ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 64–77
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 64–77

УДК 517.946

ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ ТА РЕГУЛЯРНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ З ТРЬОМА КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В КРУЗІ

Катерина БУРЯЧЕНКО

Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, Донецьк, 83001
e-mail: katarzyna_@ukr.net

У випадку одиничного круга K доведено теорему регулярності $L_{(3)}$-сліду та теорему існування розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в просторі Соболєва $H^{\theta}(K)$, з деяким показником регулярності θ, який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння, тобто від його коефіцієнтів.

Ключові слова: еліптичні диференціальні рівняння четвертого порядку, крайові задачі, $L-$сліди, рекурентні рівняння, асимптотика коефіцієнтів ряду Фур'є.

1. Вступ. Розглядатимемо питання існування розв'язку задачі з трьома граничними умовами для еліптичних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами в просторі Соболєва $H^{\theta}(K)$ з деяким показником регулярності θ, який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння.

Основний апарат досліджень – метод формули Гріна, метод L-слідів, тобто слідів, асоційованих з лінійною безтипною диференціальною операцією L зі сталими комплексними коефіцієнтами та розроблений автором метод дослідження рекурентних рівнянь зі змінними (які залежать від n) коефіцієнтами.

Умови існування розв'язку деяких граничних задач, які формулюються в термінах L-слідів, виникали ще під час дослідження задачі Неймана для рівняння Лапласа $\Delta u = f(x)$, $u'_{\nu}|_{\partial\Omega} = \psi(x)$: $\int_{\partial\Omega} \psi(x)\, ds_x = \int_{\Omega} f(x) dx$. Враховуючи, що для оператора $L = \Delta$ ці сліди набули вигляду $L_{(0)}u = -u|_{\partial\Omega}$, $L_{(1)}u = u'_{\nu}|_{\partial\Omega}$, останню умову можна переписати в термінах L-слідів: $\int_{\partial\Omega} L_{(1)}u\, ds_x = \int_{\Omega} f(x) dx$. Поширенню цього результату на випадок деяких крайових задач для загального безтипного диференціального оператора четвертого порядку присвячена праця [7].

В [5] було розроблено метод формули Гріна для загальної безтипної лінійної диференціальної операції $\mathcal{L}$ зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha,$$

а також введено означення асоційованих з цією операцією слідів ($L-$слідів). Це поняття виникло в зв'язку з вивченням граничних властивостей розв'язків з простору $L_2(\Omega)$ диференціальних рівнянь з максимальним оператором $Lu = f(x) \in L_2(\Omega)$. Як показано в [5], в загальному випадку звичайні сліди $u|_{\partial\Omega}$, $u'_\nu|_{\partial\Omega}$, ..., $u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega}$ розв'язків цього рівняння з простору $L_2(K)$ не існують навіть у сенсі узагальнених функцій. У випадку $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ в одиничному крузі K функція

$$u(x,y) = \frac{1}{(1-x^2)^{5/8}} \in L_2(K)$$

є розв'язком рівняння $Lu = 0$, але $< u|_{\partial K}, 1 >= \infty$, позаяк

$$\lim_{|r|\to 1-0} \int_{x^2+y^2=r^2} u(x,y) ds = \infty.$$

Однак у кожного L_2-розв'язку рівняння $Lu = 0$ існують L-сліди.

Проблемам регулярності розв'язку крайових задач для рівнянь другого порядку присвячена, зокрема, праця [6]. Існування розв'язку задачі Діріхле в просторі $C^4(K) \cap C^{1,\alpha}(\partial K)$ для деяких частинних випадків (з обмеженням на значення коренів характеристичного рівняння) еліптичних рівнянь четвертого порядку (правильно та неправильно еліптичних) довів А.О. Бабаян [1], [2].

Отож, питання існування та регулярності розв'язку крайових задач для еліптичних рівнянь четвертого порядку з довільними сталими комплексними коефіцієнтами не вивчали. Цій проблемі присвячена наша стаття: доведено теорему існування розв'язку деякої крайової задачі в просторі Соболєва $H^\theta(K)$.

В [7] було доведено необхідні, а у випадку еліптичності оператора, і достатні умови існування розв'язків декількох граничних задач у довільній області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: граничної задачі типу Коші, задачі з трьома граничними умовами та задачі Діріхле для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами. Ми використовуємо результат цієї праці у випадку одиничного круга K для доведення теореми регулярності $L_{(3)}-$сліду та теореми існування розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в просторі Соболєва $H^\theta(K)$, з деяким показником регулярності θ, який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння, тобто від його коефіцієнтів. Наведено приклад, який ілюструє, що розроблені автором методи допомагають досліджувати також інші крайові задачі, зокрема, задачу Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку, результати для якої отримали в [6] іншими методами.

2. Існування та регулярність розв'язку задачі. В одиничному крузі $K \subset \mathbb{R}^2$ розглянемо еліптичне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$L(\partial_x)u = a_0\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2} + a_2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + a_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3} + a_4\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0. \tag{1}$$

Для рівняння (1) розглянемо задачу з трьома крайовими умовами

$$u|_{\partial K} = \varphi(x), \quad u'_\nu|_{\partial K} = \psi(x), \quad u''_{\nu\nu}|_{\partial K} = \sigma(x). \tag{2}$$

Вважатимемо $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial K)$, $\sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial K)$, $m \geqslant 4$, ν – вектор зовнішньої нормалі, $|\nu| = 1$, $\partial_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, ..., 4$.

Розв'язком задачі (1), (2) з класу $H^m(K)$, $m \geqslant 4$, називатимемо функцію $u \in H^m(K)$, $m \geqslant 4$, яка задовольняє рівняння (1) та умови на межі (2).

Зауважимо, що символ оператора $L(D_x)$ допускає зображення

$$L(\xi) = a_0\xi_1^4 + a_1\xi_1^3\xi_2 + a_2\xi_1^2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2^3 + a_4\xi_2^4 =< \xi, a^1 >< \xi, a^2 >< \xi, a^3 >< \xi, a^4 >,$$

отже, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$< \nabla, a^1 >< \nabla, a^2 >< \nabla, a^3 >< \nabla, a^4 > u = 0, \tag{1*}$$

де $a^j \in \mathbf{C}^2$, $j = 1, \ldots, 4-$комплексні вектори, які визначають коефіцієнтами рівняння (1), $< a, b >= a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2-$ скалярний добуток. Розглядатимемо далі також вектори $\tilde{a}^j = (-\bar{a}_2^j, \bar{a}_1^j)$, $j = 1, \ldots, 4$.

2.1. Методи дослідження. Основним апаратом досліджень є метод асоційованих з оператором L слідів (L- слідів).

В обмеженій області $\Omega \in R^n$ розглянемо лінійну диференціальну операцію $\mathcal{L}$ та формально спряжену до неї $\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}(D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha, \qquad \mathcal{L}^+(D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha(\bar{a}_\alpha \cdot), \tag{3}$$

де $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Означення 1. *Нехай $L_{00}-$ оператор, породжений операцією $\mathcal{L}(D_x)$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Мінімальним оператором L_0 називається розширення оператора L_{00} на множину $D(L_0) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. (Замикання відбувається за нормою графіка: $||u||_L^2 = ||u||_{L_2(\Omega)}^2 + ||\mathcal{L}u||_{L_2(\Omega)}^2$).*

Означення 2. *Максимальним оператором L називається звуження $\mathcal{L}(D_x)|_{D'(\Omega)}$ на множину $D(L) := \{u \in L_2(\Omega) : Lu \in L_2(\Omega)\}$.*

Визначимо розширення $\tilde{L}$ мінімального оператора, що міститься в максимальному $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$.

Означення 3. *Оператором $\tilde{L}$ будемо називати розширення оператора L_0 на множину $D(\tilde{L}) := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}$. (За нормою графіка).*

Означення 4. *Максимальний оператор L називається правильним, якщо $D(L) =$ $= D(\tilde{L})$.*

Означення 5. *Нехай для деякої функції $u \in D(\tilde{L})$ існують лінійні неперервні функціонали $L_{(p)}u$ над простором $H^{m-p-1/2}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, ..., m-1$, такі, що виконується рівність*

$$(Lu, v) - (u, L^{+}v) = \sum_{j=0}^{m-1} (L_{(m-1-j)}u, \gamma_j v), \tag{4}$$

де $\gamma_j = p_j\gamma$, $\gamma : u \in H^m(\Omega) \to (u|_{\partial\Omega}, ..., u_\nu^{(m-1)}|_{\partial\Omega}) \in H^{(m)}$, $p_j : H^{(m)} \to H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$. Функціонал $L_{(p)}u$ називатимемо $L_{(p)}$-слідом функції $u \in D(\tilde{L})$.

Аналогічно можна побудувати оператори L_0^+, L^+, $\tilde{L}^+$, пов'язані з формально спряженою операцією $\mathcal{L}^+(D_x)$.

В [7] отримали достатні умови існування розв'язку задачі з трьома граничними умовами (1), (2) у випадку довільної обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$.

Теорема 1. [7] *Нехай існує функція $P(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$, яка однозначно визначається за допомогою даних задачі (1), (2): функцій $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, і четвірка $(P, R, S, T) \in H^{m-\frac{7}{2}}(\partial\Omega) \times H^{m-\frac{5}{2}}(\partial\Omega) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $m \geqslant 4$, задовольняє такі умови:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \{P(x) \cdot Q(-\tilde{a}^j \cdot x) + R(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x) Q'(-\tilde{a}^j \cdot x) + \\ + S(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^2 Q''(-\tilde{a}^j \cdot x) + T(x) \cdot (-\tilde{a}^j \cdot x)^3 Q'''(-\tilde{a}^j \cdot x)\} ds_x = 0, \tag{5}$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді в просторі Соболева $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), граничні дані якого пов'язані з функціями R, S, T за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} T(x) &= L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega), \\ S(x) &= L_{(1)}u = L(\nu)\psi(x) + \alpha_1\varphi_s'(x) + \alpha_2\varphi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega), \\ R(x) &= L_{(2)}u = -L(\nu)\sigma(x) + \beta_1\psi_s'(x) + \beta_2\psi(x) + \beta_3\varphi_{ss}''(x) + \beta_4\varphi_s'(x) + \\ &\quad + \beta_5\varphi(x) \in H^{m-5/2}(\partial\Omega), \\ P(x) &= L_{(3)}u = L(\nu)u_\nu'''|_{\partial\Omega} + \delta_1\varphi_{sss}'''(x) + \delta_2\sigma(x) + \delta_3\psi_{ss}''(x) + \delta_4\psi_s'(x) + \delta_5\psi(x) + \\ &\quad + \delta_6\varphi_{ss}''(x) + \delta_7\varphi_s'(x) + \delta_8\varphi(x) \in H^{m-7/2}(\partial\Omega). \end{aligned} \tag{6}$$

Тут s – натуральний параметр $\partial\Omega$, α_i, $i = 1, 2$, β_j, $j = 1, \ldots, 5$, δ_k, $k = 1, ..., 8$ – функції, гладкі за змінною x та які залежать від коефіцієнтів рівняння (1).

Використаємо результат теореми 1 для доведення існування розв'язку задачі (1), (2) у випадку одиничного круга K. Для цього достатньо довести, що зі співвідношення (5) можна однозначно знайти невідому функцію $P(x)$ через відомі функції R, S, T, які визначаються даними задачі за допомогою (6).

2.2. Розв'язання співвідношень (5). Як поліном $Q(-\tilde{a}^j \cdot x)$ підставимо в (5) функцію $Q(z) = \int_0^z dy \int_0^y dx \int_0^x T_n\, dt$ або

$$Q(z) = \frac{1}{8(n+1)(n+2)(n+3)} T_{n+3}(z) - \frac{1}{8(n-1)(n-2)(n-3)} T_{n-3}(z) -$$
$$- \frac{3}{8(n+1)(n-1)(n+2)} T_{n+1}(z) + \frac{3}{8(n+1)(n-1)(n-2)} T_{n-1}(z), \quad n = 4, \dots$$

де $T_n(t)$ – поліноми Чебишова першого роду n-го порядку [3] та розвинення функцій $P(x)$, $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ в ряд за тригонометричною системою $\{\cos n(\tau + \varphi_j),$ $\sin n(\tau + \varphi_j)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{{}_j P_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) +_j P_n^U \sin n(\tau + \varphi_j)\}, \\ R(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{{}_j R_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) +_j R_n^U \sin n(\tau + \varphi_j)\}, \\ S(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{{}_j S_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) +_j S_n^U \sin n(\tau + \varphi_j)\}, \\ T(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{{}_j T_n^T \cos n(\tau + \varphi_j) +_j T_n^U \sin n(\tau + \varphi_j)\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут φ_j – деякий кут нахилу характеристики (розв'язок рівняння $-\operatorname{tg} \varphi_j = \lambda_j$, λ_j – корені характеристичного рівняння $L(1, \lambda) = 0$). Зауважимо, що $\varphi_j \in \mathbb{C}$, для всіх $j = 1, 2, 3, 4$, оскільки ми розглядаємо випадок еліптичних диференціальних рівнянь (1).

Зауваження 1. Зауважимо, що коефіцієнти ${}_i X_n^T$, ${}_i X_n^U$ розвинення деякої функції $X(\tau)$ в ряд за тригонометричною системою $\{\cos n(\tau + \varphi_i), \sin n(\tau + \varphi_i)\}_{n=0}^{\infty}$ пов'язані з коефіцієнтами ${}_j X_n^T$, ${}_j X_n^U$ розвинення в ряд за тригонометричною системою $\{\cos n(\tau + \varphi_j), \sin n(\tau + \varphi_j)\}_{n=0}^{\infty}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, за допомогою таких співвідношень:

$${}_j X_n^T =_i X_n^T \cos n(\varphi_i - \varphi_j) +_i X_n^U \sin n(\varphi_i - \varphi_j),$$
$${}_j X_n^U = -_i X_n^T \sin n(\varphi_i - \varphi_j) +_i X_n^U \cos n(\varphi_i - \varphi_j).$$

Отже, отримуємо систему неоднорідних рекурентних рівнянь зі змінними коефіцієнтами стосовно невідомої послідовності $\{{}_j P_n^T\}_{n=7}^{\infty}$

$$\begin{gathered} \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} {}_j P_{n+3}^T - \frac{3}{(n+2)(n^2-1)} {}_j P_{n+1}^T + \frac{3}{(n-2)(n^2-1)} {}_j P_{n-1}^T - \\ - \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} {}_j P_{n-3}^T = \\ = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} {}_j R_{n+3}^T + \frac{(n+5)}{(n^2-1)(n+2)} {}_j R_{n+1}^T + \frac{(n-5)}{(n^2-1)(n-2)} {}_j R_{n-1}^T - \\ - \frac{1}{(n-1)(n-2)} {}_j R_{n-3}^T - \frac{1}{n+1} {}_j S_{n+3}^T - \\ - \frac{n-3}{n^2-1} {}_j S_{n+1}^T + \frac{n+3}{n^2-1} {}_j S_{n-1}^T + \frac{1}{n-1} {}_j S_{n-3}^T -_j T_{n+3}^T - 3 {}_j T_{n+1}^T - 3 {}_j T_{n-1}^T -_j T_{n-3}^T, \end{gathered} \tag{8}$$

$j = 1, 2, 3, 4$, $n \geqslant 4$. З цієї системи можна визначити коефіцієнти ${}_j P_7^T$, ${}_j P_8^T$, ... розвинення невідомої функції $P(x)$ через відповідні коефіцієнти розвинення відомих функцій $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$. Знаходження молодших коефіцієнтів ${}_j P_0^T$, ${}_j P_1^T$, ..., $\_{j} P_6^T$ відбувається так. Спочатку підставляємо в (5) $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = \text{const} \neq 0$, звідки

${}_1P_0^T ={}_2 P_0^T ={}_3 P_0^T ={}_4 P_0^T \equiv 0$. Потім приймаємо $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)$, що призводить до ${}_jP_1^T ={}_j R_1^T$, $j = 1, 2, 3, 4$. Якщо прийняти $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^2$, то отримаємо ${}_jP_2^T = -R_0 - S_0 - 2{}_jR_2^T - 2{}_jS_2^T$, $j = 1, 2, 3, 4$. Для знаходження ${}_jP_3^T$ приймаємо $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^3$: ${}_jP_3^T = -6{}_jR_1^T - 18{}_jS_1^T - 18{}_jT_1^T - 3{}_jR_3^T - 6{}_jS_3^T - 6{}_jT_3^T$. Якщо $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^4$, то

$${}_jP_4^T = -4{}_jR_4^T - 12{}_jS_4^T - 24{}_jT_4^T -{}_j R_2^T - 10{}_jS_2^T - 24{}_jT_2^T - 2R_0 - 8S_0 - 18T_0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Нарешті, для визначення ${}_jP_5^T$ і ${}_jP_6^T$ підставляємо в (5) $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^5$ та $Q(-\tilde{a}^j \cdot x) = (-\tilde{a}^j \cdot x)^6$, відповідно.

2.3. Дослідження асимптотики послідовності ${}_jP_n^T$, $n = 0, 1, \ldots$. Для визначення регулярності функції $P(x)$, поданої за допомогою ряду в (7), нам знадобиться дослідити асимптотику послідовності коефіцієнтів цього ряду.

Означення 6. *Будемо казати, що деяка послідовність $X_n \in h^\theta$, якщо*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |X_n|^2 (1 + n^2)^\theta < \infty.$$

Також казатимемо, що деяка послідовність $X_n \in h_\rho^\theta$, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 |X_n|^2 (1 + n^2)^\theta < \infty.$$

Значення $\rho = \rho(n) = \rho_n$ називатимемо вагою.

Правильне таке твердження.

Твердження 1. [4] *Нехай функція $X(\tau)$ визначена на межі ∂K одиничного круга K і*

$$X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{X_n^T \cos n\tau + X_n^U \sin n\tau\},\ \tau \in [0,\ 2\pi].$$

Функція $X(\tau)$ належатиме простору $H^\theta(\partial K)$ тоді і лише тоді, коли X_n^T, $X_n^U \in h^\theta$, тобто

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2)(1 + n^2)^\theta < \infty.$$

Функція $X(\tau)$ належатиме ваговому простору $H_\rho^\theta(\partial K)$ тоді і лише тоді, коли X_n^T, $X_n^U \in h_\rho^\theta$, тобто

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 (|X_n^T|^2 + |X_n^U|^2)(1 + n^2)^\theta < \infty.$$

Нехай $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $\psi(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K)$, $\sigma(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, тоді (див. формулу (6)) $R(x) \in H_\rho^{m-5/2}(\partial K)$, $S(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K)$, $T(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $\rho = \rho_n = e^{n\, Im \varphi_j}$, $j = 1, ..., 4$, $n = 1, ...$, отже, R_n^T, $R_n^U \in h_\rho^{m-5/2}$, S_n^T, $S_n^U \in h_\rho^{m-3/2}$,

$T_n^T, T_n^U \in h_\rho^{m-1/2}$ з вагою $\rho=\rho_n=e^{n\,Im\varphi_j}$, $j=1,...,4$, $n=1,...,$ тобто

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^2(|R_n^T|^2+|R_n^U|^2)(1+n^2)^{m-5/2}<\infty,\\ \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^2(|S_n^T|^2+|S_n^U|^2)(1+n^2)^{m-3/2}<\infty,\\ \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^2(|T_n^T|^2+|T_n^U|^2)(1+n^2)^{m-1/2}<\infty,\end{gathered}\tag{9}$$

де

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}\{R_n^T\cos n\tau+R_n^U\sin n\tau\},\\ S(\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}\{S_n^T\cos n\tau+S_n^U\sin n\tau\},\\ T(\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}\{T_n^T\cos n\tau+T_n^U\sin n\tau\},\\ P(\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}\{P_n^T\cos n\tau+P_n^U\sin n\tau\}.\end{aligned}\tag{10}$$

Лема 1. *Нехай*

$$X(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\{{}_jX_n^T\cos n(\tau+\varphi_j)+_j X_n^U\sin n(\tau+\varphi_j)\}.$$

Тоді така оцінка правильна:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^{-2}(|X_n^T|^2+|X_n^U|^2)(1+n^2)^\theta\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(|{}_jX_n^T|^2+|{}_jX_n^U|^2)(1+n^2)^\theta\leqslant\\ \leqslant C_1\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n^2(|X_n^T|^2+|X_n^U|^2)(1+n^2)^\theta,\\ \rho_n=e^{n\,Im\varphi_j}.\end{aligned}$$

Згідно з зауваженням 1

$${}_jX_n^T=X_n^T\cos n\varphi_j-X_n^U\sin n\varphi_j,\ {}_jX_n^U=X_n^T\sin n\varphi_j+X_n^U\cos n\varphi_j,\quad j=1,2,3,4.$$

Доведення. Для доведення леми користуємося співвідношеннями

$${}_jX_n^T=X_n^T\cos n\varphi_j-X_n^U\sin n\varphi_j,\ {}_jX_n^U=X_n^T\sin n\varphi_j+X_n^U\cos n\varphi_j,\quad j=1,2,3,4,$$

для отримання оцінки

$$|{}_jX_n^T|^2+|{}_jX_n^U|^2\leqslant C_1\left(|X_n^T|^2+|X_n^U|^2\right)\rho_n^2,\quad \rho_n=e^{n\,Im\varphi_j}.$$

Аналогічно з рівностей

$$X_n^T=_j X_n^T\cos n\varphi_j+_j X_n^U\sin n\varphi_j,\ X_n^U=-_jX_n^T\sin n\varphi_j+_j X_n^U\cos n\varphi_j,\quad j=1,2,3,4,$$

отримуємо

$$|X_n^T|^2+|X_n^U|^2\leqslant C_2\left(|{}_jX_n^T|^2+|{}_jX_n^U|^2\right)\rho_n^2,\quad \rho_n=e^{n\,Im\varphi_j}.$$

□

Отже, враховуючи формулу (9), за допомогою цієї леми визначаємо асимптотику послідовностей – правої частини системи (8): ${}_jR_n^T \in h^{m-5/2}$, ${}_jS_n^T \in h^{m-3/2}$, ${}_jT_n^T \in h^{m-1/2}$. Визначимо показник θ регулярності розв'язку ${}_jP_n^T \in h^\theta$ цієї системи.

Розглянемо нові послідовності

$$\begin{gathered}{}_j\tilde{S}_n^T = \tfrac{1}{n}\ {}_jS_n^T, \quad {}_j\tilde{S}_n^U = \tfrac{1}{n}\ {}_jS_n^U \in h^{m-1/2},\\ {}_j\tilde{R}_n^T = \tfrac{1}{n^2}\ {}_jR_n^T, \quad {}_j\tilde{R}_n^U = \tfrac{1}{n^2}\ {}_jR_n^U \in h^{m-1/2},\\ {}_j\tilde{P}_n^T = \tfrac{1}{n^3}\ {}_jP_n^T, \quad {}_j\tilde{P}_n^U = \tfrac{1}{n^3}\ {}_jP_n^U, \quad j=1,\dots,4.\end{gathered} \tag{11}$$

Тоді система (8) набуде вигляду

$$\begin{gathered}\tfrac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)}\ {}_j\tilde{P}_{n+3}^T - \tfrac{3(n+1)^2}{(n+2)(n-1)}\ {}_j\tilde{P}_{n+1}^T + \tfrac{3(n-1)^2}{(n+1)(n-2)}\ {}_j\tilde{P}_{n-1}^T - \\ -\tfrac{(n-3)^2}{(n-2)(n-1)}\ {}_j\tilde{P}_{n-3}^T = -\tfrac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)}\ {}_j\tilde{R}_{n+3}^T + \tfrac{(n+5)(n+1)}{(n+2)(n-1)}\ {}_j\tilde{R}_{n+1}^T - \\ -\tfrac{(n-5)(n-1)}{(n+1)(n-2)}\ {}_j\tilde{R}_{n-1}^T - \tfrac{(n-3)^2}{(n-2)(n-1)}\ {}_j\tilde{R}_{n-3}^T - \\ -\tfrac{n+3}{n+1}\ {}_j\tilde{S}_{n+3}^T - \tfrac{n-3}{n-1}\ {}_j\tilde{S}_{n+1}^T + \tfrac{n+3}{n+1}\ {}_j\tilde{S}_{n-1}^T + \tfrac{n-3}{n-1}\ {}_j\tilde{S}_{n-3}^T - \\ -{}_jT_{n+3}^T - 3\ {}_jT_{n+1}^T - 3\ {}_jT_{n-1}^T - \ {}_jT_{n-3}^T,\end{gathered} \tag{8*}$$

$n \geqslant 4$, $j=1,\dots,4$. Завдяки (11) права частина цієї системи

$$\begin{gathered}f_n = \tfrac{(n+3)^2}{(n+2)(n+1)}\ {}_j\tilde{R}_{n+3}^T + \tfrac{(n+5)(n+1)}{(n+2)(n-1)}\ {}_j\tilde{R}_{n+1}^T - \tfrac{(n-5)(n-1)}{(n+1)(n-2)} \\ {}_j\tilde{R}_{n-1}^T - \tfrac{(n-3)^2}{(n-2)(n-1)}\ {}_j\tilde{R}_{n-3}^T - \\ -\tfrac{n+3}{n+1}\ {}_j\tilde{S}_{n+3}^T - \tfrac{n-3}{n-1}\ {}_j\tilde{S}_{n+1}^T + \tfrac{n+3}{n+1}\ {}_j\tilde{S}_{n-1}^T + \tfrac{n-3}{n-1}\ {}_j\tilde{S}_{n-3}^T - \\ -{}_jT_{n+3}^T - 3\ {}_jT_{n+1}^T - 3\ {}_jT_{n-1}^T - \ {}_jT_{n-3}^T \in h^{m-1/2}.\end{gathered} \tag{12}$$

Досліджувати систему (8*) будемо за допомогою такого твердження.

Лема 2 (про граничний перехід)**.** [9]. *Нехай маємо рекурентне рівняння зі змінними (які залежать від n) коефіцієнтами*

$$u_{n+3} + \alpha_n u_{n+1} + \beta_n u_{n-1} + \gamma_n u_{n-3} = \delta_n g_n, \tag{13}$$

де $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $\gamma_n \to \gamma$, $\delta_n \to \delta$, $n \to \infty$. Поряд з рівнянням (13) розглянемо

$$u_{n+3} + \alpha u_{n+1} + \beta u_{n-1} + \gamma u_{n-3} = \delta g_n. \tag{14}$$

Якщо розв'язок рівняння (14) належить простору h^θ, то і розв'язок рівняння (13) належатиме простору h^θ.

Вперше цю лему (з повним доведенням) опублікували в [9].

Зрозуміло, що кожне рекурентне рівняння системи (8*) задовольняє умови леми 2, отже, розглянемо відповідну до (8*) систему граничних рекурентних рівнянь

$$\begin{aligned} &{}_j\tilde{P}^T_{n+3} - 3\ {}_j\tilde{P}^T_{n+1} + 3\ {}_j\tilde{P}^T_{n-1} - {}_j\ \tilde{P}^T_{n-3} = \\ &-\ {}_j\tilde{R}^T_{n+3} +\ {}_j\tilde{R}^T_{n+1} +\ {}_j\tilde{R}^T_{n-1} -\ {}_j\tilde{R}^T_{n-3} - \\ &-\ {}_j\tilde{S}^T_{n+3} -\ {}_j\tilde{S}^T_{n+1} +\ {}_j\tilde{S}^T_{n-1} +\ {}_j\tilde{S}^T_{n-3} - \\ &-{}_j\tilde{T}^T_{n+3} - 3\ {}_j\tilde{T}^T_{n+1} - 3\ {}_j\tilde{T}^T_{n-1} -\ {}_j\tilde{T}^T_{n-3} \end{aligned} \tag{15}$$

або

$${}_j\tilde{P}^T_{n+3} - 3\ {}_j\tilde{P}^T_{n+1} + 3\ {}_j\tilde{P}^T_{n-1} - {}_j\ \tilde{P}^T_{n-3} = f_n \in h^{m-1/2},$$

і дослідимо регулярність розв'язку системи (15). Домножимо (15) на $\cos n\tau$ і підсумуємо за $n = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} &\sin^2\tau \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}^T_n \sin n\tau \sin\tau = -\sin^2\tau\cos\tau\tilde{R}^T + \\ &+\sin\tau\cos^2\tau \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{S}^T_n \sin n\tau + \cos^3\tau T^T, \end{aligned} \tag{16}$$

де $\tilde{R}^T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{R}^T_n \cos n\tau$, $T^T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} {}_jT^T_n \cos n\tau$. З твердження 1 та формул (11) отримаємо, T^T, $\tilde{R}^T \in H^{m-1/2}(\partial K)$, $m \geqslant 4$.

Твердження 2. [8] *Для гладкої функції $\varphi(x(\tau)) \in H^{m-1/2}(\partial K)$ парна частина $T^T(\tau)$ функції $T(\tau) = -L(\nu)\varphi(x(\tau))$ в точці $\tau = 0$ має нуль другого порядку.*

Позначимо через $\tilde{F}^T(\tau)$ результат ділення правої частини (16) на $\sin^2\tau$. Тоді $\tilde{F}^T(\tau) \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial K)$, отже,

$${}_j\tilde{P}^T_{n+1} -\ {}_j\tilde{P}^T_{n-1} =\ {}_j\tilde{F}^T_n, \tag{17}$$

де ${}_j\tilde{F}^T_n \in h^{m-\frac{1}{2}}$ – коефіцієнти розвинення функції $\tilde{F}^T(\tau)$ за системою $\{\cos n\tau\}_{n=0}^{\infty}$.

Домножимо тепер (17) на $\sin n\tau$ і підсумуємо за $n = 1, \ldots$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}^T_n \cos n\tau = -\frac{1}{2\sin\tau}\sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{F}^T_n \sin n\tau.$$

Тобто $\tilde{P}^T(\tau) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}^T_n \cos n\tau \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial K)$ або ${}_j\tilde{P}^T_n \in h^{m-\frac{1}{2}}$. Позаяк ${}_j\tilde{P}^T_n = \frac{1}{n^3}\ {}_jP^T_n$, то ${}_jP^T_n \in h^{m-\frac{7}{2}}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

2.4. Асимптотика послідовності ${}_jP^U_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Визначимо тепер асимптотику послідовності ${}_jP^U_n$. Враховуючи зауваження 1,

$${}_jP^T_n =_i P^T_n \cos n(\varphi_j - \varphi_i) -_i P^U_n \sin n(\varphi_j - \varphi_i), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Отже, ${}_iP^U_n \sin n(\varphi_j - \varphi_i) \in h^{m-\frac{7}{2}}$, і за умови

$$|\sin n(\varphi_i - \varphi_j)| > C_{ij}\frac{1}{n^\ell}$$

${}_iP_n^U \in h^{m-\ell-\frac{7}{2}}$ для деякого $\ell \geqslant 0$. Отож, з леми 1, (див. також (10)), $P_n^T \in h_\rho^{m-\frac{7}{2}}$, $P_n^U \in h_\rho^{m-\ell-\frac{7}{2}}$, і, враховуючи твердження 1, $P(x) \in H_\rho^{m-\ell-\frac{7}{2}}(\partial K)$, для деякого $\ell \geqslant 0$.

2.5. Теорема регулярності $L_{(3)}-$сліду розв'язку задачі (1), (2). З результатів попередніх підрозділів таке твердження правильне.

Теорема 2. *Розглянемо крайову задачу (2) в одиничному крузі K для еліптичного рівняння (1), кути нахилу φ_j, $j = 1,2,3,4$, характеристик якого задовольняють умову*

$$|\sin n(\varphi_i - \varphi_j)| > C_{ij}\frac{1}{n^\ell},$$

для деяких $\ell \geqslant 0$ та $C_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i,j = 1,...,4$. Вважатимемо, що ці задачі $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $\psi(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K)$, $\sigma(x) \in H_\rho^{m-5/2}(\partial K)$, $m \geqslant 4$, з вагою $\rho = \rho_n = e^{-n\, Im\varphi_j}$, $j = 1,2,3,4$, $n = 1,....$ Тоді існує функція $P(x) := L_{(3)}u-$слід розв'язку задачі (1),(2), яка належить простору $H_\rho^{m-\ell-7/2}(\partial K)$, $m \geqslant 4$ та задовольняє умову

$$\int\limits_{\partial K} \{P(x)\cdot Q(-\tilde{a}^j\cdot x) + R(x)\cdot(-\tilde{a}^j\cdot x)Q'(-\tilde{a}^j\cdot x) +$$
$$+ S(x)\cdot(-\tilde{a}^j\cdot x)^2 Q''(-\tilde{a}^j\cdot x) + T(x)\cdot(-\tilde{a}^j\cdot x)^3 Q'''(-\tilde{a}^j\cdot x)\}ds_x = 0, \quad (18)$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$. Функції $R,S,T-$ це $L-$сліди розв'язку задачі (1), (2), які визначаються граничними даними $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\sigma(x)$ за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned}
&T(x) = L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x),\\
&S(x) = L_{(1)}u = L(\nu)\psi(x) + \alpha_1\varphi'_s(x) + \alpha_2\varphi(x),\\
&R(x) = L_{(2)}u = -L(\nu)\sigma(x) + \beta_1\psi'_s(x) + \beta_2\psi(x) + \beta_3\varphi''_{ss}(x) + \beta_4\varphi'_s(x) +\\
&+\beta_5\varphi(x),\\
&P(x) = L_{(3)}u = L(\nu)u'''_\nu|_{\partial\Omega} + \delta_1\varphi'''_{sss}(x) + \delta_2\sigma(x) + \delta_3\psi''_{ss}(x) + \delta_4\psi'_s(x) +\\
&+\delta_5\psi(x) + \delta_6\varphi''_{ss}(x) + \delta_7\varphi'_s(x) + \delta_8\varphi(x),
\end{aligned} \quad (19)$$

з натуральним параметром s та гладкими за змінною x функціями α_i, $i = 1,2$, β_j, $j = 1,\ldots,5$, δ_k, $k = 1,...,8$, які залежать від коефіцієнтів рівняння (1).

Зауваження 2. У випадку, коли всі характеристики рівняння дійсні, $\varphi_j \in \mathbb{R}^1$, $\forall j = 1,2,3,4$, вага $\rho = 1$ і всі простори з вагою $H_\rho^\theta(\partial K)$ перетворюються в звичайні простори Соболєва $H^\theta(\partial K)$ функцій, заданих на межі ∂K одиничного круга K.

2.6. Теорема існування розв'язку задачі. Результат теореми 2 можна застосувати для розв'язності крайової задачі (1), (2) для еліптичних рівнянь четвертого порядку. Отже, враховуючи теореми 1 та 2, отримуємо теорему.

Теорема 3. *Нехай дані задачі з умови (2) такі, що*

$$\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K), \quad \psi(x) \in H_\rho^{m-3/2}(\partial K), \quad \sigma(x) \in H_\rho^{m-5/2}(\partial K), \quad m \geqslant 4,$$

з вагою $\rho = \rho_n = e^{-n\, Im\varphi_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2....$, *а кути* φ_j *нахилу характеристик рівняння (1) задовольняють умову*

$$|\sin n(\varphi_i - \varphi_j)| > C_{ij}\frac{1}{n^\ell},$$

для деяких $\ell \geqslant 0$ *та* $C_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, ..., 4$. *Тоді в просторі Соболева* $H^{m-\ell-7/2}(K)$, $m \geqslant 4$, *існує розв'язок* $u(x)$ *задачі (1), (2) такий, що* $u'''_\nu|_{\partial K} \in H_\rho^{m-\ell-7/2}(\partial K)$, $m \geqslant 4$.

Приклад 1. Розроблені в попередніх підрозділах методи проілюструємо на прикладі знаходження $L-$слідів розв'язку задачі Діріхле в крузі для еліптичних рівнянь другого порядку з подальшим дослідженням їхньої регулярності.

В одиничному крузі K розглянемо задачу Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами

$$L(\partial_x)u = a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \tag{20}$$

$$u|_{\partial K} = \varphi(x). \tag{21}$$

В [5] було доведено такий результат.

Твердження 3. [5] *Нехай існує функція* $P(x) \in H^{m-3/2}(\partial K)$, *яка однозначно визначається за допомогою функції* $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K)$, *і задовольняє такі умови:*

$$\int\limits_{\partial K}\{P(x)\cdot Q(-\tilde{a}^j \cdot x) + R(x)\cdot(-\tilde{a}^j \cdot x)Q'(-\tilde{a}^j \cdot x)\}ds_x = 0, \tag{22}$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$.

Тоді в просторі Соболева $H^m(K)$, $m \geqslant 2$, *існує єдиний розв'язок задачі Діріхле (20), (21), граничні дані якого пов'язані з функцією* $R(x) := L_{(0)}u(x)$ *за допомогою співвідношень*

$$\begin{aligned} R(x) = L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial K),\\ P(x) = L_{(1)}u = L(\nu)u'_\nu|_{\partial K} + [(\nu_1^2 - \nu_2^2)\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + 2\nu_1\nu_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)]\varphi'_s +\\ + [(\nu_1^2 - \nu_2^2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 2\nu_1\nu_2\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\varphi(x). \end{aligned} \tag{23}$$

Тут s – натуральний параметр.

Розв'яжемо співвідношення (22) стосовно невідомої функції $P(x)$. Вважатимемо, що в (21) $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$, $m \geqslant 2$, отже, $R(x) = L_{(0)}u = -L(\nu)\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$. Після підстановки в (22) $Q(z) = \frac{1}{2(n+1)}T_{n+1}(z) - \frac{1}{2(n-1)}T_{n-1}(z)$ та

$$\begin{aligned} P(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\{{}_jP_n^T\cos n(\tau+\varphi_j) +_j P_n^U \sin n(\tau+\varphi_j)\},\\ R(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\{{}_jR_n^T\cos n(\tau+\varphi_j) +_j R_n^U \sin n(\tau+\varphi_j)\}, \end{aligned}$$

отримаємо таку рекурентну систему:

$$\frac{1}{2(n+1)}\,{}_jP_{n+1}^T - \frac{1}{2(n-1)}\,{}_jP_{n-1}^T =_j R_n^T. \tag{24}$$

Приймемо ${}_j\tilde{P}_n^T := \frac{1}{2n}{}_jP_n^T$. Тоді (24) набуде вигляду

$$ {}_j\tilde{P}_{n+1}^T - {}_j\tilde{P}_{n-1}^T = {}_jR_n^T. \tag{25}$$

Домножимо (25) на $\sin n\tau$ і підсумуємо за $n = 1, \ldots$.

$$\sin\tau \sum_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \cos n\tau = -\sum_{n=0}^{\infty} {}_jR_n^T \sin n\tau.$$

Тобто $\tilde{P}^T(\tau) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} {}_j\tilde{P}_n^T \cos n\tau \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial K)$ або ${}_j\tilde{P}_n^T \in h^{m-\frac{1}{2}}$. Позаяк ${}_j\tilde{P}_n^T = \frac{1}{2n}\,{}_jP_n^T$, то ${}_jP_n^T \in h^{m-\frac{3}{2}}$, $j = 1, 2$.

Визначимо тепер асимптотику послідовності ${}_jP_n^U$. Враховуючи зауваження 1,

$$ {}_jP_n^T = {}_iP_n^T \cos n(\varphi_j - \varphi_i) - {}_iP_n^U \sin n(\varphi_j - \varphi_i), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Отже, ${}_iP_n^U \sin n(\varphi_j - \varphi_i) \in h^{m-\frac{3}{2}}$, і за умови

$$|\sin n(\varphi_1 - \varphi_2)| > C\frac{1}{n^\ell}.$$

${}_iP_n^U \in h^{m-\ell-\frac{3}{2}}$ для деякого $\ell \geqslant 0$. Отож, з леми 1, $P_n^T \in h_\rho^{m-\frac{3}{2}}$, $P_n^U \in h_\rho^{m-\ell-\frac{3}{2}}$, і, враховуючи твердження 1, $P(x) := L_{(1)}u(x) \in H_\rho^{m-\ell-\frac{3}{2}}(\partial K)$, для деякого $\ell \geqslant 0$.

Отже, доведено існування та досліджено регулярність $L_{(1)}-$ сліду розв'язку задачі Діріхле (20), (21), який задовольняє умову (22).

Теорема 4. *Нехай кути нахилу φ_j, $j = 1, 2$, характеристик рівняння (20) задовольняють умову*

$$|\sin n(\varphi_1 - \varphi_2)| > C\frac{1}{n^\ell},$$

для деяких $\ell \geqslant 0$ та $C_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, ..., 4$. Вважатимемо, що $\varphi(x) \in H_\rho^{m-1/2}(\partial K)$. Тоді існує функція $P(x) := L_{(1)}u(x)-$слід розв'язку $u(x)$ задачі Діріхле (20),(21), яка належить простору $H_\rho^{m-\ell-3/2}(\partial K)$, $m \geqslant 2$ та задовольняє умову (22).

Зауваження 3. Враховуючи твердження 3, результат теореми 4 можна застосувати для доведення існування розв'язку задачі Діріхле (20), (21) в соболівських просторах.

3. Висновки. У випадку одиничного круга K доведено теорему регулярності $L_{(3)}-$сліду та теорему існування розв'язку задачі з трьома крайовими умовами для еліптичних рівнянь четвертого порядку в просторі Соболєва $H^\theta(K)$, з деяким показником регулярності θ, який залежить від поведінки комплексних характеристик рівняння, тобто від його коефіцієнтів. Наведено приклад, який ілюструє, що розроблені методи допомагають досліджувати також інші крайові задачі, зокрема, задачу Діріхле для еліптичних рівнянь другого порядку.

Список використаної літератури

1. *Бабаян А.О.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка / *А.О. Бабаян* // Неклассические уравнения мат. физики. – 2007. – С. 56-68.

2. *Бабаян А.О.* Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге / *А.О. Бабаян* // Известия НАН Армении. – 2003. – Т. 38, №6. – С. 39-48.
3. *Бейтмен Г.* Высшие транцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / *Г. Бейтмен, А. Эрдейи* – М.: Наука, 1974.
4. *Берс Л.* Уравнения с частными производными / *Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер* – М.: Мир, 1966.
5. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / *В.П. Бурский* – К.: Наукова думка, 2002.
6. *Бурский В.П.* Задача Дирихле для неправильно эллиптического уравнения / *В.П. Бурский, Е.В. Кириченко* // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, №2. – С. 156-164.
7. *Буряченко К.О.* Розв'язність неоднорідних крайових задач для диференціальних рівнянь четвертого порядку / *К.О. Буряченко* // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, №8. – С. 1011-1020.
8. *Буряченко К.О.* Існування та регулярність розв'язку однієї крайової задачі для диференціальних рівнянь третього порядку / *К.О. Буряченко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №3. – С. 53-62.
9. *Буряченко Е.А.* Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле в круге для линейных эллиптических уравнений четвёртого порядка / *Е.А. Буряченко* // Труды ИПММ НАНУ. – 2000. – Т. 5. – С. 20-29.

Стаття: надійшла до редакції 07.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

EXISTENCE OF SOLUTION AND REGULARITY THEOREMS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH THREE CONDITIONS ON THE BOUNDARY FOR ELLIPTIC FOURTH ORDER EQUATIONS IN A DISK

Kateryna BURYACHENKO

Donetsk National University,
Universytetska Str., 24, Donetsk, 83001
e-mail: katarzyna_@ukr.net

In the present paper, for the case of unit disk K, it is proved the regularity theorem of $L_{(3)}-$trace and existence theorem for the solution of the problem with three conditions on the boundary in Sobolev space $H^{\theta}(K)$, where θ depends on behavior of complex characteristics or from coefficients of the equation.

Key words: elliptic fourth order differential equations, boundary value problems, $L-$traces, recurrence equations, asymptotic of Fourier coefficients.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ТРЕМЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ

Катерина БУРЯЧЕНКО

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк, 83001
e-mail: katarzyna_@ukr.net

В случае единичного круга K доказано теорему регулярности $L_{(3)}$-следа и теорему существования решения задачи с тремя граничными условиями для эллиптических уравнений четвертого порядка в пространстве Соболева $H^{\theta}(K)$, с некоторым показателем регулярности θ, который зависит от поведения комплексных характеристик уравнения, тоесть от его коэффициентов.

Ключевые слова: эллиптические уравнения четвертого порядка, краевые задачи, $L-$следы, рекуррентные уравнения, асимптотика коэффициентов ряда Фурье.