ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 41–53
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 41–53

УДК 517.95

ГІПЕРБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Олег БУГРІЙ[1], Іван ГУРНЯК[1], Петро ПУКАЧ[2], Оксана ХОЛЯВКА[3]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*
[2]*Національний університет "Львівська політехніка", вул. Степана Бандери, 12, 79013 Львів, Україна*
[3]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, 79060 Львів, Україна*
e-mail: ol_buhrii@i.ua

В обмежених областях доведено існування розв'язків деяких задач для варіаційних нерівностей другого порядку з нелінійним молодшим доданком, степінь якого є функцією від просторових змінних.

Ключові слова: нелінійні гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку, змінний показник нелінійності.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,\tau} = \Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$. Нехай $L^{q(x)}(\Omega)$ – узагальнений простір Лебега, $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, $K \subset V$ – замкнена опукла множина, $0 \in K$.

В області $Q_{0,T}$ розглядається гіперболічна варіаційна нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(v-u_t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i}(v_{x_j} - u_{tx_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}(v-u_t) + c(x,t)u_t(v-u_t) +$$
$$+ d(x,t)u(v-u_t) + h(x,t)|u|^{q(x)-2}u(v-u_t) - f(x,t)(v-u_t)\Big]\, dxdt \geq 0, \qquad (1)$$

де v – пробна функція; $v(\cdot,t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, $\tau \in (0,T]$, з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (2)$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \qquad (3)$$

Задача (1)-(3) цікава тим, що варіаційна нерівність (1) містить молодший доданок, степінь якого є функцією від просторових змінних. Такі задачі раніше не розглядали. Нелінійним варіаційним нерівностям зі сталими показниками нелінійностей, зокрема, присвячена монографія [1] та статті [2], [3] (див. також бібліографію до цих праць). У праці [4] досліджено задачі для нелінійних гіперболічних варіаційних нерівностей другого порядку з нелінійностями вигляду $|u_t|^{p-2}u_t$, де показник нелінійності p – деяке число. У випадку $p > 2$ знайдено умови однозначної розв'язності таких задач у необмежених за просторовими змінними областях. Праці [5], [6], [7] присвячено вивченню варіаційних нерівностей зі змінними показниками у нелінійних доданках. Так у [5], [6] знайдено умови існування та єдиності розв'язків параболічних варіаційних нерівностей, а в праці [7] – умови єдиності розв'язку деякої гіперболічної варіаційної нерівності третього порядку в необмежених за просторовими змінними областях.

Мета нашої праці – довести теореми існування розв'язку задачі (1)-(3). Перш ніж сформулювати означення розв'язку нашої задачі та основні результати, наведемо деякі допоміжні факти.

Нехай $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ – кусково-гладка гіперповерхня. Норму банахового простору B позначимо $||\cdot; B||$, а спряжений до B простір – B^*. Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot,t)$ писатимемо $u(t)$.

Нехай $L^\infty_+(\Omega) = \{r \in L^\infty(\Omega) \mid \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1\}$, $q \in L^\infty_+(\Omega)$. Для цієї функції q через q_0 та q^0 позначатимемо такі числа, що $q_0 \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x)$ та $q^0 \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q(x)$, а через q' – таку функцію, що $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1$ майже для всіх $x \in \Omega$.

Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)}dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q слабко напівнеперервний знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [8, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою (див. [9])

$$||v; L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\left\{\lambda > 0 \,:\, \rho_q(v/\lambda,\Omega) \le 1\right\}.$$

Зазначимо таке: якщо $s(x) \le q(x)$, то $L^{q(x)}(\Omega) \circlearrowleft L^{s(x)}(\Omega)$, де символ $\circlearrowleft$ означає неперервне вкладення. Спряженим до $L^{q(x)}(\Omega)$ є простір $L^{q'(x)}(\Omega)$.

Аналогічно до $L^{q(x)}(\Omega)$ вводимо простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$, ввівши замість $\rho_q(\cdot,\Omega)$ функціонал $\rho_q(\cdot,Q_{0,T})$.

Припустимо, що виконуються умови:

(A): $a_{ij}, (a_{ij})_t, (a_{ij})_{tt} \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = \overline{1,n})$, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконуються оцінки

$$a_0\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le a^0\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2, \quad \Big|\sum_{i,j=1}^n a_{ij,t}(x,t)\xi_i\xi_j\Big| \le a^1\sum_{i=1}^n|\xi|^2,$$

$|a_{ij,tt}(x,t)| \le a^2$ $(i,j = \overline{1,n})$, де $a_0, a^1, a^2 > 0$;

(B): $b_i, b_{i,t} \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(C): $c, c_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $|c(x,t)| \le c^0$, $|c_t(x,t)| \le c^1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(D): $d, d_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < d_0 \le d(x,t) \le d^0$, $|d_t(x,t)| \le d^1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(H): $h, h_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < h_0 \le h(x,t) \le h^0$, $|h_t(x,t)| \le h^1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(Q): $q \in L^\infty(\Omega)$, $2 < q_0 \le q^0 < +\infty$ при $n = 1, 2$, $2 < q_0 \le q^0 \le 2 + \frac{2}{n-2}$ при $n \ge 3$;
(U): $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, і, крім того, або $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap \operatorname{int} K$, або $u_1 \equiv 0$;
(F): $f, f_t \in L^2(Q_{0,T})$.

Подамо означення розв'язку нашої задачі.

Означення 1. *Функцію $u \in L^\infty(0,T;V) \cap C([0,T];H_0^1(\Omega))$ називаємо розв'язком задачі (1)-(3), якщо $u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $u_t(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, и задовольняє умови (2), (3) і гіперболічну варіаційну нерівність (1) для всіх $\tau \in (0,T]$ та $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.*

Тепер перейдемо до формулювання основного результату. Для цього введемо сім'ї операторів $A_1(t) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $A_2(t) : V \to V^*$, $t \in [0,T]$, так:

$$< A_1(t)y, z >= \int\limits_\Omega c(x,t)y(x)z(x)\,dx, \quad y, z \in L^2(\Omega),$$

$$< A_2(t)w, v >= \int\limits_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)w_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)w_{x_i}v + d(x,t)wv + \\ + h(x,t)|w|^{q(x)-2}wv\Big]\,dx, \quad w, v \in V, \quad t \in [0,T].$$

Теорема 1. *Якщо виконуються умови **(A)-(F)**, $A_2(0)u_0 \in L^2(\Omega)$,*

$$K = \{v \in V \ \mid \ v(x) \ge \varphi(x) \quad \text{майже для всіх} \quad x \in \Omega\},$$

де $\varphi \in V$, $\varphi \le 0$, то існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3).

Перш ніж перейти до доведення цієї теореми, нагадаємо кілька відомих фактів, які використовуватимемо далі.

Зауваження 1. Нехай $r \in L_+^\infty(\Omega)$,

$$S_r(l) = \begin{cases} l^{r_0}, & l \in [0,1], \\ l^{r^0}, & l > 1, \end{cases} \qquad S_{1/r}(l) = \begin{cases} l^{1/r^0}, & l \in [0,1], \\ l^{1/r_0}, & l > 1. \end{cases}$$

Тоді (див. [10]) для довільної функції $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$ виконуються такі твердження:
1) якщо $\rho_r(v,\Omega) < +\infty$, то $||v; L^{r(x)}(\Omega)|| \le S_{1/r}(\rho_r(v,\Omega))$;
2) якщо $||v; L^{r(x)}(\Omega)|| < +\infty$, то $\rho_r(v,\Omega) \le S_r\Big(||v; L^{r(x)}(\Omega)||\Big)$.

Зрозуміло, що умову $r_0 > 1$ в цьому зауваженні можна замінити на $r_0 \ge 1$.

Зауваження 2. Якщо $r \in L_+^\infty(\Omega)$, то для всіх $\varepsilon > 0$ і для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\alpha\beta \le \varepsilon|\alpha|^{r(x)} + Y_r(\varepsilon)|\beta|^{r'(x)} \quad \text{майже для всіх} \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

де $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$, $Y_r(\varepsilon) = \frac{r^0-1}{r_0(\varepsilon r_0)^{1/(r^0-1)}}$ при $\varepsilon r_0 \le 1$, і $Y_r(\varepsilon) = \frac{r^0-1}{r_0(\varepsilon r_0)^{1/(r_0-1)}}$ при $\varepsilon r_0 > 1$. Зазначимо, що $Y_r(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} +\infty$, $Y_r(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+\infty}{\longrightarrow} +0$.

Зауваження 3. Якщо $s \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{s}$, то $H^1(\Omega) \circlearrowleft L^s(\Omega)$.

Наведемо одне допоміжне твердження.

Лема 1. *Розглянемо вимірні невід'ємні функції* $s : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $z : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *і множини* $A = \{x \in \Omega \mid z(x) < 1\}$, $B = \{x \in \Omega \mid s(x) < 1\}$. *Якщо*

$$\widehat{s}(x) = \begin{cases} s(x), & x \in \Omega \setminus (A \cup B), \\ 1, & x \in A \cup B, \end{cases} \tag{5}$$

то $\widehat{s}(x) \ge 1$ *майже для всіх* $x \in \Omega$ *та виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega} |z(x)|^{s(x)}\, dx \le 2 \operatorname{mes} \Omega + \int\limits_{\Omega} |z(x)|^{\widehat{s}(x)}\, dx. \tag{6}$$

Доведення. Очевидно, що $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ і $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(1 \le i, j \le 4)$, де

$$A_1 = \Omega \setminus (A \cup B), \quad A_2 = A \setminus B, \quad A_3 = A \cap B, \quad A_4 = B \setminus A.$$

Тоді

$$\int\limits_{\Omega} |z(x)|^{s(x)}\, dx = \int\limits_{A_1} |z(x)|^{s(x)}\, dx + \int\limits_{A_2} |z(x)|^{s(x)}\, dx + \int\limits_{A_3} |z(x)|^{s(x)}\, dx + \int\limits_{A_4} |z(x)|^{s(x)}\, dx \le$$
$$\le \int\limits_{A_1} |z(x)|^{s(x)}\, dx + \int\limits_{A_2} dx + \int\limits_{A_3} dx + \int\limits_{A_4} |z(x)|\, dx =$$
$$= \int\limits_{A_1} |z(x)|^{\widehat{s}(x)}\, dx + \operatorname{mes} A_2 + \operatorname{mes} A_3 + \int\limits_{A_4} |z(x)|^{\widehat{s}(x)}\, dx \le 2 \operatorname{mes} \Omega + \int\limits_{\Omega} |z(x)|^{\widehat{s}(x)}\, dx.$$

Лему доведено. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $s : \Omega \to \mathbb{R}_+$ – *вимірна невід'ємна функція,* $r \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. *Якщо* $s(x) \le r(x)$ *майже для всіх* $x \in \Omega$, *то для всіх вимірних* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *виконується оцінка*

$$\int\limits_{\Omega} |v(x)|^{s(x)}\, dx \le C_1 + C_2 ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\max\{1, s^0\}}, \tag{7}$$

де сталі $C_1, C_2 > 0$ *не залежать від* v, $s^0 = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} s(x)$.

Доведення. Якщо $s(x) \ge 1$ майже для всіх $x \in \Omega$, то $s \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ і нерівність (7) випливає з вкладення просторів $L^{r(x)}(\Omega) \circlearrowleft L^{s(x)}(\Omega)$.

Нехай $\operatorname{mes} B > 0$, де $B = \{x \in \Omega \mid s(x) < 1\}$. Тоді $s \notin L^{\infty}_{+}(\Omega)$. Розглянемо довільну вимірну функцію $v : \Omega \to \mathbb{R}$. Нехай $z(x) = |v(x)|$ $(x \in \Omega)$ і $\widehat{s}$ взяте з (5). Тоді $1 \le \widehat{s}(x) \le r(x)$ майже для всіх $x \in \Omega$ і $L^{r(x)}(\Omega) \circlearrowleft L^{s(x)}(\Omega)$. Звідси на підставі оцінки (6) та зауваження 1 отримаємо, що

$$I := \int\limits_{\Omega} |v(x)|^{s(x)}\, dx = \int\limits_{\Omega} |z(x)|^{s(x)}\, dx \le 2 \operatorname{mes} \Omega + \int\limits_{\Omega} |z(x)|^{\widehat{s}(x)}\, dx = 2 \operatorname{mes} \Omega + \rho_{\widehat{s}}(v, \Omega) \le$$
$$\le 2 \operatorname{mes} \Omega + S_{\widehat{s}}\Big(||v; L^{\widehat{s}(x)}(\Omega)||\Big) \le 2 \operatorname{mes} \Omega + S_{\widehat{s}}\Big(||v; L^{r(x)}(\Omega)||\Big).$$

Очевидно, що $\widehat{s}_0 = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \widehat{s}(x) = 1$, $\widehat{s}^0 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \widehat{s}(x) = \max\{1, s^0\}$. Якщо виконується нерівність $||v; L^{r(x)}(\Omega)|| > 1$, то

$$I \le 2\operatorname{mes}\Omega + ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\widehat{s}^0} = 2\operatorname{mes}\Omega + ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\max\{1,s^0\}}.$$

Якщо $||v; L^{r(x)}(\Omega)|| \le 1$ і $\max\{1, s^0\} = 1 = \widehat{s}_0$, то

$$I \le 2\operatorname{mes}\Omega + ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\widehat{s}_0} = 2\operatorname{mes}\Omega + ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\max\{1,s^0\}}.$$

Якщо $||v; L^{r(x)}(\Omega)|| \le 1$ і $\max\{1, s^0\} > 1$, то з (4) при $\varepsilon = 1$ отримуємо оцінку

$$I \le 2\operatorname{mes}\Omega + ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\widehat{s}_0} = 2\operatorname{mes}\Omega + ||v; L^{r(x)}(\Omega)|| \le$$

$$\le 2\operatorname{mes}\Omega + Y_{\max\{1,s^0\}}(1) + ||v; L^{r(x)}(\Omega)||^{\max\{1,s^0\}}.$$

Наслідок доведено. □

Для доведення теореми існування розв'язку нашої варіаційної нерівності розглянемо допоміжну задачу зі штрафом для функції $\widetilde{u}$

$$u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t) - m(u_t(t) - \varphi)^- = f(t), \quad t \in (0, T), \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{9}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1, \tag{10}$$

де $m \in \mathbb{N}$ – числовий параметр.

Означення 2. *Функцію $u \in L^\infty(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ називаємо розв'язком задачі (8)-(10), якщо $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^2(0, T; V^*)$, u задовольняє умови (9), (10) та для всіх $v \in V$ і всіх $\psi \in C_0^\infty(0, T)$ задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-u_t v\psi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\psi + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v\psi + cu_t v\psi + duv\psi + h|u|^{q(x)-2}uv\psi -$$

$$- m(u_t - \varphi)^- v\psi\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} fv\,\psi\, dxdt. \tag{11}$$

Теорема 2. *Нехай $q \in L_+^\infty(\Omega)$, виконуються умови **(A)-(H)**, **(U)**, і, крім того, $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\varphi \le 0$, $f \in L^2(Q_{0,T})$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ задача (8)-(10) має розв'язок.*

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Нехай $z^- = \max\{-z, 0\}$, $\{w^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ – ортонормована в $L^2(\Omega)$ база простору V,

$$\widetilde{u}^k(x,t) = \sum_{l=1}^k C_l^k(t)w^l(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (x,t) \in Q_{0,T},$$

де функції $C_1^k, \dots, C_k^k$ є розв'язками задачі Коші

$$< \widetilde{u}_{tt}^k(t), w^l > + < A_1(t)\widetilde{u}_t^k(t), w^l > + < A_2(t)\widetilde{u}^k(t), w^l > - < m(\widetilde{u}_t^k(t) - \varphi)^-, w^l >=$$

$$=< f(t), w^l >, \quad t \in (0, T), \tag{12}$$

$$C_l^k(0) = \alpha_l^k, \ \ (C_l^k)_t(0) = \beta_l^k, \quad l = \overline{1,k}, \tag{13}$$

сталі $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_k^k$, $\beta_1^k, \ldots, \beta_k^k$ вибрано так, щоб

$$||\widetilde{u}_0^k - u_0||_V \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad ||\widetilde{u}_1^k - u_1||_{L^2(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{14}$$

Тут $\widetilde{u}_0^k(x) \equiv \sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l^k w^l(x)$, $\widetilde{u}_1^k(x) \equiv \sum\limits_{l=1}^{k} \beta_l^k w^l(x)$, $x \in \Omega$. Зрозуміло, що введені функції задовольняють умови

$$\widetilde{u}^k(0) = \widetilde{u}_0^k, \qquad \widetilde{u}_t^k(0) = \widetilde{u}_1^k. \tag{15}$$

На підставі теореми Каратеодорі (див. [11, с. 54]) існує розв'язок задачі (12)-(13) на інтервалі $[0, t_0]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_0 = T$. Тому зразу вважатимемо, що функції $C_1^k, \ldots, C_k^k$ визначено на $[0, T]$.

Отримаємо допоміжні оцінки. Домножимо (12), відповідно, на функції $C_{l,t}^k$, підсумуємо за l від 1 до k та зінтегруємо по проміжку $(0,\tau) \subset (0,T)$. Отримаємо таке:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\widetilde{u}_{tt}^k \widetilde{u}_t^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{u}_{x_i}^k \widetilde{u}_{tx_j}^k + \sum_{i=1}^{n} b_i \widetilde{u}_{x_i}^k \widetilde{u}_t^k + c|\widetilde{u}_t^k|^2 + d\widetilde{u}^k \widetilde{u}_t^k + h|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2} \widetilde{u}^k \widetilde{u}_t^k -$$

$$- m(\widetilde{u}_t^k - \varphi)^- \widetilde{u}_t^k\Big]\, dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f \widetilde{u}_t^k \, dxdt. \tag{16}$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \gamma \le \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\Big)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \le \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\Big) + \frac{1}{2}\gamma^2, \tag{17}$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma \in \mathbb{R}^1$, то

$$\left| \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} b_i \widetilde{u}_{x_i}^k \widetilde{u}_t^k \, dxdt \right| \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(B_1 |\nabla \widetilde{u}^k|^2 + |\widetilde{u}_t^k|^2\Big)\, dxdt.$$

Тут $B_1 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,t)\in Q_{0,T}} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2(x,t)$. Крім того,

$$- \int\limits_{Q_{0,\tau}} m(\widetilde{u}_t^k - \varphi)^- \widetilde{u}_t^k \, dxdt \ge 0.$$

Тоді, використовуючи умови **(A)-(H)**, зауваження 2 при $r = 2$, $\varepsilon = 1/2$, з рівності (16) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[|\widetilde{u}_t^k|^2 + a_0 |\nabla \widetilde{u}^k|^2 + d_0 |\widetilde{u}^k|^2 + \frac{2h_0}{q^0} |\widetilde{u}^k|^{q(x)}\Big]\, dx \le$$

$$\le \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^2 \, dxdt + \int\limits_{\Omega} \Big[|\widetilde{u}_1^k|^2 + a^0 |\nabla \widetilde{u}_0^k|^2 \, dx + \frac{2h^0}{q_0} |\widetilde{u}_0^k|^{q(x)} + d^0 |\widetilde{u}_0^k|^2\Big]\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\Big(2c^0 + 2\Big)|\widetilde{u}_t^k|^2 + \Big(B_1 + a^1\Big)|\nabla \widetilde{u}^k|^2 + d^1 |\widetilde{u}^k|^2 + \frac{2h^1}{q_0} |\widetilde{u}^k|^{q(x)}\Big]\, dxdt. \tag{18}$$

На підставі (14) та леми Гронуолла-Белмана з (18) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|\widetilde{u}_t^k|^2+|\nabla\widetilde{u}^k|^2+|\widetilde{u}^k|^2+|\widetilde{u}^k|^{q(x)}\Big]dx\le C_3,\quad \tau\in(0,T],\tag{19}$$

звідки

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|\widetilde{u}_t^k|^2+|\nabla\widetilde{u}^k|^2+|\widetilde{u}^k|^2+|\widetilde{u}^k|^{q(x)}\Big]\,dxdt\le C_4,\quad \tau\in(0,T],\tag{20}$$

і сталі C_3, C_4 не залежать від k, τ. Крім того,

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big||\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\widetilde{u}^k\Big|^{q'(x)}\,dx\,dt\le\int\limits_{Q_{0,\tau}}|\widetilde{u}^k|^{q(x)}\,dx\,dt\le C_5.\tag{21}$$

З оцінок (19)-(21) випливає, що існує підпослідовність $\{\widetilde{u}^{k_s}\}_{k_s\in\mathbb{N}}\subset\{\widetilde{u}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ така, що

$$\begin{gathered}
\widetilde{u}^{k_s}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty(0,T;V(\Omega)),\\
\widetilde{u}^{k_s}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}\quad\text{слабко в}\quad H^1(Q_{0,T})\cap L^{q(x)}(Q_{0,T}),\\
\widetilde{u}^{k_s}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}\quad\text{сильно в}\quad L^2(Q_{0,T})\quad\text{і майже скрізь в}\quad Q_{0,T},\\
\widetilde{u}_t^{k_s}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{u}_t\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\quad\text{і слабко в}\quad L^2(Q_{0,T}),\\
|\widetilde{u}^{k_s}|^{q(x)-2}\widetilde{u}^{k_s}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\chi\quad\text{слабко в}\quad L^{q'(x)}(Q_{0,T}).
\end{gathered}\tag{22}$$

Тому

$$(\widetilde{u}_t^{k_s}-\varphi)^-\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}(\widetilde{u}_t-\varphi)^-\quad\text{слабко в}\quad L^2(Q_{0,T})$$

і $\chi=|\widetilde{u}|^{q(x)-2}\widetilde{u}$.

Розглянемо (12) при $k=k_s$, домножимо на функцію $\psi\in C^\infty([0,T])$ таку, що $\psi(0)=\psi(T)=0$, та зінтегруємо за $t\in[0,T]$. Далі спрямуємо k_s до безмежності і тоді на підставі збіжностей (22) отримаємо рівність

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_{0,T}}\widetilde{u}_t w^l\psi'\,dxdt+\int\limits_{Q_{0,T}}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\widetilde{u}_{x_i}w^l_{x_j}\psi\,dxdt+\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i=1}^n b_i\widetilde{u}_{x_i}+c\widetilde{u}_t+d\widetilde{u}+\\
+h|\widetilde{u}|^{q(x)-2}\widetilde{u}-m(\widetilde{u}_t-\varphi)^-\Big]w^l\psi\,dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}}fw^l\psi\,dxdt,\quad l=\overline{1,k}.
\end{gathered}$$

Звідси, завдяки довільності ψ, отримаємо

$$<\widetilde{u}_{tt}(t)+A_1(t)\widetilde{u}_t(t)+A_2(t)\widetilde{u}(t)-m(\widetilde{u}_t(t)-\varphi)^-,w^l>=<f(t),w^l>,\quad t\in(0,T).$$

Далі стандартно доводимо, що замість w^l $(l=\overline{1,k})$ тут можна прийняти довільну функцію $v\in V$. Отже, функція $\widetilde{u}$ є шуканим розв'язком задачі (8)-(10). $\square$

Зауваження 4. Якщо виконуються умови **(A)**-**(H)**, **(Q)**, то задача (8)-(10) не може мати більше одного розв'язку.

Зауважимо також, що результати теореми 2 та попереднього зауваження можна отримати і за слабших умов, проте ми цього не робитимемо.

Теорема 3 (про гладкість розв'язку задачі зі штрафом). *Нехай виконуються умови теореми 2 і, крім того, умова* ***(Q)*** *та* $f_t \in L^2(Q_{0,T})$. *Тоді розв'язок задачі (8)-(10) додатково задовольняє включення* $u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];H_0^1(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

Доведення. Нехай $\{\widetilde{u}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – функції з теореми 2, які задовольняють (12) і для яких виконуються оцінки (19)-(21). Щоб одержати додаткові оцінки для цієї послідовності, диференціюємо (12) за змінною t, множимо, відповідно, на функції $C^k_{l,tt}$, підсумовуємо за l від 1 до k та інтегруємо по проміжку $(0,\tau)\subset(0,T)$. Отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\widetilde{u}^k_{ttt}\widetilde{u}^k_{tt} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij,t}\widetilde{u}^k_{x_i}\widetilde{u}^k_{ttx_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\widetilde{u}^k_{tx_i}\widetilde{u}^k_{ttx_j} + \sum_{i=1}^n b_{i,t}\widetilde{u}^k_{x_i}\widetilde{u}^k_{tt} + \sum_{i=1}^n b_i\widetilde{u}^k_{tx_i}\widetilde{u}^k_{tt} +$$
$$+ c_t\widetilde{u}^k_t\widetilde{u}^k_{tt} + c|\widetilde{u}^k_{tt}|^2 + d_t\widetilde{u}^k\widetilde{u}^k_{tt} + d\widetilde{u}^k_t\widetilde{u}^k_{tt} + h_t|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\widetilde{u}^k\widetilde{u}^k_{tt} + h(q-1)|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\widetilde{u}^k_t\widetilde{u}^k_{tt} -$$
$$- m((\widetilde{u}^k_t-\varphi)^-)_t\widetilde{u}^k_{tt}\Big]\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f_t\widetilde{u}^k_{tt}\,dxdt. \tag{23}$$

Доданки з $\widetilde{u}^k_{ttt}$, a_{ij}, b_i оцінимо аналогічно, як доданки з $\widetilde{u}^k_{tt}$, a_{ij}, b_i у теоремі 2.

Оскільки для всіх α_{ij}, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}^1$ $(i,j=\overline{1,n})$, $\delta>0$ можемо записати нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}\beta_i\gamma_j \le n\alpha_{i^*j^*}\left(Y_2(\delta)\sum_{i=1}^n\beta_i^2 + \delta\sum_{i=1}^n\gamma_i^2\right),$$

де $\alpha_{i^*j^*} = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}}|\alpha_{ij}|$, а Y_2 – функція з (4), то на підставі умови **(A)** та формули інтегрування частинами отримаємо оцінку

$$\left|\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^n a_{ij,t}\widetilde{u}^k_{x_i}\widetilde{u}^k_{ttx_j}\,dxdt\right| \le A_1\int\limits_{\Omega_\tau}\Big(\delta|\nabla\widetilde{u}^k_t|^2 + Y_2(\delta)|\nabla\widetilde{u}^k|^2\Big)\,dx +$$
$$+ A_1\int\limits_{\Omega_0}\Big(|\nabla\widetilde{u}^k_1|^2 + |\nabla\widetilde{u}^k_0|^2\Big)\,dx + \Big(\frac{A_2}{2}+a^1\Big)\int\limits_{Q_{0,\tau}}|\nabla\widetilde{u}^k_t|^2\,dxdt + \frac{A_2}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}|\nabla\widetilde{u}^k|^2\,dxdt,$$

де $A_1 = n\max\limits_{i,j=\overline{1,n}}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_{0,T}}|a_{ij,t}(x,t)|$, $A_2 = n\max\limits_{i,j=\overline{1,n}}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_{0,T}}|a_{ij,tt}(x,t)|$.

На підставі (17)

$$\left|\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^n b_{i,t}\widetilde{u}^k_{x_i}\widetilde{u}^k_{tt}dxdt\right| \le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big(B_2|\nabla\widetilde{u}^k|^2 + |\widetilde{u}^k_{tt}|^2\Big)dxdt,$$

де $B_2 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,t)\in Q_{0,T}}\sum\limits_{i=1}^n b^2_{i,t}(x,t)$.

Для оцінки доданків з c_t, d, d_t, h_t, f_t використаємо (4) при $r=2$, $\varepsilon=1/2$. Тоді

$$\mathfrak{I}_1 := \int\limits_{Q_{0,\tau}} h_t|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\widetilde{u}^k\widetilde{u}^k_{tt}\,dxdt \le \frac{h^1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|\widetilde{u}^k|^{2(q(x)-1)} + |\widetilde{u}^k_{tt}|^2\Big]dxdt.$$

Оцінимо інтеграл $\int_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^k|^{2(q(x)-1)}\, dxdt$. Враховуючи умови на q^0, зауваження 3 гарантує вкладення просторів $H_0^1(Q_{0,\tau}) \circlearrowleft L^{2(q^0-1)}(Q_{0,\tau})$, $\tau \in (0,T]$. Тоді на підставі зауваження 1 одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^k|^{2(q(x)-1)}\, dxdt \le S_{2(q-1)}\Big(||\widetilde{u}^k||_{L^{2(q(x)-1)}(Q_{0,\tau})}\Big) \le$$

$$\le C_6 S_{2(q-1)}\Big(||\widetilde{u}^k||_{L^{2(q^0-1)}(Q_{0,\tau})}\Big) \le C_7 S_{2(q-1)}\Big(||\nabla\widetilde{u}^k||_{L^2(Q_{0,\tau})}\Big).$$

Отже,

$$\Im_1 \le \frac{h^1 C_7}{2} S_{2(q-1)}\Big(||\nabla\widetilde{u}^k||_{L^2(Q_{0,\tau})}\Big) + \frac{h^1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^k_{tt}|^2\, dx\, dt \le C_8 + \frac{h^1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}^k_{tt}|^2\, dx\, dt,$$

де стала C_8 – додатна і не залежить від k, τ.

Оскільки $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\frac{2n}{n-2}}=1$, то з нерівності Гельдера, зауваження 1 та оцінки (7) запишемо перетворення:

$$\int\limits_{\Omega} h(q-1)|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\widetilde{u}^k_t\widetilde{u}^k_{tt}\, dx \le h^0(q^0-1)\,\big|\big|\,|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\big|\big|_{L^n(\Omega)}\, ||\widetilde{u}^k_t||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\, ||\widetilde{u}^k_{tt}||_{L^2(\Omega)},$$

а також

$$\big|\big|\,|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\big|\big|_{L^n(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}^k|^{n(q(x)-2)}\, dx\Big)^{1/n} \le$$

$$\le \Big(C_9 + C_{10}||\widetilde{u}^k; L^{n(q(x)-2)}(\Omega)||^{\max\{1,n(q^0-2)\}}\Big)^{1/n} \le$$

$$\le \Big(C_9 + C_{11}||\widetilde{u}^k; L^{n(q^0-2)}(\Omega)||^{\max\{1,n(q^0-2)\}}\Big)^{1/n} \le$$

$$\le \Big(C_9 + C_{12}||\nabla\widetilde{u}^k; L^2(\Omega)||^{\max\{1,n(q^0-2)\}}\Big)^{1/n} \le C_{13}.$$

Крім того, на підставі зауваження 3 при $s=\frac{2n}{n-2}$ правильне вкладення просторів $H_0^1(\Omega) \circlearrowleft L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ і виконується нерівність

$$||\widetilde{u}^k_t||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \le C_{14}||\nabla\widetilde{u}^k_t||_{L^2(\Omega)},$$

де $C_{14}>0$. Отже,

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} h(q-1)|\widetilde{u}^k|^{q(x)-2}\widetilde{u}^k_t\widetilde{u}^k_{tt}\, dxdt \le C_{15}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\nabla\widetilde{u}^k_t|^2 + |\widetilde{u}^k_{tt}|^2\Big]\, dxdt,$$

де стала C_{15} – додатна і не залежить від k, τ.

Можна довести, що

$$-\int\limits_{Q_{0,\tau}} m((\widetilde{u}^k_t-\varphi)^-)_t\widetilde{u}^k_{tt}\, dxdt \ge 0.$$

Враховуючи одержані оцінки, рівність (23) перепишемо у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|\widetilde{u}_{tt}^k|^2+(a_0-2A_1\delta)|\nabla\widetilde{u}_t^k|^2\Big]dx\le\int\limits_{\Omega}\Big[|\widetilde{u}_{tt}^k(0)|^2+(a^0+2A_1)|\nabla\widetilde{u}_1^k|^2+$$

$$+2A_1|\nabla\widetilde{u}_0^k|^2\Big]\,dx+2A_1Y_2(\delta)\int\limits_{\Omega_\tau}|\nabla\widetilde{u}^k|^2\,dx+2C_8+\int\limits_{Q_{0,\tau}}|f_t|^2\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(2c^0+c^1+d^0+d^1+h^1+2C_{15}+3)|\widetilde{u}_{tt}^k|^2+(A_2+3a^1+B_1+2C_{15})|\nabla\widetilde{u}_t^k|^2\Big]\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(c^1+d^0)|\widetilde{u}_t^k|^2+(A_2+B_2)|\nabla\widetilde{u}^k|^2+d^1|\widetilde{u}^k|^2\Big]\,dxdt. \tag{24}$$

Оскільки $\widetilde{u}_1\in\operatorname{int}K$ чи $\widetilde{u}_1=0$, то можна вважати, що $\widetilde{u}_1^k\in K$. Тоді одержимо, що $\widetilde{u}_{tt}^k(0)=f(0)-A_1(0)\widetilde{u}_1^k-A_2(0)\widetilde{u}_0^k$. З того, що $f,f_t\in L^2(Q_{0,T})$ випливає таке: $f\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Тому $f(0)\in L^2(\Omega)$ і $\int_\Omega|\widetilde{u}_{tt}^k(0)|^2\,dx\le C_{16}$, де стала C_{16} не залежить від k. Враховуючи це, оцінки (19), (20) та вибираючи в (24) $\delta>0$ – достатньо малим, на підставі леми Гронуолла-Белмана, після нескладних перетворень, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|\widetilde{u}_{tt}^k|^2+|\nabla\widetilde{u}_t^k|^2\Big]dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|\widetilde{u}_{tt}^k|^2+|\nabla\widetilde{u}_t^k|^2\Big]\,dxdt\le C_{17}, \tag{25}$$

де стала C_{17} не залежать від k, τ. Теорему доведено. □

Перейдемо тепер до доведення основного результату.

Доведення теореми 1. Розв'язок задачі (1)-(3) отримаємо як границю розв'язків мішаних задач зі штрафом, а саме задач типу (8)-(10). Отож, для кожного $m\in\mathbb{N}$ розглянемо функцію u^m – розв'язок задачі

$$u_{tt}^m(t)+A_1(t)u_t^m(t)+A_2(t)u^m(t)-m(u_t^m(t)-\varphi)^-=f(t),\quad t\in(0,T), \tag{26}$$

$$u^m|_{t=0}=u_0, \tag{27}$$

$$u_t^m|_{t=0}=u_1. \tag{28}$$

З теореми 2 випливає існування цього розв'язку. Враховуючи умови теореми 1, отримаємо послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, для якої так само, як при доведенні теорем 2 та 3, одержуємо аналоги оцінок (19)-(21), (25). Зокрема, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^m|^2+|\nabla u^m|^2+|u^m|^2+|u^m|^{q(x)}+|u_{tt}^m|^2+|\nabla u_t^m|^2\Big]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|u_t^m|^2+|\nabla u^m|^2+|u^m|^2+|u^m|^{q(x)}+|u_{tt}^m|^2+|\nabla u_t^m|^2\Big]dx\le C_{18},\quad\tau\in(0,T], \tag{29}$$

де стала C_{18} не залежить від m, τ. Крім того,

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}-(u_t^m-\varphi)^-u_t^m\,dxdt\le\frac{C_{18}}{m}. \tag{30}$$

На підставі (29) існує послідовність чисел $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{j\to+\infty} m_j = +\infty$ й існує функція u така, що

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;V) \ \text{ та слабко в } \ H^1(Q_{0,T})\cap L^{q(x)}(Q_{0,T}),$$
$$u_t^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_t \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{та слабко в} \quad H^1(Q_{0,T}),$$
$$u_{tt}^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_{tt} \quad * - \text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{та слабко в} \quad L^2(Q_{0,T}).$$

Крім того,

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad H^1(Q_{0,T}) \quad \text{і майже скрізь в} \quad Q_{0,T},$$
$$u_t^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_t \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_{0,T}) \quad \text{і майже скрізь в} \quad Q_{0,T},$$
$$|u^{m_j}|^{q(x)-2}u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{q(x)-2}u \quad \text{слабко в} \quad L^{q'(x)}(Q_{0,T}). \tag{31}$$

Зауважимо таке: з (30) випливає, що $u_t(t)\in K$ майже для всіх $t\in(0,T)$.

Перепишемо (8) для u^{m_j}, одержану рівність помножимо на $v(t)-u_t^{m_j}(t)$, де $v\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $v(t)\in K$ майже для всіх $t\in(0,T)$, та зінтегруємо по $Q_{0,\tau}$, $\tau\in(0,T]$. Оскільки

$$m_j\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u_t^{m_j}-\varphi)^-\,(v-u_t^{m_j})\,dxdt =$$
$$= m_j\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(-(v-\varphi)^- - \big[-(u_t^{m_j}-\varphi)^-\big]\Big)(v-u_t^{m_j})\,dxdt \ge 0,$$

то одержимо нерівність

$$\int\limits_0^\tau < u_{tt}^{m_j}(t) + A_1(t)u_t^{m_j}(t) + A_2(t)u^{m_j}(t) - f(t), v(t)-u_t^{m_j}(t) > dt \ge 0. \tag{32}$$

Після нескладних перетворень і застосування формули інтегрування частинами, спрямуємо в (32) m_j до безмежності та візьмемо нижню границю. На підставі збіжностей (31) та леми Фату отримуємо, що функція u є шуканим розв'язком задачі (1)-(3). Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. / *Ж.-Л. Лионс* – М., 1972.
2. *Глазатов С.Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. / *С.Н. Глазатов* – Новосибирск, 1992. – 22 с. – (Препринт № 7).
3. *Глазатов С.Н.* Нелинейные уравнения третьего порядка и вариационные неравенства / *С.Н. Глазатов* // Неклассические уравнения математической физики: международный семинар, посвященный 60-летию со дня рождения проф. В.Н. Врагова, 3-5 окт. 2005 г.: Труды семинара. – 2005. – С. 80-93.
4. *Lavrenyuk S.* Variational hyperbolic inequality in the domain unbounded in spatial variables / *S. Lavrenyuk, P. Pukach* // International Journal of Evolution Equations. – 2007. – Vol. 3, № 1. – P. 103-122.

5. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2325-2331.
6. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
7. *Лавренюк С.П.* Деяка варіаційна нерівність третього порядку зі змінним степенем нелінійності у необмеженій області *С.П. Лавренюк, О.Т. Панат* // Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. Мех. – 2008. – Т. 13, Вип. 18. – С. 55-61.
8. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *W. Orlicz* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
9. *Kovacik O.* On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *O. Kovacik, J. Rakosnik* // Czechslovak Math. J. – 41 (116). – 2005. – P. 592-618.
10. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *О.М. Бугрій* // Математичні студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.
11. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. / *Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон* – М., 1958.

Стаття: надійшла до редакції 21.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

SECOND ORDER HYPERBOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

Oleh BUHRII[1], Ivan HURNYAK[1], Petro PUKACH[2], Oksana KHOLYAVKA[3]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine,
[2]*Lviv Polytechnic National University,*
Bandera str., 12, 79013, Lviv, Ukraine,
[3]*IAPMM NASU,*
Naukova str., 3b, 79060, Lviv, Ukraine,
e-mail: ol_buhrii@i.ua

In bounded domains we proved existence of solutions to some problems for variational inequalities of the second order with variable exponent of nonlinearity in younger term.

Key words: nonlinear hyperbolic variational inequalities of the second order, variable exponent of nonlinearity.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Олег БУГРИЙ[1], Иван ГУРНЯК[1], Пётр ПУКАЧ[2], Оксана ХОЛЯВКА[3]

[1] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, 79000 Львов, Украина
[2] *Национальный университет “Львовская политехника”,*
ул. Степана Бандеры, 12, 79013 Львов, Украина
[3] *Институт прикладных проблем механики и математики*
имени Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова, 3-б, 79060 Львов, Украина
e-mail: ol_buhrii@i.ua

В ограниченных областях доказано существование решений некоторых задач для вариационных неравенств второго порядка с нелинейным младшим членом, степень которого есть функция от пространственных переменных.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические вариационные неравенства второго порядка, переменный показатель нелинейности.