ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 78–83
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 78–83

УДК 517.574

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗРОСТАННЯ δ-СУБГАРМОНІЙНИХ У СИМЕТРИЧНИХ КУЛЬОВИХ ПРОШАРКАХ ФУНКЦІЙ

Оксана ГНАТЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com

Введено характеристику Неванлінни $T_0(r,u)$ для δ-субгармонійних у симетричних кульових прошарках $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$ функцій. Досліджено деякі її властивості та доведено аналог першої основної теореми Неванлінни для δ-субгармонійних функцій в BL_R. Крім того, введено і вивчено поняття порядку зростання δ-субгармонійних в $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ функцій.

Ключові слова: δ-субгармонійна функція, міра Ріса, характеристика Неванлінни, порядок зростання.

1. Вступ. Наша мета – вивчити функції вигляду $u := u_1 - u_2$, де u_1 і u_2 – субгармонійні функції в області $G \subset \mathbb{R}^m$; $\mathbb{R}^m$ – m-вимірний евклідовий простір. Функції такого вигляду називаються δ-субгармонійними. Різниця зі значеннями в $\overline{\mathbb{R}}$ визначена поза підмножиною з G, на якій функції u_1 та u_2 одночасно дорівнюють $-\infty$. Відтак δ-субгармонійні функції утворюють лінійний простір.

Теорія δ-субгармонійних функцій тісно пов'язана з теорією потенціалу і комплексним аналізом. Досліджували властивості функцій такого класу Арсов М. (Arsove M.) [1], Брело М. (Brelot M.) [2], Привалов І. [3] та ін. Недавні публікації ([4] – [8] та інші) свідчать, що зацікавлення вивченням δ-субгармонійних функцій у різних галузях не зменшується.

У [9]-[10] ми вивчали субгармонійні функції в довільних кульових прошарках $BL = \{x : s < |x| < r\}$, $s < 1 < r$, і, зокрема, в симетричних стосовно одиничної сфери кульових прошарках $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$. Це сприяло вивченню δ-субгармонійних функцій в BL_R, що і стало об'єктом дослідження цієї статті, яку можна вважати доповненням до [9]-[10]. Зокрема, вводиться характеристика Неванлінни та досліджуються її властивості. Крім того, доводиться аналог Першої Основної Теореми Неванлінни для δ-субгармонійних функцій в BL_R. Вводиться і вивчається поняття порядку зростання δ-субгармонійних функцій у проколеному просторі $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$.

2. Характеристика Неванлінни δ-субгармонійних в BL_R функцій та її властивості. Нехай функція $u(x)$ – δ-субгармонійна в BL_R, і μ_u – міра Ріса (довільного знака), визначена так:

$$\mu_u = \frac{1}{(m-2)\sigma_m}\triangle u,$$

де σ_m – площа поверхні одиничної сфери; $m \geqslant 3$, $\triangle$ – оператор Лапласа в сенсі узагальнених функцій.

Нехай $\mu_u = \mu_u^+ - \mu_u^-$ – розвинення Жордана міри μ_u [3], де μ_u^+ та μ_u^- – невід'ємні борелеві міри. Зображення $u(x)=u_1(x)–u_2(x)$ називають канонічним, якщо $\mu_{u_1}=\mu_u^+$, $\mu_{u_2} = \mu_u^-$. Таке зображення неоднозначне, функції u_1 та u_2 визначаються з точністю до гармонійного доданка.

Позначимо

$$n_0^+(t,u) = \mu_u^+ = \mu^+\left\{x : \frac{1}{t} < |x| \leqslant t\right\}, \quad 1 < t < R,$$

$$n_0^-(t,u) = \mu_u^- = \mu^-\left\{x : \frac{1}{t} < |x| \leqslant t\right\}, \quad 1 < t < R,$$

$$n_0^+(1,u) = n^+(1+0,u), \quad n_0^-(1,u) = n^-(1+0,u)$$

і

$$N_0^+(r,u) := (m-2)\int\limits_1^r \frac{n_0^+(t,u)}{t^{m-1}}dt - \frac{m-2}{r^{m-2}}\int\limits_{\frac{1}{r}}^1 \frac{n_0^+(t,u)}{t^{m-1}}dt, \quad 1 \leqslant r < R,$$

$$N_0^-(r,u) := (m-2)\int\limits_1^r \frac{n_0^-(t,u)}{t^{m-1}}dt - \frac{m-2}{r^{m-2}}\int\limits_{\frac{1}{r}}^1 \frac{n_0^-(t,u)}{t^{m-1}}dt, \quad 1 \leqslant r < R,$$

$$N_0(r,u) := N_0^+(r,u) - N_0^-(r,u).$$

Теорема A (наслідок 1 [10]). Нехай $u(x)$- субгармонійна функція в $\overline{BL_r}$, $r > 1$, u не дорівнює $-\infty$ тотожно і μ – міра Ріса функції u. Тоді

$$N_0(r,u) = N_0^+(r,u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)} u(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}}\int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} u(x)d\sigma(x) -$$
$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,1)} u(x)d\sigma(x). \qquad (1)$$

Формула (1) є аналогом формули Йенсена для субгармонійних функцій у симетричних кульових прошарках $\overline{BL_r}$. Зокрема, якщо функція h гармонійна в $\overline{BL_r}$, то $\mu_h = \mu_h^+ = 0$ і співвідношення (1) набуває вигляду

$$0 = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)} h(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}}\int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} h(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,1)} h(x)d\sigma(x).$$

Нехай u – δ – субгармонійна функція в BL_R, $u = u_1 - u_2$ – деяке її канонічне зображення. Застосовуючи теорему А до функцій u_1 та u_2 і враховуючи останнє співвідношення, одержимо

$$N_0^+(r,u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)} u_1(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}}\int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} u_1(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,1)} u_1(x)d\sigma(x), \quad 1 \leqslant r < R, \tag{2}$$

$$N_0^-(r,u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)} u_2(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}}\int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} u_2(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,1)} u_2(x)d\sigma(x), \qquad 1 \leqslant r < R. \tag{3}$$

Віднімаючи почленно (2) і (3), отримаємо

$$N_0(r,u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)} u(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}}\int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} u(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,1)} u(x)d\sigma(x), \qquad 1 \leqslant r < R, \tag{4}$$

незалежно від канонічного зображення функції u. Співвідношення (4) – це аналог формули Йенсена для δ-субгармонійних в BL_R функцій.

Означення 1. *Нехай u – δ-субгармонійна в BL_R функція, відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$, $m \geqslant 3$. Характеристикою Неванлінни функції u називається функція*

$$T_0(r,u) := N_0^-(r,u) + \frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)} u^+(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}}\int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} u^+(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m}\int\limits_{S(0,1)} u^+(x)d\sigma(x), \quad 1 \leqslant r < R, \tag{5}$$

де $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Зауважимо таке: коли функція u субгармонійна в $\overline{BL_r}$, то $N_0^-(r,u) = 0$ і $T_0(r,u)$ збігається з введеною в [10] характеристикою Неванлінни. Попри неоднозначність канонічного зображення δ-субгармонійної функції u одержимо таке твердження.

Теорема 1. *Якщо $u = u_1 - u_2$ – канонічне зображення функції u, то*

$$T_0(r,u) := \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \max(u_1,u_2)(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} \max(u_1,u_2)(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m} \int\limits_{S(0,1)} \max(u_1,u_2)(x)d\sigma(x). \tag{6}$$

Доведення. Застосовуючи Теорему A до функції u_2, отримаємо

$$N_0^-(r,u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} u_2(x)d\sigma(x) + \frac{r^{2-m}}{c_m \left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}} \int\limits_{S(0,\frac{1}{r})} u_2(x)d\sigma(x) -$$

$$-(1+r^{2-m})\frac{1}{c_m} \int\limits_{S(0,1)} u_2(x)d\sigma(x). \tag{7}$$

Підставляючи (7) в (5) і враховуючи, що $u^+ + u_2 = \max(u_1,u_2)$, одержимо (6). □

Властивості характеристики Неванлінни $T_0(r,u)$, $1 \leqslant r < R$, подано в такій теоремі.

Теорема 2. *Нехай $u(x)$- δ-субгармонійна функція в BL_R, відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$. Тоді правильні такі властивості:*

1) *функція $T_0(r,u)$ є невід'ємною, неспадною і опуклою стосовно r^{2-m} на $[1,R)$, $T_0(1,u)=0$;*
2) *$T_0(r,u) = T_0(r,-u)$, $1 \leqslant r < R$;*
3) *якщо функція v є δ – субгармонійною в BL_R, відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$, то*

$$T_0(r, \alpha u + \beta v) \leqslant |\alpha| T_0(r,u) + |\beta| T_0(r,v) + O(1), \quad r \to R,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що властивість 2 є аналогом Першої Основної Теореми для δ-субгармонійних функцій в BL_R;

Доведення. Оскільки $u^\star(x) = \max(u_1,u_2)(x)$ є субгармонійною функцією, то з Теореми 1 і (1) випливає, що

$$T_0(r,u) := N_0(r,u^\star).$$

Функція $N_0(r,u^\star)$ є невід'ємною та неспадною, що випливає з її означення. Крім того, її похідна справа

$$\frac{dN_0(r,u^*)}{dr^{2-m}} = -(n_1(r) - n_1(\frac{1}{r})) - (m-2)\int\limits_{1/r}^{1} \frac{n_1(t) - n_1(\frac{1}{t})}{t^{m-1}} dt,$$

де $n_1(t)$ – функція розподілу міри Ріса функції u^* не спадає, коли r^{2-m} зростає, тому вона опукла щодо r^{2-m}. Отож, такою є і характеристика $T_0(r,u)$.

Рівність $T_0(1,u) = 0$ є негайним наслідком співвідношення (5). Властивість 1 доведена.

Властивість 2 є безпосереднім наслідком Теореми 1.

Доведемо, що
$$T_0(r, |\alpha| u) = |\alpha| T_0(r, u). \tag{8}$$
Справді, якщо $\alpha \geqslant 0$, то зі співвідношення (6) одержимо $T_0(r, \alpha u) = \alpha T_0(r, u)$. Якщо ж $\alpha < 0$, то з властивості 2 отримаємо (8).

Доведемо, що
$$T_0(r, u+v) \leqslant T_0(r, u) + T_0(r, v) + O(1). \tag{9}$$
Оскільки $(u+v)^+ \leqslant u^+ + v^+$ і $N_0^-(r, u+v) \leq N_0^-(r, u) + N_0^-(r, v)$, то зі співвідношення (5) отримаємо (9). З (8) та (9) одержимо властивість 3. □

3. Порядок зростання δ-субгармонійних в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ функцій.

Означення 2. *Нехай $v(x)$ – δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ функція, відмінна від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$. Порядком зростання функції v називається порядок зростання її Неванлінновой характеристики, тобто*
$$\rho[v] := \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log T_0(r, v)}{\log r}.$$

Теорема 3. *Нехай v_1, v_2 – δ-субгармонійні функції в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, відмінні від тотожних $-\infty$ чи $+\infty$. Тоді при $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$ виконується*
$$\rho[\alpha v_1 + \beta v_2] \leqslant \max(\rho[v_1], \rho[v_2]). \tag{10}$$

Доведення. Приймемо $v := v_1 + v_2$. З властивості 3 Теореми 2 одержимо
$$T_0(r, v) \leqslant T_0(r, v_1) + T_0(r, v_2) + O(1) \leqslant (|\alpha| + |\beta|) \max(T_0(r, v_1), T_0(r, v_2)) + O(1), \quad r \to R.$$
З означення порядку зростання отримуємо (10). □

Список використаної літератури

1. *Arsove M.G.* Functions representable as differences of subharmonic / *M.G. Arsove* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 327-365.
2. *Brelot M.* Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point / *M. Brelot* // Actualites Scientifiques et Industrielles. – 1934. – Vol. 139. – P. 5-55.
3. *Привалов И.И.* Субгармоничиские функции / *И.И. Привалов* – М.-Л.: Гостехиздат, 1937.
4. *Малютин К.Г.* Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости / *К.Г. Малютин* // Мат. сборн. – 2001. – Т. 192, №6. – С. 51-70.
5. *Protsyk Yu.S.* Growth majorants and canonical representations of δ-subharmonic functions / *Yu.S. Protsyk* // Mat. Studii. – 2003. – Vol. 20, №1. – P. 40-52 (in Ukrainian).
6. *Malyutin K.G.* Fourier series and delta-subharmonic functions of zero-type in a halfplane / *K.G. Malyutin* // Mat. Studii. – 2008 – Vol. 30, №2. – P. 132-138.
7. *Malyutin K.G.* Inverse formulae for Fourier coefficients of delta-subharmonic functions in a half-plane / *K.G. Malyutin* // Mat. Studii. – 2009. – Vol. 32, №2. – P. 132-138.
8. *Бродяк О.* Узагальнена теорема Вейерштрасса для δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій / *О. Бродяк, Я. Васильків* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 27-42.
9. *Gnatiuk O.P.* Subharmonic functions and electric fields in ball layers. I / *O.P. Gnatiuk, A.A. Kondratyuk* // Mat. Studii. – 2010. – Vol. 34, №2. – P. 180-192.

10. *Gnatiuk O.P.* Subharmonic functions and electric fields in ball layers. II / *O.P. Gnatiuk, A.A. Kondratyuk* // Mat. Studii. – 2011. – Vol. 35, №1. – P. 50-59.

Стаття: надійшла до редакції 30.12.2011
прийнята до друку 12.12.2012

GROWTH CHARACTERISTICS OF FUNCTIONS δ-SUBHARMONIC IN SYMMETRIC BALL LAYERS

Oksana GNATIUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com

Nevanlinna characteristic $T_0(r, u)$ for δ-subharmonic in symmetric ball layers $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$ functions is introduced. Some properties of $T_0(r, u)$ are investigated and a counterpart of the first fundamental theorem for δ-subharmonic in BL_R functions is proved. Furthermore, a growth order of δ-subharmonic functions in $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ is defined and investigated.

Key words: δ-subharmonic function, Riesz measure, Nevanlinna characteristics, growth order.

ХАРАКТЕРИСТИКИ РОСТА δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ШАРОВЫХ ПРОСЛОЙКАХ ФУНКЦИЙ

Оксана Гнатюк

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com

Введена характеристика Неванлинны $T_0(r, u)$ для δ-субгармонических в симметрических шаровых прослойках $BL_R = \{x : \frac{1}{R} < |x| < R\}$ функций. Исследованы некоторые её свойства и доказан аналог первой основной теоремы для δ-субгармонических в BL_R функций. Кроме того, введено и изучено понятие порядка роста δ-субгармонических в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ функций.

Ключевые слова: δ-субгармоническая функция, мера Рисса, характеристика Неванлинны, порядок роста.