб окіл $\Delta_h(\mu) = (\mu - h, \mu + h)$ не містив інших точок спектра задачі (13), крім μ. Згідно з твердженням 3 сумарна кратність власних значень оператора A_ε в інтервалі $\varepsilon\Delta_h(\mu)$ не менша m, як тільки $C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}h^{-1} + C^*_N\varepsilon^{N-1-\varkappa/2} < m^{-1}$. Позаяк $\Delta_h(\mu)$ містить лише одну точку спектра μ, то всі ці власні значення, поділені на ε, збігаються до μ і їх є тільки m.

Отже, твердження першої частини теореми доведено.

З леми 3 випливає, що $\dim \hat{S}^\varepsilon_\mu = \dim S^\varepsilon_\mu = m$ для достатньо малих ε. Згідно з твердженням 2 для всіх достатньо малих ε існує нормований вектор $u^j_\varepsilon \in S^\varepsilon_\mu$ такий, що $\|\hat{U}^j_{\varepsilon,N} - u^j_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \frac{2C_N}{h}\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$. Розглянувши таку оцінку для номера $\tilde{N} = N + \varkappa$

та врахувавши, що для $f \in L_2(\Omega)$ виконується нерівність $\|f\|_\varepsilon \geqslant \varepsilon^{\varkappa/2} c^{-1} \|f\|_{L_2(\Omega)}$, отримаємо

$$\|\hat{U}^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - u^j_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\varepsilon^{-\varkappa/2} \|\hat{U}^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - u^j_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant \frac{2cC_{\tilde{N}}}{h}\varepsilon^{N+1}.$$

Введемо позначення $\psi^j_{\varepsilon,N} = U^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - U^j_{\varepsilon,N} = \sum\limits_{k=N+1}^{N+\varkappa} \varepsilon^k u_k$, де $u_k = v_k$ в Ω_0 та $u_k = w_k$ в ω. Далі, отримаємо

$$\begin{aligned} \|\hat{U}^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - \hat{U}^j_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega)} &= \|\Theta^j_{\varepsilon,\tilde{N}}\big(U^j_{\varepsilon,N} + \psi^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{\tilde{N}+1}\varphi^j_{\tilde{N}}\big) - \Theta^j_{\varepsilon,N}\big(U^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{N+1}\varphi^j_N\big)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant |\Theta^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - \Theta^j_{\varepsilon,N}| \|U^j_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega)} + \Theta^j_{\varepsilon,\tilde{N}} \|\psi^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{\tilde{N}+1}\varphi^j_{\tilde{N}}\|_{L_2(\Omega)} + \\ &\qquad + \Theta^j_{\varepsilon,N}\varepsilon^{N+1}\|\varphi^j_N\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_N \varepsilon^{N+1}, \end{aligned}$$

бо виконується умова (38), а для різниці $\Theta^j_{\varepsilon,\tilde{N}}$ та $\Theta^j_{\varepsilon,N}$ одержимо оцінку

$$\begin{aligned} &|\Theta^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - \Theta^j_{\varepsilon,N}| \leqslant \tilde{c}\big|\|U^j_{\varepsilon,N} + \psi^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{\tilde{N}+1}\varphi^j_{\tilde{N}}\big\|_\varepsilon - \|U^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{N+1}\varphi^j_N)\|_\varepsilon\big| \leqslant \\ &\leqslant \tilde{c}\|\psi^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{\tilde{N}+1}\varphi^j_{\tilde{N}} - \varepsilon^{N+1}\varphi^j_N\big\|_\varepsilon \leqslant \tilde{c}\|\psi^j_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{\tilde{N}+1}\varphi^j_{\tilde{N}} - \varepsilon^{N+1}\varphi^j_N\big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \tilde{c}_N\varepsilon^{N+1}. \end{aligned}$$

Врахувавши отримані оцінки, одержуємо

$$\|\hat{U}^j_{\varepsilon,N} - u^j_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\hat{U}^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - u^j_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\hat{U}^j_{\varepsilon,\tilde{N}} - \hat{U}^j_{\varepsilon,N}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \tilde{C}_N\varepsilon^{N+1},$$

звідси згідно з твердженням 1 випливає, що $\delta_{L_2(\Omega)}(\hat{S}^\varepsilon_\mu, S^\varepsilon_\mu) \leqslant \tilde{C}_N\varepsilon^{N+1}$, що завершує доведення. □

Список використаної літератури

1. *Марченко В.А.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. / *В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов* – К.: Наук. думка, 1974.
2. *Sanchez Hubert J.* Vibration and coupling of continuous systems. / *J. Sanchez Hubert, E. Sanchez Palencia* – Springer-Verlag, 1989.
3. *Жиков В.В.* Усреднение дифференциальных операторов. / *В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник* – М.: Физматлит, 1993.
4. *Lobo M.* Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotics and uniform estimates for eigenvalues / *M. Lobo, S.A. Nazarov, E. Pérez* // IMA J. Appl. Math. – 2005. – P. 1-40.
5. *Gómez D.* Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems / *D. Gómez, M. Lobo, S.A. Nazarov, E. Pérez* // J. Math. Pure Appl. – 2006. – Vol. 86. – P. 369-402.
6. *Головатый Ю.Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальных колебаний / *Ю.Д. Головатый* // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1992. – Т. 54 - С. 29-72.
7. *Rybalko V.* Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions / *V. Rybalko* // Asymptotic Analysis. – 2002. – Vol. 32. – P. 27-62.
8. *Mel'nyk T.A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses / *T.A. Mel'nyk* // Math. Models Methods. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 11, №6. – P.1001-1029.

9. *Chechkin G.A.* Homogenization of a model spectral problem for the Laplace operator in a domain with many closely located "heavy" and "intermediate heavy" concentrated masses / *G.A. Chechkin* // J. Math. Sci. – 2006. – Vol. 135, №6. – P. 3485-3521.
10. *Lobo M.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review / *M. Lobo, E. Pérez* // C. R. Mecanique. – 2003. – Vol. 331. – P. 303-317.
11. *Golovaty Yu.D.* On vibrating membranes with very heavy thin inclusions / *Yu.D. Golovaty, D. Gomez, M. Lobo, and E. Pérez* // Math. Models Methods. Appl. Sci. – 2004. – Vol. 14, №7. – P. 987-1034.
12. *Мельник Т.А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями / *Т.А. Мельник, С.А. Назаров* // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, №2. – С. 188-238.
13. *Chechkin G.A.* Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses / *G.A. Chechkin, T.A. Mel'nyk* // Appl. Anal. – 2012. – P. 1-41.
14. *Babych N.* Asymptotic analysis of vibrating system containing stiff-heavy and flexible-light parts / *N. Babych, Yu. Golovaty* // Nonlinear Boundary Value Problems. – 2008. – Vol. 18. – P. 194-207.
15. *Babych N.* Low and high frequency approximations to eigenvibrations in a medium with double contrasts / *N. Babych, Yu.D. Golovaty* // J. Comput. Appl. Math. – 2010. – Vol. 234. – P. 1860-1867.
16. *Головатий Ю.Д.* Коливні системи з жорсткими легкими включеннями: асимптотика спектра та власних підпросторів / *Ю.Д. Головатий, В.М. Гут* // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64 , №10. – С. 1315-1330.
17. *Гут В.М.* Асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій коливної системи з жорсткими легкими включеннями / *В.М. Гут* (подано до друку).
18. *Гут В.М.* Коливні системи з м'якими важкими включеннями / *В.М. Гут* // Мат. студії. – 2012. – Т. 38, №2. – С. 162-176.
19. *Amirat Y.* Asymptotics for eigenelements of Laplacian in domain with oscillating boundary: multiple eigenvalues / *Y. Amirat, G.A. Chechkin, R.R. Gadyl'shin* // Appl. Anal. – 2007. – Vol. 86 (7) – P. 873-897.
20. *Гадыльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия / *Р.Р. Гадыльшин* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, №4. – С. 42-55.
21. *Вишик М.И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / *М.И. Вишик, А.А. Люстерник* // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, Вып. 5. – С. 3-122.
22. *Лазуткин В.Ф.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций / *В.Ф. Лазуткин* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР, 1988. – Т. 34. – С. 135–174.

Стаття: надійшла до редакції 27.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

OSCILLATION SYSTEMS WITH HEAVY SOFT INCLUSIONS: ASYMPTOTICS OF SPECTRUM

Vitalii Hut

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: v.hut@ukr.net

A model of a composite material with a finite number of heavy soft inclusions is studied. The ratio of stiffness of components is of order ε^{-1} as $\varepsilon \to 0$ and the ratio of densities is of order $\varepsilon^{\varkappa}$, $\varkappa \in \mathbb{N}$. We study asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions as $\varepsilon \to 0$ of the corresponding spectral Neumann problem. The limit spectral problem involves the non-local boundary condition which arises from the non trivial coupling of the inclusions. Complete asymptotic expansions of eigenvalues and eigenfunctions are constructed and justified.

Key words: singularly perturbed problem, asymptotics of eigenvalues, strongly inhomogeneous medium, heavy inclusion.

КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ С ТЯЖЕЛЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ: АСИМПТОТИКА СПЕКТРА

Виталий Гут

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: v.hut@ukr.net

Изучена модель композитной среды, содержащая конечное число тяжелых включений малой жесткости. Отношение коэффициентов жесткости компонент является порядка $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$, а отношение плотностей массы – порядка $O(\varepsilon^{\varkappa})$, где $\varkappa \in \mathbb{N}$. Исследовано асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций сингулярно возмущенной спектральной задачи Неймана. Предельная задача содержит интегральное краевое условие, описывающие нетривиальное взаимодействие всех включений. Построены и обоснованы полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотика собственных значений, сильно неоднородные среды, тяжелые включения малой жесткости.